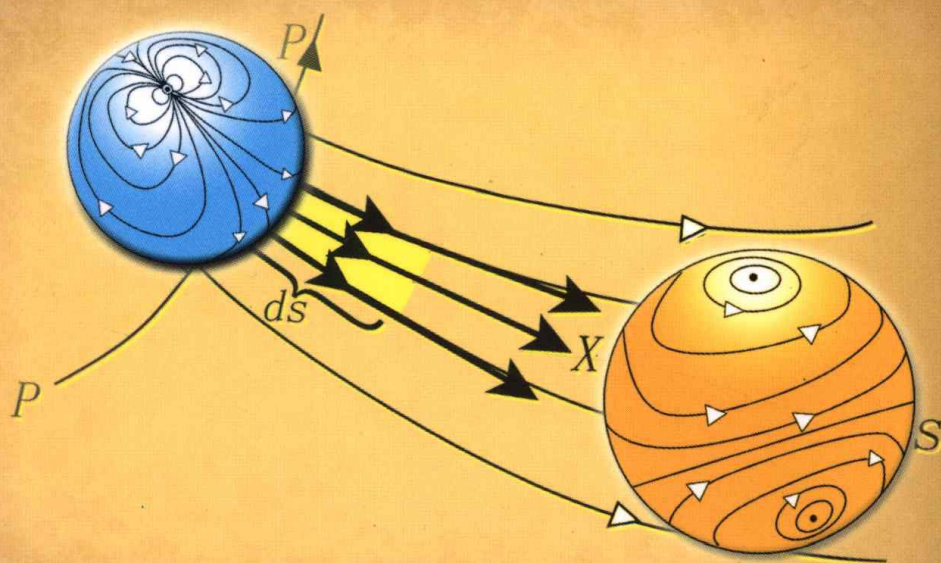




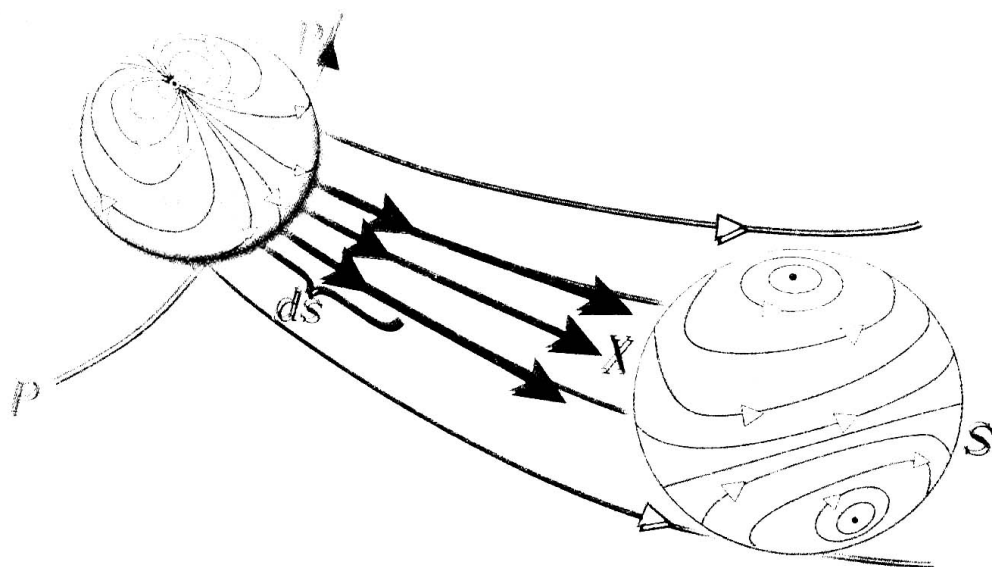
Visual Complex Analysis

复 分 析 可视化方法

[美] Tristan Needham 著
齐民友 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



Visual Complex Analysis

复 分 析

可视化方法

[美] Tristan Needham 著

齐民友 译

人民邮电出版社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

复分析：可视化方法/(美)尼达姆(Needham, T.)

著；齐民友译. —北京：人民邮电出版社, 2009. 7

(图灵数学·统计学丛书)

书名原文: Visual Complex Analysis

ISBN 978-7-115-20883-5

I. 复… II. ①尼…②齐… III. 复 IV. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 073754 号

内 容 提 要

本书是复分析领域近年来产生了广泛影响的一本著作. 作者独辟蹊径, 用丰富的图例展示各种概念、定理和证明思路, 十分便于读者理解, 充分揭示了复分析的数学美. 书中讲述的内容有作为变换看的复函数、默比乌斯变换、微分学、非欧几何学、环绕数、复积分、柯西公式、向量场、调和函数等.

本书可作为大学本科生或研究生的复分析课程教材或参考书.

图灵数学·统计学丛书

复分析：可视化方法

◆ 著 [美]Tristan Needham

译 齐民友

责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号

邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn

网址: <http://www.ptpress.com.cn>

北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本: 700×1000 1/16

印张: 33.75

字数: 656 千字

2009 年 7 月第 1 版

印数: 1-3 000 册

2009 年 7 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2006-7032 号

ISBN 978-7-115-20883-5/O1

定价: 79.00 元

读者服务热线: (010)51095186 印装质量热线: (010) 67129223

反盗版热线: (010)67171154

翻 译 说 明

这个译本依据的是原书 2006 年第 12 次印刷本. 在翻译时作了以下的变动.

1. 原书的标题分三级: 章、节、小节. 为了方便读者查阅, 我们使用了统一的编号. 例如 3.4.1 表示第 3 章第 4 节第 1 小节. 5.2 则表示第 5 章第 2 节 (有些节下面没有小节). 公式的编号则在一章之内统一编号, 而不专门指明出自哪一节和小节. 例如 (10.3) 表示第 10 章的第 3 个式子 (结论). 但是, 由于本书完全避免了常见的定义、定理和证明的模式, 所以许多“式子”其实是定理. 而什么地方是证明的开始, 时常未加指明. 但是在相当多的情况下, 我们都注明了“证毕”或用其他的话表示证明结束. 插图的编号也是按章来编排的. 例如用图 3-5 表示第 3 章的第 5 个图.

2. 本书很注意介绍历史发展, 所以涉及不少人名 (不止是数学家). 为了避免误读, 除了最著名的大人物如欧几里德、高斯等等, 译者努力写出他们的名字的外文拼法、生卒年份和国籍. 这里有两种情况: 一是同一个人的名字, 在英文中和在他的本国文字中拼法不同, 我们力求说明; 二是有一些话语如“伟大的”等等都是译者加的, 虽然其中并无深意, 也一定会有不同看法. 虽然全由译者负责, 但仍然欢迎读者批评指正. 当然也还有未曾找到出处的, 只好付诸阙如. 这些材料很大一部分来自一个著名的数学史网站 The MacTutor History of Mathematics archive, 它的索引可见

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>

3. 译者根据需要加了一些注解. 在译者认为原书说法有不妥之时, 在多数情况下, 尊重作者的意图 (请看原作者的序言), 未加变动, 少数情况认为有必要时加了一些说明. 这些注解都放在一页之末. 但都说明了是译者注, 并且承担自己的责任. 不妥之处希望读者指正. 原书有少量错误, 其中大部分只是印刷上的问题, 翻译时随时加以改正, 未加说明, 但比较重要的都说明了是译者的责任. 最后还有一些地方, 原文涉及外国人的日常生活之处, 外国人一看就懂, 我国读者则可能比较生疏, 译者也作了一些文字的变通.

总之, 翻译中必然有各种问题、缺陷和错误, 都请读者不吝指正.

齐民友

谨以本书献给

罗哲尔·彭罗斯爵士 (Sir Roger Penrose)

和

乔治·本奈特-司徒尔特 (George Burnett-Stuart)

前 言

已知的各种理论，时常可以用不同的物理概念来描述，而它们作出的一切预测可能都是等价的，因此它们在科学上没有区别。然而，当试图从那个基础走向未知世界时，这些理论在人们心理上则是不同的。因为不同的观点可能会提示作不同的修正，所以在企图了解尚未被理解的事物时，由它们产生的假设并非等价的。

R. P. Feynman [1966]

• 一个寓言

假想有一个社会，在那里，鼓励（甚至是强迫）到了一定年龄的公民去读乐谱（有时还要谱曲），这一切都是令人尊敬的。然而这个社会有一个非常奇怪且令人苦恼的法律（几乎没有人记得这个法律是怎么来的？）——禁止听音乐和演奏音乐！

在这个社会里，虽然音乐的重要性是被广泛承认的，但是由于某些原因，音乐并没有被广泛地欣赏。可以肯定，教授们在起劲地抠巴赫、瓦格纳等人的伟大作品，他们尽其所能地向学生们传授他们在这些作品中找到的美丽的含义，但是如果劈头劈脑地问问他们“这究竟有什么意义？”他们还只能无言以对！

这个寓言里，立法禁止学音乐的学生直接从“声音的直觉”去体验与理解音乐，明显是不公正不合理的。但是在我们的数学家社会里就有这样的法律。这是一条不成文的法律。虽然轻视它的人也还可能发迹，但是这是一条法律，那就是：禁止数学成为可视的！

很可能当一个人打开随便一本关于随便什么主题的现代数学教本时，他面对的就是抽象的符号推理，而与他关于实际世界的感官经验完全脱节，尽管他正在研究的现象时常是借助于几何（可能还有物理）直觉才发现的。

这反映了一个事实：近几百年来形象思维在数学中的名声被玷污了。虽然伟大的数学家们从来也不顾及这种风尚，然而“街头巷尾的数学家们”直到前不久才接受了几何的挑战。

这本书将用一种新的、可以看得见的（即可视化的）论证方式解释初等复分析的真理，公开地向当前占统治地位的纯符号逻辑推理叫板！

• 计算机

对几何学的兴趣之所以又重新升起，部分是由于广大群众都能使用计算机来画出种种数学对象，也可能是由于与此有关的对混沌与分形理论的狂热的兴趣。本书

则主张比较清醒地把计算机作为几何推理的辅助.

我一直鼓励读者这样来看计算机: 把它比喻为一个物理学家的实验室——它既可以用来检验关于世界的构造的现有观念, 又可以用来发现新现象, 从而要求用新的观念作出新的解释. 我在全书中都建议这样来使用计算机, 但是我刻意避免作详细的教导. 理由很简单: 数学观念是长存的东西, 而几乎很少有比计算机硬件和软件更加转瞬即逝的东西了.

尽管如此, “ $f(z)$ ” 程序当前仍是可视地探讨本书中各种观念的最好工具, 可以从 Lascaux Graphic 公司的网站 [<http://www.primenet.com/~lascaux/>] 免费下载其试用版. 如能使用诸如 Maple® 或 Mathematica® 这种多用途的数学引擎, 有时也是有好处的. 然而我想强调一下: 完全不使用计算机也能完全理解全书.^①

• 本书是在牛顿的“创世纪”中生成的

1982 年夏天, 我在威斯特发尔著名的牛顿传记 (Westfall [1980]) 的鼓舞下, 用功地研读了牛顿的杰作《自然哲学的数学原理》(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 以下简称《原理》) 一书 (Newton [1687]). 物理学诺贝尔奖得主钱德拉塞卡 (S. Chandrasekhar) 的书 (Chandrasekhar [1995]) 追求的是完全展示牛顿在《原理》中提出的各种结论中所蕴含的自然本性, 本书则是着迷于牛顿的方法的产物.

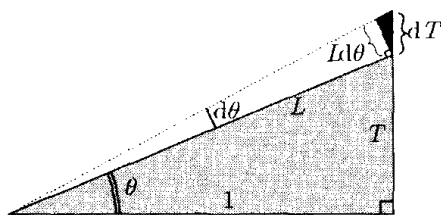
众所周知, 1665 年出版的牛顿的微积分的最初版本和我们现在学的微积分很不一样: 它的本质是幂级数运算, 而牛顿把对于幂级数的运算比喻为在算术中运用十进小数展开式. 符号演算——就是现在每一本标准的教科书上的那种微积分的讲法——通常是与莱布尼茨的名字联在一起的, 牛顿虽然完全熟悉它, 却认为它对于自己只有附带的意义. 毕竟, 牛顿掌握了幂级数就能计算 $\int e^{-x^2} dx$ 那样的积分, 像计算 $\int \sin x dx$ 一样容易. 请莱布尼茨也来试试这件事!

人们不甚知晓的是, 到了 1680 年左右, 牛顿对这两种方法都不再着迷, 那时他着手来撰写微积分的第 3 种版本, 并以几何为基础. 这种“几何微积分”正是推动牛顿的《原理》走向辉煌的物理学的数学动力.

我在掌握了牛顿的方法以后, 就立刻在我教微积分初步的课程中试试自己的身手. 可以举一个例子来帮助说明这是什么意思. 我们来证明, 如果 $T = \tan \theta$, 则 $\frac{dT}{d\theta} = 1 + T^2$. 如果我们让 θ 增加一个小量 $d\theta$, 则 T 也将增加一个量 dT , 如下图所示. 要想得出结果, 只需注意到, 当 $d\theta$ 趋向 0 时, 其极限情况将是: 图上的黑色三角形将最终相似于阴影三角形 [练习]. 所以极限将是

① 在原书的下面一段中, 作者详细介绍了他在编辑与印刷本书时所使用的软件, 由于中文译本并未使用它们, 或者它们与汉字并不兼容, 所以翻译时略去了这一段. ——译者注

$$\frac{dT}{Ld\theta} = \frac{L}{1} \Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = L^2 = 1 + T^2.$$



后来我才逐渐看到这种思维方式可以多么自然地用于复平面的几何学——那是在发现复平面几乎 300 年后的事了!

• 怎样读这本书

为了使这本书读起来有趣,我一直试图把它写成好像向一位朋友面对面地解释其中的思想.相应于此,我也一直试图使你(读者)主动参与展开这些思想.例如,我在论证进展中,时常有意地放上一两块逻辑的垫脚石,放得相当远,你需要停一下,轻快地从一块石头跳到另一块石头.这些地方都注上了“[练习]”标记;它们通常只需要作一点简单计算,稍微想一想就行了.

这样就进到真正的习题本身,放在每一章末尾.我相信,求解一个问题的最本质的前提是有一种愿望要去找找到解答,所以我尽力给出一些能激起好奇心的习题.这些习题比通常所见范围广得多,而且在其中又时常会确立一些以后在正文中会自由地用到的重要事实.我一方面避免了那种从头至尾就只是例行计算的问题,并且相信在求解这些问题的过程中,读者会自动地发展出相当的计算技巧.另一方面,在大量习题中我的意图正是要表明几何思维时常可以代替冗长的计算.

书中凡标有星号(*)的部分初读时均可略去.如果你真想读加了星号的某节,也可以略去加了星号的任何小节.然而请注意,加了星号的部分不一定比其他部分更难,也不一定没有什么意思或不甚重要.

• 怎样教这本书

全书大约可在一年内教完.如果想开一学期的课程,首先必须确定,把这门复分析教成什么类型的课程,然后选定教这本书的路径.我这里只提出 3 种可能的路径.

- **传统课程.** 第 1~9 章,略去所有加星号的材料(例如第 6 章全章).

- **向量场课程.** 为了利用 Pólya 向量场方法所提供的使复积分可视化的好处,可以仍按上述的“传统课程”来教,但略去第 9 章而加上第 10~11 章中未加星号的部分.

- **非欧几何课程.** 可以不教所有关于积分的材料,而集中注意默比乌斯(Möbius)变换和非欧几何.复分析的这两个相关的部分可能是它对于现代数学和物理学

最重要的部分, 同时又是在本科生教材中几乎被完全忽视了的部分. 但另一方面, 研究生水平的著作又总是假设你已经在本科生阶段见到了其主要思想: 这是第 22 条军规的又一个例子!

这种课程可以这样来教: 第 1 章全部; 第 2 章无星号部分; 第 3 章全部, 包括加了星号的各节, 但是 (也可以) 略去加了星号的小节; 第 4 章全部; 第 6 章全部, 包括加了星号的各节, 但是 (也可以) 略去加了星号的小节.

• 省略与致歉

如果你和我一样, 相信数学和物理学最终是统一的, 你会因为复数在统辖物质的量子力学规律中所起的作用而深感复数之必要性. 同样, 罗哲尔·彭罗斯 (Roger Penrose) 爵士的研究也 (越来越有力地) 表明, 复数在管辖时空结构的相对论规律中也起同样的中心的作用. 说真的, 如果物质和时空的规律最终会得到统一, 则很可能只有在复数的援助之下才行. 本书不可能探讨这些问题, 我们只能向有兴趣的读者推荐以下著作: Feynman [1963, 1985], Penrose [1989, 1994] 以及 Penrose and Rindler [1984].

一个更严重的省略是本书缺少了对黎曼曲面的讨论, 而我原打算以最后一章来讨论它的. 但是当我看到严肃的处理必定导致全书不合理的膨胀, 这个计划就被放弃了. 然而, 到本书写成时, 所需的脚手架大部分已经搭建起来了, 而这个脚手架材料仍保留在已完成的书中. 特别地, 我希望有兴趣的读者会发现, 本书最后 3 章对理解黎曼最初对物理学的洞察是有帮助的, 而在 Klein [1881] 中, 对此作了阐述. 也可参看 Springer [1957, 第 1 章], 它基本上复述了 Klein 的专著, 而又加上了一些很有好处的评述.

我以为数学史对理解数学的现状与其未来的轨迹两方面都是不可或缺的工具. 遗憾的是, 我在本书中只能略微触及一点历史事实, 我只能推荐读者去读 J. Stillwell 的一本好书《数学及其历史》(Mathematics and Its History), 即文献中的 John Stillwell [1989]. 说真的, 我强烈鼓励你把它作为本书的陪伴一起来读; 它不仅追溯和解释了复分析的发展, 还探讨和说明了它和其他数学领域的联系.

我愿向专业的读者致歉, 因为我发明了一个词: “伸扭” (amplitwist)[第 4 章] 作为“导数”的同义语, 我从“伸缩” (amplification) 和“扭转” (twist) 两字中各取第一字凑在一起, 创造了“伸扭”这个新词. 我只能说, 我是在教学过程中不得已才造了这样一个词的: 如果想不用这样的词来讲授本书的思想, 你很快就会明白我这样作的用意! 附带说一下, 还有一个先例可为“伸扭”一词辩解, 那就是, 克莱因 (F. Klein) 和比伯巴赫 (Bieberbach) 等人的老德国学派也造了一个类似的词. 他们用的是 “eine Drehstreckung”, 即由 “drehen” (扭转) 和 “strecken” (拉伸) 合成.

本书中很大一部分几何的事实和论证, 就我所知, 都是新的. 我在正文中没有强调这一点, 是因为这样做没有意思: 学生们不需要知道这些, 而专家们不说也知

道. 然而, 如果一个思想显然是不同寻常的, 而我又知道别人曾经发表过, 我都努力做到功归应得者.

在重新思考这么多经典数学时, 无疑会犯错误; 责任全在我个人. 感谢大家指出些错误, 我将接受并修正, 同时公布在网址 <http://www.usfca.edu/vca>^①.

本书无疑还有许多未曾发现的毛病, 但是有一桩“罪行”是我有意去犯的, 对此我也不后悔: 有许多论证是不严格的, 至少表面上看是如此. 如果你把数学仅仅看成是人类的心智所创造的, 是岌岌可危地高耸的建筑物, 这就是一桩严重的罪行. 追求严格性就好比是绞尽脑汁来维持这幢建筑物的稳定, 以防整个建筑物在你身旁轰然倒塌. 然而, 如果你和我一样, 相信我们的数学理论只不过是试图获取一个柏拉图式的世界的某些侧面, 这个世界并非我们创造的, 我就会争论说, 开始时缺少严格性, 只不过是付出了小小的代价, 使得读者能比采用其他方式更直接更愉快地看透这个世界.

T. N. 加州旧金山

1996 年 6 月

① 这个译本依据的是本书 2006 年的重印本. 该网站上公布的勘误, 均已改正. ——译者注

致 谢

首先,我最要感谢的人是 Stanley Nel 博士,他是我的朋友、我的同事和我的系主任,他以这三种身份帮助我完成了本书.作为朋友,他在我进展缓慢情绪不高时给我以支持;作为数学同事,他读了本书的大部分并提出了有益的批评;作为系主任,他不断送给我性能越来越强的计算机,而当美国移民局要求用“同样有资格”的美国人来取代我的职务时,他成功地为我斗争.为了这一切,还有许多其他的事,我向他深致谢意.

其次,我要感谢 Monash 大学的 John Stillwell 教授.从我在下文中引用他的著作之频繁,可以看到我认为其价值之大.同样,我虽然没有他那种行文简洁的才能,却仍然力求学习并采用他的处理方式,以便能为数学概念找回真义.最后,我有欠于他最大也最具体的在于,他在各章文稿写完之时就阅读了它们,而我们两人一直没有见过面!本书多处有赖于他的许许多多有益的建议与改正.

我觉得我能够来到旧金山大学数学系是很幸运的.这里完全没有政治和人事上的纠葛、对抗以及种种学术界的坏风气.我要感谢所有的同事们,他们创造了一个如此友好支持的气氛,使我可以在其中工作.我想特别列出以下诸位致谢:

- Nancy Campagna 辛勤地读了一半校样;
- Allan Cruse 和 Millianne Lehman 不仅在他们担任系主任期间应允了我所有关于软件的需求,而且从我到美国起就一直给我善意的、明智的建议;
- James Finch 在我用 LATEX 编辑本书时以耐心和专长克服了种种问题;
- Robert Wolf 在图书馆里建立了一个很好的数学藏书;
- Paul Zeitz 对于我和我力求达到的价值观有很大的信任,感谢他的具体的建议与更正,他有勇气作为除我之外第一个使用本书各章来教复分析的人.

我要诚挚地感谢 Santa Clara 大学的 Gerald Alexanderson 教授,他在读到最初几章时就给了我鼓励,后来又做了许多善意的事.

我永远要感谢我在牛津大学 Merton 学院受到的教育.所以,本书能在 OUP(牛津大学出版社)出版使我感到特别高兴和舒心,我要特别感谢前高级数学编辑 Martin Gilchrist 博士,我一开始把关于这本书的想法告诉他时,就得到了他热忱的鼓励.

当我 1989 年第一次从英国来到 USF(旧金山大学)时,我还没有见过计算机.现在 OUP 能够直接从我用因特网传送的 PostScript® 文档来印这本书,这件事就说明自那以来我已走了多么远.这一切我都要感谢 James Kabage.当我们相识时,他还只是一名研究生,但很快地就逐级升任为网络服务中心主任.尽管如此,他从

不犹豫地在我的办公室里一待就是几个小时, 解决我新近遇到的硬件和软件问题. 他总是用额外的时间向我解释他的解决方法的道理, 这样我就成了他的学生.

我要感谢 USF 的信息技术服务中心副主任 Benjamin Baab 博士. 尽管他已身居高位, 但总愿意卷起袖子来帮我解决有关微软产品的难题.

我诚挚地感谢多才多艺的网页管理员 Eric Scheide, 他为我编写了一个极其灵活的 Perl 程序, 大大加快了索引的编制.

我感谢 MIT 的 Berthold Horn 教授, 因为他创造了了不起的 Y&Y T_EX System for Windows [<http://www.YandY.com/>], 他大度地帮我解决许多 T_EX 方面的问题; 他也乐意地采纳了我关于改进这个软件的几个建议, 而我认为这个软件是 T_EX 世界的奔驰汽车.

我同样要感谢 Lascaux Graphics 公司的 Martin Lapidus, 他把我的许多建议采纳进了他的 “ $f(z)$ ” 程序 [<http://www.primment.com/~lascaux/>], 使之成为我写这本书的更好的工具.

本书的最新印刷中包含了许多更正. 其中大多数是由读者指出的, 我非常感谢他们的努力. 虽不能列出他们每个人的名字, 但我必须承认 R. von Randow 博士独立地指出 30 多处错误.

作为罗哲尔·彭罗斯的学生, 我有幸目睹他是怎样用黑板上的美丽作图来有声地说出自己的思想. 在这个过程中, 我越来越相信, 如果一个人足够努力——也足够聪明!——那么, 每一个数学的神秘都能用几何推理来解决. 乔治·本奈特-斯图尔特和我在我们同为彭罗斯的学生时, 就成了好朋友. 在我们关于音乐、物理和数学的无穷无尽的讨论中, 乔治帮助我净化了我对数学本性的概念, 也帮我弄清楚了, 在这个学科里什么才是可接受的. 我把本书的献词送给这二位师友很难报偿我有负于他们之处.

好几位朋友帮助我克服了我亲爱的母亲 Claudia 的去世给我的悲伤. 除了我的兄弟 Guy 和父亲 Rodney 之外, 我要特别感谢 Peter, Ginny Pacheco 和 Amy Miller, 没有他们的爱心抚慰, 我不知道我能做出什么.

最后, 我要感谢爱妻 Mary. 在我写这本书时, 她容忍我装作认为科学是一生中最重要的事. 现在书已经写完了, 正是她每日每时都向我证明, 还有比科学更重要的东西.

目 录

第 1 章 几何和复算术	1	2.2.3 卡西尼曲线*	51
1.1 引言	1	2.3 幂级数	54
1.1.1 历史的概述	1	2.3.1 实幂级数的神秘之处	54
1.1.2 庞贝利的“奇想”	3	2.3.2 收敛圆	57
1.1.3 一些术语和记号	5	2.3.3 用多项式逼近幂级数	60
1.1.4 练习	6	2.3.4 唯一性	61
1.1.5 符号算术和几何算术的 等价性	7	2.3.5 对幂级数的运算	62
1.2 欧拉公式	8	2.3.6 求收敛半径	64
1.2.1 引言	8	2.3.7 傅里叶级数*	67
1.2.2 用质点运动来论证	9	2.4 指数函数	69
1.2.3 用幂级数来论证	10	2.4.1 幂级数方法	69
1.2.4 用欧拉公式来表示正弦 和余弦	12	2.4.2 这个映射的几何意义	70
1.3 一些应用	12	2.4.3 另一种方法	71
1.3.1 引言	12	2.5 余弦与正弦	73
1.3.2 三角	13	2.5.1 定义与恒等式	73
1.3.3 几何	14	2.5.2 与双曲函数的关系	74
1.3.4 微积分	17	2.5.3 映射的几何	76
1.3.5 代数	19	2.6 多值函数	78
1.3.6 向量运算	24	2.6.1 例子: 分数幂	78
1.4 变换与欧氏几何*	26	2.6.2 多值函数的单值支	80
1.4.1 克莱因眼中的几何	26	2.6.3 与幂级数的关联	82
1.4.2 运动的分类	30	2.6.4 具有两个支点的例子	83
1.4.3 三反射定理	32	2.7 对数函数	85
1.4.4 相似性与复算术	34	2.7.1 指数函数的逆	85
1.4.5 空间复数	37	2.7.2 对数幂级数	87
1.5 习题	39	2.7.3 一般幂级数	88
第 2 章 作为变换看的复函数	47	2.8 在圆周上求平均值*	89
2.1 引言	47	2.8.1 质心	89
2.2 多项式	49	2.8.2 在正多边形上求平均 值	91
2.2.1 正整数幂	49	2.8.3 在圆周上求平均值	94
2.2.2 回顾三次方程*	50	2.9 习题	96

第 3 章 默比乌斯变换和反演	106	3.6.2 解释: 齐次坐标	138
3.1 引言	106	3.6.3 特征向量与特征值*	139
3.1.1 默比乌斯变换的定义和 意义	106	3.6.4 球面的旋转作为默比乌 斯变换*	141
3.1.2 与爱因斯坦相对论的 联系*	107	3.7 可视化与分类*	143
3.1.3 分解为简单的变换	107	3.7.1 主要思想	143
3.2 反演	108	3.7.2 椭圆型、双曲型和斜驶 型变换	144
3.2.1 初步的定义和事实	108	3.7.3 乘子的局部几何解释	146
3.2.2 圆周的保持	110	3.7.4 抛物型变换	147
3.2.3 用正交圆周构造反演 点	112	3.7.5 计算乘子*	149
3.2.4 角的保持	114	3.7.6 用特征值解释乘子*	150
3.2.5 对称性的保持	115	3.8 分解为 2 个或 4 个反射*	151
3.2.6 对球面的反演	116	3.8.1 引言	151
3.3 反演应用的三个例子	118	3.8.2 椭圆型情况	151
3.3.1 关于相切圆的问题	118	3.8.3 双曲型情况	152
3.3.2 具有正交对角线的四边 形的一个奇怪的性质	119	3.8.4 抛物型情况	154
3.3.3 托勒密定理	120	3.8.5 总结	154
3.4 黎曼球面	121	3.9 单位圆盘的自同构*	155
3.4.1 无穷远点	121	3.9.1 计算自由度的数目	155
3.4.2 球极射影	121	3.9.2 用对称原理来求公式	156
3.4.3 把复函数转移到球面 上	124	3.9.3 最简单的公式的几何 解释*	157
3.4.4 函数在无穷远点的性 态	125	3.9.4 介绍黎曼映射定理	158
3.4.5 球极射影的公式*	127	3.10 习题	159
3.5 默比乌斯变换: 基本结果	129	第 4 章 微分学: 伸扭的概念	166
3.5.1 圆周、角度和对称性的 保持	129	4.1 引言	166
3.5.2 系数的非唯一性	130	4.2 一个令人迷惑的现象	166
3.5.3 群性质	131	4.3 平面映射的局部描述	168
3.5.4 不动点	132	4.3.1 引言	168
3.5.5 无穷远处的不动点	132	4.3.2 雅可比矩阵	168
3.5.6 交比	134	4.3.3 伸扭的概念	170
3.6 默比乌斯变换作为矩阵*	136	4.4 复导数作为伸扭	170
3.6.1 与线性代数的联系的经 验上的证据	136	4.4.1 重新考察实导数	170
		4.4.2 复导数	171
		4.4.3 解析函数	173
		4.4.4 简短的总结	174
		4.5 一些简单的例子	175
		4.6 共形 = 解析	176

4.6.1	引言	176	5.10.3	把第一种椭圆轨道变为 第二种	215
4.6.2	在整个区域中的共形 性	177	5.10.4	力的几何学	216
4.6.3	共形性与黎曼球面	179	5.10.5	一个解释	216
4.7	临界点	179	5.10.6	卡斯纳-阿诺尔德 定理	217
4.7.1	挤压的程度	179	5.11	解析拓展	218
4.7.2	共形性的破坏	180	5.11.1	引言	218
4.7.3	支点	181	5.11.2	刚性	219
4.8	柯西-黎曼方程	182	5.11.3	唯一性	220
4.8.1	引言	182	5.11.4	恒等式的保持	222
4.8.2	线性变换的几何学	183	5.11.5	通过反射作解析 拓展	223
4.8.3	柯西-黎曼方程	184	5.12	习题	227
4.9	习题	185	第 6 章	非欧几何学*	236
第 5 章	微分学的进一步的几何研究	190	6.1	引言	236
5.1	柯西-黎曼的真面目	190	6.1.1	平行线公理	236
5.1.1	引言	190	6.1.2	非欧几何的一些事实	238
5.1.2	笛卡儿形式	190	6.1.3	弯曲曲面上的几何学	239
5.1.3	极坐标形式	191	6.1.4	内蕴几何与外在几何的 对立	241
5.2	关于刚性的一个启示	192	6.1.5	高斯曲率	241
5.3	$\log(z)$ 的可视微分法	195	6.1.6	常曲率曲面	243
5.4	微分学的各法则	196	6.1.7	与默比乌斯变换的联 系	244
5.4.1	复合	196	6.2	球面几何	245
5.4.2	反函数	197	6.2.1	球面三角形的角盈	245
5.4.3	加法与乘法	198	6.2.2	球面上的运动: 空间旋 转和反射	246
5.5	多项式、幂级数和有理函数	198	6.2.3	球面上的一个共形映 射	249
5.5.1	多项式	198	6.2.4	空间旋转也是默比乌斯 变换	252
5.5.2	幂级数	199	6.2.5	空间旋转与四元数	256
5.5.3	有理函数	201	6.3	双曲几何	259
5.6	幂函数的可视微分法	201	6.3.1	曳物线和伪球面	259
5.7	$\exp(z)$ 的可视微分法	203	6.3.2	伪球面的常值负曲率*	260
5.8	$E' = E$ 的几何解法	204	6.3.3	伪球面上的一个共形 映射	261
5.9	高阶导数的一个应用: 曲率*	206			
5.9.1	引言	206			
5.9.2	曲率的解析变换	207			
5.9.3	复曲率	209			
5.10	天体力学*	212			
5.10.1	有心力场	212			
5.10.2	两类椭圆轨道	213			

6.3.4	贝尔特拉米的双曲面	263	7.5.3	布劳威尔不动点定理*	313
6.3.5	双曲直线和反射	266	7.6	最大值与最小值	313
6.3.6	鲍耶-罗巴切夫斯基公式*	269	7.6.1	最大模原理	313
6.3.7	保向运动的三种类型	271	7.6.2	相关的结果	315
6.3.8	把任意保向运动分解为两个反射	275	7.7	施瓦茨-皮克引理*	315
6.3.9	双曲三角形的角盈	277	7.7.1	施瓦茨引理	315
6.3.10	庞加莱圆盘	279	7.7.2	刘维尔定理	318
6.3.11	庞加莱圆盘中的运动	282	7.7.3	皮克的结果	319
6.3.12	半球面模型与双曲空间	285	7.8	广义辐角原理	321
6.4	习题	289	7.8.1	有理函数	321
第 7 章	环绕数与拓扑学	298	7.8.2	极点与本性奇点	323
7.1	环绕数	298	7.8.3	解释*	325
7.1.1	定义	298	7.9	习题	326
7.1.2	“内”是什么意思?	299	第 8 章	复积分: 柯西定理	334
7.1.3	快速地求出环绕数	299	8.1	引言	334
7.2	霍普夫映射度定理	301	8.2	实积分	335
7.2.1	结果	301	8.2.1	黎曼和	335
7.2.2	环路作为圆周的映射*	301	8.2.2	梯形法则	336
7.2.3	解释*	303	8.2.3	误差的几何估计	337
7.3	多项式与辐角原理	303	8.3	复积分	339
7.4	一个拓扑辐角原理*	304	8.3.1	复黎曼和	339
7.4.1	用代数方法来数原象个数	304	8.3.2	一个可视化技巧	341
7.4.2	用几何方法来数原象个数	306	8.3.3	一个有用的不等式	342
7.4.3	解析函数在拓扑上有何特殊	307	8.3.4	积分法则	342
7.4.4	拓扑辐角原理	309	8.4	复反演	343
7.4.5	两个例子	310	8.4.1	一个圆弧	343
7.5	鲁歇定理	311	8.4.2	一般环路	344
7.5.1	结果	311	8.4.3	环绕数	346
7.5.2	代数的基本定理	312	8.5	共轭映射	347
			8.5.1	引言	347
			8.5.2	用面积来解释	347
			8.5.3	一般环路	349
			8.6	幂函数	349
			8.6.1	沿圆弧的积分	349
			8.6.2	复反演作为极限情况*	351
			8.6.3	一般回路和形变定理	351
			8.6.4	定理的进一步推广	353
			8.6.5	留数	353

8.7 指数映射·····355	第 10 章 向量场: 物理学与拓扑学·····398
8.8 基本定理·····356	10.1 向量场·····398
8.8.1 引言·····356	10.1.1 复函数作为向量场·····398
8.8.2 一个例子·····356	10.1.2 物理向量场·····399
8.8.3 基本定理·····357	10.1.3 流场和力场·····400
8.8.4 积分作为原函数·····359	10.1.4 源和汇·····402
8.8.5 对数作为积分·····361	10.2 环绕数与向量场*·····403
8.9 用参数作计算·····362	10.2.1 奇点的指数·····403
8.10 柯西定理·····363	10.2.2 庞加莱怎样看指数·····406
8.10.1 一些预备知识·····363	10.2.3 指数定理·····407
8.10.2 解释·····364	10.3 闭曲面流上的流*·····408
8.11 一般的柯西定理·····366	10.3.1 庞加莱-霍普夫定理的 陈述·····408
8.11.1 结果·····366	10.3.2 定义曲面上的指数·····410
8.11.2 解释·····367	10.3.3 庞加莱-霍普夫定理的 解释·····411
8.11.3 一个更简单的解释·····368	10.4 习题·····413
8.11.4 回路积分的一般公 式·····369	第 11 章 向量场与复积分·····417
8.12 习题·····370	11.1 流量与功·····417
第 9 章 柯西公式及其应用·····377	11.1.1 流量·····417
9.1 柯西公式·····377	11.1.2 功·····419
9.1.1 引言·····377	11.1.3 局部流量和局部功·····420
9.1.2 第一种解释·····377	11.1.4 散度和旋度的几何 形式*·····422
9.1.3 高斯平均值定理·····378	11.1.5 零散度和零旋度向 量场·····423
9.1.4 第二种解释和一般柯西 公式·····379	11.2 从向量场看复积分·····425
9.2 无穷可微性和泰勒级数·····380	11.2.1 波利亚向量场·····425
9.2.1 无穷可微性·····380	11.2.2 柯西定理·····427
9.2.2 泰勒级数·····381	11.2.3 例子: 面积作为流 量·····428
9.3 留数计算·····383	11.2.4 例子: 环绕数作为流 量·····429
9.3.1 以极点为中心的罗朗 级数·····383	11.2.5 向量场的局部性 态*·····430
9.3.2 计算留数的一个公式·····384	11.2.6 柯西公式·····431
9.3.3 对实积分的应用·····385	11.2.7 正幂·····432
9.3.4 用泰勒级数计算留数·····387	11.2.8 负幂和多极子·····433
9.3.5 在级数求和上的应用·····388	11.2.9 无穷远处的多极子·····435
9.4 环形域中的罗朗级数·····390	
9.4.1 一个例子·····390	
9.4.2 罗朗定理·····391	
9.5 习题·····394	