矢变导函论

张明江 著

N71

天津科学技术出版社

矢变导函论

张明江 著

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑:黄立民

矢变导函论

张明江 著

*

天津科学技术出版社出版、发行

天津市张自忠路189号 邮编300020

天津新华印刷三厂印刷

*

开本787×1092毫米 1/32 印张7.75 字数157 000

1996年4月第1版

1996年4月第1次印刷

印数:1—2 500

ISBN 7-5308-2016-8

O·87 定价:11.00元

[redacted] 作者试图创立矢变导函论。该论解决数学史上未曾定义过的，以单字母一价矢为自变量的函数的导函及其求逆问题。根据本论的公理体系，使导函及其运算不论在概念上和在运算过程上比起数变导函论都大为简化，理应推得一些新概念、新方法、新结果。

前　　言

写本书的主旨有二：一是想把已经十分完善化了的无坐标系下的矢量(及并矢)代数学[5]提升到“微积学”的高层次；二是为自学高级数学的人们开辟一条迅速入门的途径．

还是先用几个实例来说明问题为妥．

已知　$\nabla\times\boldsymbol{V}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，求 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=?$

式中　$\boldsymbol{r}$—径矢；$r\triangleq|\boldsymbol{r}|$．

本题是[1]$\boldsymbol{p}$. 202上习题148，是一道难题．原作者给出提示：利用球面坐标系并做附加假设：$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$只有 V_ψ 分量不为零．给出的答案：$V_\psi=\dfrac{1}{r}\,\dfrac{f(\psi)-\cos\theta}{\sin\theta}$．

试问：若不做这种附加假设，按作者[1]中提供的(难以书写、难以记忆、难以理解、难以运算的)球面系旋度公式(照该书原样)列式：

$$\mathrm{rot}_r\boldsymbol{V}=\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(V_\psi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V_\theta}{\partial\psi}=\frac{1}{r^2}.$$

$$\mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{V}=\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V_r}{\partial\psi}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rV_\psi)}{\partial r}=0.$$

$$\mathrm{rot}_\psi\boldsymbol{V}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_r}{\partial\theta}=0.$$

去求解，可以想像得到，那将是相当复杂的．即便是在原作者提出的那种附加假设条件下，原作者给出的答案也只不过是仅只一个特解：$-\dfrac{\cos\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{\psi}^\circ$和一部分齐次解$\dfrac{f(\psi)}{r\sin\theta}\boldsymbol{\psi}^\circ$，漏掉了一

些解(即那不是全解).(也参见 $\boldsymbol{P}.55,57$例22-1).用此例明显地揭露出数变微分方程解法及表述上的严重缺欠:概念深涵,表述复杂,理解很难,书写不便,记忆困难,运算繁琐;此外,由于人为地设立了坐标系,难免掺入人为主观因素,造成对自然现象的扭曲.

该题原本是以 r,θ,ψ 为自变量的多变数变函数形式的微分方程,该系的单位基矢 $\boldsymbol{r}^\circ,\boldsymbol{\theta}^\circ$和 $\boldsymbol{\psi}^\circ$也都是 r,θ 和或 ψ 的数变矢值函数.

现在,我们把所有的数变自变量视为单字母径矢 $\boldsymbol{p}(\triangleq\boldsymbol{r})$ 的数值函数.例如 $r=r(\boldsymbol{p})=|\boldsymbol{p}|,x=x(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}^\circ=\boldsymbol{r}^\circ(\boldsymbol{p})=\dfrac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$,等等.我们这样的"些微"变作,即将数变函数变作矢变函数,将引起微积分学的巨大变革.

设□(读作"de")是一个可以参与矢量代数运算的符号"矢量",其定义为□ $d\boldsymbol{p}\triangleq\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 为幺并矢,而□ $d\triangleq\nabla$(读作"ded"),则□$\times d\boldsymbol{V}\triangleq\nabla\times\boldsymbol{V}$ 必是某二矢(其实为二梯矢)的矢积.相信这是正确的定义,对于该题的求解,就要把$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\triangleq\dfrac{\boldsymbol{p}}{p^3}$化为某二矢(梯矢)叉积的形式:

$$\boldsymbol{p}\equiv\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})\times[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})]}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})^2},\boldsymbol{a}\text{ 为任定的不为零的常矢,}$$

这是将一矢化为某二矢的矢(叉)积$\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})^2}\times[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p})]$的一种通用方法.为简化运算,今选用 $\boldsymbol{a}$ 为单位常矢 $\boldsymbol{k}$(可以理解为笛卡耳系的或圆柱面系的单位常矢 $\boldsymbol{k}$),则$\dfrac{\boldsymbol{p}}{p^3}$化为

$$\frac{\boldsymbol{p}}{p^3}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})^2}\times\frac{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})}{p^3}=\nabla q^2\times\nabla q^3=$$

$$\nabla\times(q^2\nabla q^3)\cup\nabla\times(-q^3\nabla q^2),$$

式中 $\nabla q^2=\dfrac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})^2}\Rightarrow q^2=\psi(\boldsymbol{p})$；$\nabla q^3=\dfrac{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})}{p^3}\Rightarrow q^3=\cos\theta(\boldsymbol{p})$. 由

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla\times(q^2\nabla q^3)\cup\nabla\times(-q^3\nabla q^2)\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{V}=(q^2\nabla q^3+\nabla U)\cup(-q^3\nabla q^2+\nabla U)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V}=\left[\psi(\boldsymbol{p})\frac{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})}{p^3}+\nabla U\right]$$

$$\cup\left[-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})^2}+\nabla U\right],$$

式中 ∇U 为任一 C^2 类 $U(\boldsymbol{p})$（数值矢变函数或零价矢变函数）的梯度，或称为旋矢矢变导函方程的齐次解函数；$\psi\dfrac{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})}{p^3}$ 或 $-\dfrac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\dfrac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}}{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p})^2}$，分别称为该式方程的特解函数. 上式表达的解是完全解.

读者不太熟习上述矢变函数的运算，但将其转化为数变函数的表达，就容易理解了：

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}^\circ=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{\theta}^\circ\times\boldsymbol{\psi}^\circ=\frac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{\theta}^\circ\times\frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{\psi}^\circ,$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{V}=\left(-\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{\psi}^\circ+\nabla U\right)\cup\left(-\psi\frac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{\theta}^\circ+\nabla U\right).$$

从此一例的解法可看出：

1. 可以将矢量代数学中无坐标系（甚至于无原点）的部分提升到矢变导函（矢变函数的导函）学的高层次. 这里并未动用任何坐标系，纵然后一式用了球面坐标系的表达式，但那是为了人们便于用习惯方式去理解它而已.

2. 运算和表达都十分简单. 从运算上看，$\nabla\boldsymbol{V}$ 在此例下只能是两个“梯矢”的“矢积”，然后对每个梯矢求逆的特解（因齐

次解∇U在旋度$\nabla\times\boldsymbol{V}$条件下总为零),便基本上完成了求解过程.表达简单,自不待言.

3. 容易得到全解.

总之,矢变导函学是在连续统假设,柯西单边连续性,无坐标系下的矢量代数学和Hilbert内积空间的基础上,建立一套公理体系,将矢量的三大优点——①一般:用一矢可表达一数组而用一数不能表达一矢;②简单:表达几何量和物理量的记法(符号学)上和概念上;③直观:在几何量和代数量与物理量的相互联想上——在矢变导函上得到充分的发扬,创立出与牛顿-莱布尼兹-柯西微积分学相并行而优于它的一种矢变导函论.从这种矢变导函论可推得以下新结果:

1)可使导函算符∇直接作用于矢变函数及求逆运算上;

2)负体积和对Hamilton算符∇(nabla)定义的修正以及在概念上和或在运算结果上对场论中的Gauss定理,stokes定理,而尤其是Green公式的错误的改正;

3)解微分方程的五等式法,它优于拉格朗日-恰比五维特征公式:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

4)微分方程的同解形式转换;

5)线面体积分间变换的基本公式:$d\boldsymbol{s}d\boldsymbol{p}=\boldsymbol{I}d\tau$;

6)张量构成新原则与终极空间.

书中第一章是矢量代数中无坐标系部分的复述内容,可以越过不读;第二章是矢变导函论的公理体系;最后是取自某些研究生应试题的题解,该类题均有一定难度,文中尽量做到

最简解证.

数变函数论下多以显函数为主,而矢变函数论下,因隐函数的几何概念比较直观,故多以隐函数为主讨论问题.关于定义域,值域,遵从隐函数定理,连续性,连续可导阶次等显然条件,常略去不提.

由于矢变导函论尚处于创立初期阶段,加之个人知识有限,不严谨之处,尤其是对数变函数领域的运算上的错误,在所难免,衷心期望读者指正,以期其日臻完善,获得数学界的认可.

目　次

一、矢 量 代 数

1. 矢量

定义 凡具有模和指向的量，称为矢量(向量)，记作黑体字母如 $\boldsymbol{a}$. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模，为 $\boldsymbol{a}$ 的绝对值，记作 $|\boldsymbol{a}|\in$ 非负实数集；其指向，记作 $\boldsymbol{a}$ 的单位(模为 1)矢 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 故矢量 $\boldsymbol{a}$ 等价于 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$. $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 也称作 $\boldsymbol{a}$(指)向，$|\boldsymbol{a}|$ 也称为 $\boldsymbol{a}$ 的长度(或范数). 矢量也简称作矢、矢集，记作 V. 本书里也将矢量比如 $\boldsymbol{a}$ 称作空间的 A 点，即 $\boldsymbol{a}\triangleq A(\boldsymbol{a})$. 因此，这三种说法，从代数学意义上讲，以模与指向的定义为准；而从几何学定义上看，以长度与指向的定义为准. 这两种定义是等价的.

对于用 $\boldsymbol{a}$ 表示点 $A(\boldsymbol{a})$，均应按上述二等价定义中任一意义去理解.

应注意的是，该定义中并未指出由同一原点出发去画出长度为模 $|\boldsymbol{a}|$ 指向为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的必要条件，然而，必要时可指定有这样的一个原点.

以上是关于无坐标系(甚至无原点)下的矢量定义.

特别规定零矢，为模为零而指向为任意的矢量，记作 $\mathbf{0}$.

定义 (二矢相等)

$(\boldsymbol{a}\triangleq\boldsymbol{b})\Leftrightarrow((|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|)\cap(\boldsymbol{a}^{\circ}=\boldsymbol{b}^{\circ}))$，$\forall\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ 称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与指向 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 相反的指向，称为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的负向，记作 $-\boldsymbol{a}^{\circ}$.

定义（负矢） 唯一存在 $\boldsymbol{a}$ 的负矢，记作 $-\boldsymbol{a}$：

$$-\boldsymbol{a}\triangleq((|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|)\cap((-\boldsymbol{a})^{\circ}=-\boldsymbol{a}^{\circ})),\forall\ \boldsymbol{a}\in V.$$

按矢量的长度和指向的定义，一矢量 $\boldsymbol{a}\in V$，为一有向线段 $\overrightarrow{OA}$，O 为 $\boldsymbol{a}$ 的始端，A 为 $\boldsymbol{a}$ 的箭端．$\boldsymbol{a}$ 的始端 O 在何处，一般，不影响矢量 $\boldsymbol{a}$ 的值．

矢量也可等价地被定义成一有序的数组，如 $\triangleq(a_1,a_2,a_3)$，$a_1,a_2,a_3\in R$（实数集）；矢量的坐标定义，是该种定义的特例；矢量也可定义成带指标的数量，如

$$\boldsymbol{a}\triangleq a_i,i=1,2,3,\cdots,n(n\text{——自然数})$$

更甚者，矢量也可定义成某类函数（见 P. 23）．为显示本书的特色，用数量组或带指标的数量或函数定义的矢量，不属于本理论体系的内容．

2．矢量加法[20]

[illegible] 设有一非空集合 G．如果在 G 中任二有序元之间规定一种运算规则，记作 $\otimes$．若 G 中任二有序元 a 和 b，在规定的 $\otimes$ 下，$a\otimes b$ 总与 G 中唯一一个元 c 对应（唯一对应性），则称这种对应为封闭性（自闭性）（公理），记 $G\otimes G\rightarrow G$．这样的一个集合 G 和运算符 $\otimes$ 一起，称为一个群胚，或说 G 在 $\otimes$ 下的群胚，或称为内部运算集（若有二个不同集 A 与 G，则 $(A\otimes G\rightarrow G)$，则称外部运算集）．

集为 G 且运算符为 $\otimes$ 的一个群胚，若还满足以下公理：

（1）结合性 $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$，$\forall\ a,b,c\in G$ 时，则称 G 连同 $\otimes$ 一起为一个半群．

例如，在正整数集上规定普通加法时，便构造成半群；规定普通乘法时，则构造成另一个半群．

一个 G 集(连同$\otimes$)的半群,若还满足以下公理

(2)幺元存在性 $\overset{1}{\exists}\ I\in G\Rightarrow I\otimes a=a, \forall\ a\in G$ 时,则称该半群 G(连同$\otimes$)为一个独点集.$\overset{1}{\exists}$ 表示“存在唯一一个”.

例如,正整数集在普通乘法下因存在幺元 $I=1$ 而构造成为这种乘法的独点集.

然而,正整数集中因无加法下的幺元 0,而不能成为加法独点集. 很明显,非负整数集,因 $I=0$,可构造成一个加法独点集.

有一个很有启发意义的独点集的例子[21].

设有一集 $S=\{1,2\}$,只含两个元素 1 和 2. 今规定一个由集 S 的元 1 和 2 组成下列四个元素的另一集合 $M(S)$:$\{1_s, \alpha, \beta, \gamma\}$,其中 $1_s=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ 在集 $M(S)$的任一有序二元间规定一种乘法规则(也可叫着置换):前一个元素的上一行数码不变,使其下一行的数码变成为与后一元素的上一行数码相同的竖列下面的数码,而得一 $M(S)$的对应元素. 具体看例子

$$\alpha\cdot\beta=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{matrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\beta.$$

经一一验证,知集 $M(S)$在该乘法下满足唯一对应性,封闭性,结合性并唯一存在幺元 $I=1_s$,如下表:

	1_s	α	β	γ
1_s	1_s	α	β	γ
α	α	1_s	γ	β
β	β	β	β	β
γ	γ	γ	γ	γ

故集 $M(S)$连同该乘法"·"构成一个独点集.

可见,集合是多种多样的,而运算规则也是多种多样的.结果,人们创造出多种多样的独点集以及下面讲的群,此外还有在同一集上规定两种(如加法和乘法)或更多种的运算规则后,创造出有实用价值的数学结构(集合连同运算规则,称为数学结构).也有更甚者,在两个结构上构成的数学结构,这就更加重要了.

一个独点集 G(连同$\otimes$)还满足(公理)

(3)逆元 a^{-1}唯一存在性 $\overset{1}{\exists}\ a^{-1}\in G\Rightarrow a^{-1}\otimes a=I,\forall\ a\in G$ 时,称集合 G 连同$\otimes$为一个群,记作$(G;\otimes)$.

例如,在实数集 R(Real)上规定普通加法$\otimes=+$:$(a,b)\overset{+}{\longmapsto}c\in R,\forall\ a,b\in R,\overset{1}{\exists}\ c\in R$.

在此,$\overset{+}{\longmapsto}$表示按普通加法$+$将有序对 a 和 b 映射成唯一 $c\in R$,通常用 $a+b=c$ 表示,甚至有的用$(a,b)+=c$ 表示.则$(R;+)$表示实数加法群.

然而,在 R 集上规定普通乘法$\otimes=\times$,却不能构成实数乘法群.这是因为$\overline{\exists}\ a^{-1},\forall\ a\in R$.如 $a=0\in R,a^{-1}=\frac{1}{0}\overline{\in}R$,

或者规定 0 的逆元为 0 时，$0\times0\neq1$ 幺元．这是实数集 R 上，规定了普通乘法运算规则后带来的一个“灾难”．这个“灾难”给数变函数的微积分学造成难产．

一谈到实数乘法群时就隐含着其集合不是实数集 R，而是排除了其中的零元 O（加法群的幺元）后的实数集，记作 $R\backslash O$．故实数乘法群，应记作 $(R\backslash O;\times)$．

例如，在指数集 $E=\{a^b,a^c,\cdots\}$ 上规定一种加法运算规则：

$$a^b\otimes a^c\triangleq a^{b+c},\forall\ a\in R,\forall\ b,c\in R,$$

则 $(E;+)$ 是以 a 为底的 E 指数加法群；又是该集 E 在 $\otimes=\times$ 下的乘法群．

这乃是在一个集上，使加法运算等价地变成了乘法运算或其逆转化的一个好例子．从此例可见，对于一集上的运算规则怎么个称呼法无关紧要，重要的是具体的运算规则到底是什么；另外，在 R 的集合上规定另一集 $E(R)=\{a^b,a^c,\cdots\}$，其运算要比实数集上的加法群和乘法群（在同一集上规定两种运算规则）好得多，因为不必有隐含的 $R\backslash O$ 的条件（灾难）．

在复数集 C 上规定加法运算规则，构成加法群 $(C;+)$；规定乘法运算规则，构成乘法群 $(C\backslash O;\times)$．

在只有两个元素 0 和 1 的集合 $Q=\{0,1\}$ 上规定加法运算规则后，$I=0$，$-1=1$，$-0=0$，则 $(Q;+)$ 构成加法群．在 Q 上规定一种乘法运算规则，存在 $I=1$，存在逆元 $1^{-1}=1$，$0^{-1}=0$，则 $(Q;\times)$ 构成乘法群．这种在 Q 上规定了加法运算规则和乘法运算规则（并未取消零元），使得人们构造出极适用于计算机的运算工具，因为计算机的运算中只有 0（比如“关”）和 1（“开”）两个基本状态．

在只有七个元素的集合 $W=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 上，规定一种加法运算规则，并规定"模数为 7"，就是说二元加成的整数，若大于 6，则减去 n（n——适选的整数）个 7 后的余数，使其落入 W 集中．于是$(W;+)$构成加法群，如

$$4+5=9,9-7=2;14+2=16,16-2\times7=2.$$

这种加法群，适用于星期几的加法计算．

在矢量集 V 上规定二矢 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的加法运算规则：从一点 O 为始端画出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，再以 A 点和 B 点为始点画出与$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$相平行的直线，二直线相交于 C 点，则该平行四边形的对角线段$\overrightarrow{OC}$便是矢量 $\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 的值．这种运算规则，称为平行四边形加法规则．$(V;+)$成为加法群，明确些，即几何加法群．

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\quad \overset{1}{\exists}\ \boldsymbol{c}\in V,\forall\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$.（唯一对应性和封闭性）

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),\forall\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V$.（结合性）

$\overset{1}{\exists}\ I=0\in V,\ni\ \boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a},\forall\ \boldsymbol{a}\in V$.（$I$ 存在）

式中　$\ni$—表示"使…成立".

$\overset{1}{\exists}\ -\boldsymbol{a}\in V,\forall\ \boldsymbol{a}\in V,\ni-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.（逆元存在）

3. 矢量的分解

既然一矢 $\boldsymbol{c}$ 可以由矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 取得，不难想像矢量 $\boldsymbol{c}$ 可分解成至少成二矢 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之和．但这种分解却不是唯一的：凡以 $\boldsymbol{c}$ 为对角线的任一平行四边形从 $\boldsymbol{c}$ 的始点出发的二边矢均为 $\boldsymbol{c}$ 的二分量．