全面剖析命题规律 准确预测命题方向

俄罗斯中学物理赛题新解500例

袁张瑾 俞骁翀 编著
沈 晨 审定

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

俄罗斯中学物理赛题新解 500 例

编著　袁张瑾　俞骁翀

审定　沈　晨

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯中学物理赛题新解500例/袁张瑾,俞骁翀编著.
杭州:浙江大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-308-06266-4

Ⅰ.俄… Ⅱ.①袁…②俞… Ⅲ.物理课—中学—解题
Ⅳ.G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第153827号

俄罗斯中学物理赛题新解500例

编　　著　袁张瑾　俞骁翀
审　　定　沈　晨

责任编辑　石国华
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州浙大路38号　邮政编码310027)
(网址:http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
排　　版　星云光电图文制作工作室
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　25.75
字　　数　490千
版 印 次　2008年10月第1版　2008年10月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06266-4
定　　价　38.00元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

编者的话

俄罗斯(并前苏联)中学物理竞赛理论试题在我国中学物理竞赛圈中流传甚广。这些试题立意巧妙,叙述精练,涉及的物理知识与我国的中学物理教学实际贴近,解题技巧注重于借助物理模型、思路与方法,用于训练有志参加学科竞赛的优秀学生,是不错的题材。很多题目也可以直接或稍作改动后用于高中教学。俄罗斯物理竞赛试题对问题情景的叙述十分简练,往往造成条件极其隐蔽或背景不甚清晰或不知所求,需要反复琢磨、仔细领会,深思熟虑之后,才能充分发掘隐含条件,找到解决问题的途径。

作者在长期的优生培养及竞赛实践中,多有“俄为中用”之举。对借助俄罗斯物理竞赛试题平台,训练学生的机智、敏捷,自主思考与理解能力有颇多感受。非常愿意通过本书与“圈内”同行、同学分享。

本书共选用 500 道俄罗斯(并前苏联)物理竞赛试题,其中百余道是最新译自 2007 年与 2008 年莫斯科、圣彼得堡等地中学生物理竞赛试卷,在国内属原创首发。全书分 17 章编排,按照我国中学生熟悉的思路、方法,对每一题作出全新解答。我们的解答注重对题意作点睛分析,追求运用最佳、最简捷的解题方法,尽量适合我国中学生的思维习惯与知识基础,数学要求不超出《全国中学生竞赛内容提要》的界定,只在中等数学范畴。

本书在创意与成稿过程中,杨榕楠、姜水根、王家祥、楼新宇、杨继林等同志给予诸多建议与帮助,特在此表示感谢。

希望本书带给读者一丝清风。

编者

2008 年 4 月 25 日

目　　录

第一章　物体的运动 ………………………………………… (1)

第二章　物体的平衡 ………………………………………… (31)

第三章　牛顿运动定律 ……………………………………… (49)

第四章　动　量 ……………………………………………… (94)

第五章　机械能 ……………………………………………… (110)

第六章　万有引力定律 ……………………………………… (140)

第七章　流体静力学 ………………………………………… (162)

第八章　机械振动与机械波 ………………………………… (175)

第九章　物态变化 …………………………………………… (204)

第十章　气体的性质 ………………………………………… (217)

第十一章　液体的性质 ……………………………………… (249)

第十二章　静电场 …………………………………………… (259)

第十三章　稳恒电流 ………………………………………… (295)

第十四章　磁场和电磁感应 ………………………………… (323)

第十五章　交流电 …………………………………………… (349)

第十六章　几何光学 ………………………………………… (362)

第十七章　物理光学和原子物理 …………………………… (394)

第一章 物体的运动

赛题新解

1. 步行者想要在最短的时间内从田野 A 处出发到达田野 B 处，A、B 两处相距 1300m. 一条直路穿过田野，A 处离道路 600m，B 处离道路 100m，步行者沿田野步行速度为 3km/h，沿道路步行速度为 6km/h. 问步行者应该选择什么样的路径？最短时间为多少？讨论 A、B 两处位于道路同侧与道路异侧两种情况.

解析 根据费马原理，当光线在两种均匀介质的界面上发生折射时，遵守折射定律的光程最小，即时间最短.

情况 1 若 A、B 两处位于道路异侧：

步行者应走光传播的路径 $AMNB$，如图 1-1 所示，其中 MN 段沿道路方向.

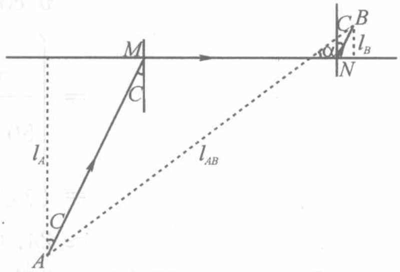

图 1-1

借助光折射（掠射）模型：

$$\sin C = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

由几何关系得：

$$\sin\alpha = \frac{l_A + l_B}{l_{AB}} = \frac{7}{13},$$

故：

$$\begin{aligned} t_{\min} &= \frac{AM + NB}{v_1} + \frac{MN}{v_2} \\ &= \frac{l_A + l_B}{v_1 \cos C} + \frac{l_{AB}\cos\alpha - (l_A + l_B)\tan C}{v_2} \\ &= \left[\frac{700}{50 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1300 \times \frac{2\sqrt{30}}{13} - 700 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{100}\right]\text{min} \\ &= (7\sqrt{3} + 2\sqrt{30})\,\text{min} \\ &\approx 23.08\text{min}. \end{aligned}$$

情况 2 若 A、B 两处位于道路同侧：

若步行者沿直线路径行走，则：

$$t_1=\frac{l_{AB}}{v_1}=\frac{1300}{50}\text{min}=26\text{min};$$

而当步行者沿光传播路径 $APQB$ 行走，如图 1-2 所示，其中 PQ 段沿道路方向.

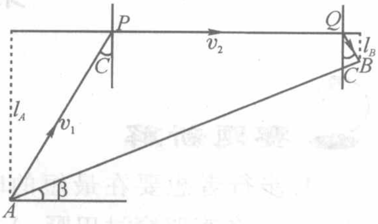

图 1-2

由几何关系得：

$$\sin\beta=\frac{l_A-l_B}{l_{AB}}=\frac{5}{13},$$

故：

$$\begin{aligned}t_{\min}&=\frac{AP+QB}{v_1}+\frac{PQ}{v_2}\\&=\frac{l_A+l_B}{v_1\cos C}+\frac{l_{AB}\cos\beta-(l_A+l_B)\tan C}{v_2}\\&=\left[\frac{700}{50\times\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1300\times\frac{12}{13}-700\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{100}\right]\text{min}\\&=(7\sqrt{3}+12)\text{min}\\&\approx 24.12\text{min}<26\text{min}.\end{aligned}$$

因此若 A、B 两处位于道路异侧时，最短时间为 23.08min；若 A、B 两处位于道路同侧时，最短时间为 24.12min.

2. 汽艇系在大湖的岸边（湖岸为直线），突然艇脱开了，风以恒定速度 $v_0=2.5\text{km/h}$、与岸成 $\alpha=15°$ 吹走这只小艇. 如果你在岸上的速度 $v_1=4\text{km/h}$，而在水中的速度 $v_2=2\text{km/h}$，试问你能追上小艇吗？当艇速为多少时这才是可行的？

解析　同上题，人沿光传播路径追汽艇，历时最短，如图 1-3 所示，AO 为艇运动方向，ACO 为人运动路径. 借助光折射模型：

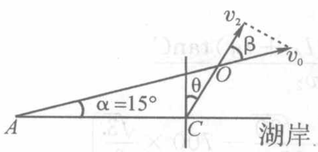

图 1-3

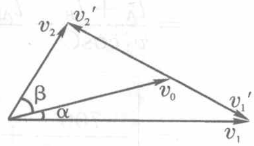

图 1-4

$$\sin\theta=\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{2},\theta=30°,\text{由几何关系得}:\beta=45°.$$

如图 1-4 所示，在岸上，人相对于艇的速度为 v_1'，在水里，人相对于艇的速度为 v_2'. 由图 1-3 可知，人要能追上艇，须满足：$v_2\geqslant v_0\cos\beta$，因为若 $v_2<v_0\cos\beta$，人不能达到

艇的前方.因此

$$v_{0\max}=\frac{v_2}{\cos\beta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\text{km/h}=2\sqrt{2}\text{km/h}\approx 2.8\text{km/h}.$$

综上所述,当艇速 $v_0 \leqslant 2.8\text{km/h}$ 时,人能够追上艇.

3. 当船速为 20km/h 时,船桅杆上服役旗与航向成 60° 角.不改变航向,船速增加一倍时,旗与航向成 30° 角.试根据这些数据求风速(可视为恒定的),并求当船速为多少时旗与航向所成的角度为 90°.

解析 船桅杆上旗的方向表示矢量($\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$)的方向,式中 $\boldsymbol{v}$ 为船速度矢量,$\boldsymbol{u}$ 为风速矢量,题给各矢量关系如图 1-5 所示,由图中几何关系得:

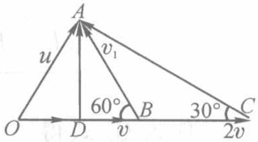

图 1-5

$$\angle CAB = 30°,$$

则:

$$v_1 = v.$$

在$\triangle AOB$ 中,因

$$v_1 = v, \angle ABO = 60°,$$

故为等边三角形,即风速

$$u = v = 20\text{km/h},$$

与航向成 60° 角.

在图中作 $AD \perp OC$,有向线段$\overrightarrow{OD}$ 即旗与航向成角 90° 时船的速度矢量,由图示几何关系知:

$$v_{船} = 10\text{km/h}.$$

4. 如图 1-6 所示,在光滑水平面上立着一根半径为 R 的竖直圆柱子,借助长为 L 的细长线将小冰球与柱子相连.开始冰球位于平面上并且线被拉紧,现在猛一推冰球,使其具有垂直于线的初速度 v_0,于是冰球开始绕柱子运动,将线缠在柱子上.没有摩擦,线系在柱子下部,靠近冰球滑动的平面.求经过多少时间后线全部缠在柱子上.

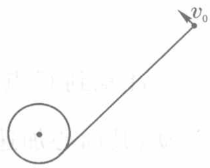

图 1-6

解析 因为绳子拉力方向垂直于小球的运动方向,所以小球线速度 v_0 大小不变.

如图 1-7 所示,小球运动的角速度:

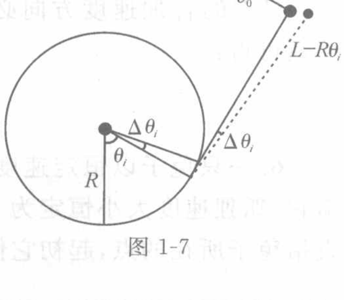

图 1-7

$$\omega=\frac{v_0}{L-iR\cdot\Delta\theta_i}=\frac{\Delta\theta_i}{\Delta t},$$

可得

$$\Delta t=\frac{L-iR\cdot\Delta\theta_i}{v_0}\Delta\theta_i,$$

故

$$t=\sum\Delta t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{L-iR\cdot\Delta\theta_i}{v_0}\Delta\theta_i \quad ①$$

作出($L-iR\cdot\Delta\theta_i$)随 θ_i 变化的图线，如图 1-8 所示，可知($L-iR\cdot\Delta\theta_i$)随 $i\Delta\theta_i$ 呈线性减小. 因此在 θ_i 从 0 增大到 $\theta=\frac{L}{R}$ 的过程中，可取($L-iR\cdot\Delta\theta_i$)的算术平均值表示其大小，平均值为

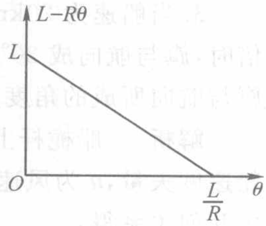

图 1-8

$$\frac{(L-R\times 0)+\left(L-R\cdot\frac{L}{R}\right)}{2}=\frac{L}{2},$$

代入 ① 式得

$$t=\frac{L}{2v_0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\theta_i=\frac{L}{2v_0}\theta=\frac{L}{2v_0}\cdot\frac{L}{R}=\frac{L^2}{2Rv_0}.$$

5. 如图 1-9 所示，AB 杆的两端 A 和 B 分别沿成直角的两边滑动. 如果杆的 B 端以恒定速度 v 运动，当杆与水平面所成角度为 α 时，求杆中点(C 点)加速度 a_C 与角 α 的关系.

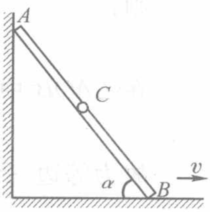

图 1-9

解析 如图 1-10，O' 为杆的瞬时转动中心，杆的瞬时角速度：

$$\omega=\frac{v}{l\sin\alpha},$$

易得杆中点 C 的速度：

$$v_C=\omega\frac{l}{2}=\frac{v}{2\sin\alpha}.$$

注意到 C 点在以 O 为圆心，以 $\frac{l}{2}$ 为半径的圆周上运动，其向心加速度：

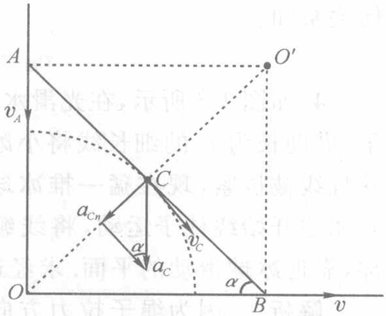

图 1-10

$$a_{Cn}=\frac{v_C^2}{\frac{l}{2}}=\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha},$$

C 点的合加速度方向必为竖直向下，由图示几何关系可得：

$$a_C=\frac{a_{Cn}}{\sin\alpha}=\frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}.$$

6. 一只兔子以恒定速度 5m/s 沿直线奔跑，某一时刻狐狸发现了这只兔子，就开始追它. 狐狸速度大小恒定为 4m/s，以并不算是高明的方式运动，狐狸每时每刻速度方向直指兔子所在的点，起初它们之间的距离减小，后来开始增加，最近距离为 30m. 求狐狸

与兔子相距最近时狐狸的加速度.

解析 如图 1-11 所示，AC 为兔子的运动轨迹，BD 为狐狸的运动轨迹，当在狐狸运动方向上，狐狸与兔子在两者连线上相对速度为 0 时，两者间距最短，由图可得：

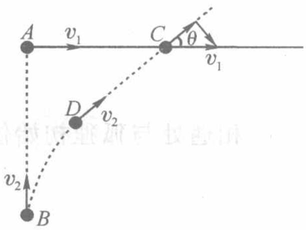

图 1-11

$$v_2 = v_1\cos\theta,$$

代入数据得：

$$\cos\theta = \frac{4}{5}.$$

据题意，狐狸每时每刻速度方向直指向兔子所在的点，即狐狸的速度方向时刻改变，由矢量分析可知狐狸速度方向改变的角速度为

$$\omega = \frac{v_1\sin\theta}{L},$$

根据公式

$$a = \omega v_2,$$

可求出相距最近时狐狸的加速度，因此

$$a = \frac{v_1\sin\theta}{L}\cdot v_2 = \frac{3\times5\times4}{5\times30}\text{m/s}^2 = 0.4\text{m/s}^2.$$

7. 狐狸追赶野兔，方向始终准确地对准野兔. 大家知道，斜眼的兔子总想沿着连接它们的直线躲开狐狸，而实际上兔子速度始终与这条直线成 60° 角. 开始兔子与狐狸之间距离为 L，它们速度大小均等于 v. 问经过多少时间狐狸追上野兔？距狐狸开始位置多远处追上？如果野兔斜视成 90°，则答案又如何？而如果斜视成 40° 呢？

解析 如图 1-12 所示，A 为野兔所在处，B 为狐狸所在处，斜眼的兔子的速度方向与 AB 连线成 θ 角. 两者在狐狸运动方向上的相对速度大小：

图 1-12

$$\Delta v = v - v\cos\theta.$$

已知开始时两者相对距离为 L，故需要经过：

$$t = \frac{L}{\Delta v} = \frac{L}{v(1-\cos\theta)}$$

狐狸才能追上野兔.

现在推广至一般：

如图 1-13 所示，A、B 初始位置在这样的一个圆上：L 为其一条弦，L 所对的圆心角为 A、B 速度方向的夹角 θ. 分解 A、B 的速度，易见 A、B 的运动是匀速率的径向运动与切向运动的合成，且具有旋转对称性，即两者速度方向夹角保持不变，一边转圈一边向圆心 O 靠拢，最终相遇在圆心 O，故此，相遇所需时间从径向运动考虑：

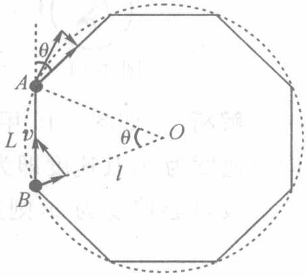

图 1-13

$$t=\frac{\dfrac{L}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}}{v\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}}=\frac{L}{v(1-\cos\theta)}.$$

相遇处与狐狸初始位置的距离，即该圆的半径：

$$l=\frac{L}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

于是当 $\theta=60^\circ$ 时，

$$t=\frac{L}{v(1-\cos60^\circ)}=\frac{2L}{v},l=\frac{L}{2\sin30^\circ}=L;$$

当 $\theta=90^\circ$ 时，

$$t=\frac{L}{v(1-\cos90^\circ)}=\frac{L}{v},l=\frac{L}{2\sin45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}L;$$

当 $\theta=40^\circ$ 时，

$$t=\frac{L}{v(1-\cos40^\circ)}\approx4.274\frac{L}{v},l=\frac{L}{2\sin20^\circ}\approx1.462L.$$

8. 两根不可伸长的细绳缠在半径为 R 的重盘上，两绳的自由端固定(图 1-14)．当盘运动时线始终被拉紧，在某一时刻，盘的角速度等于 ω，而两绳之间的夹角为 α，求此刻盘中心的速度．

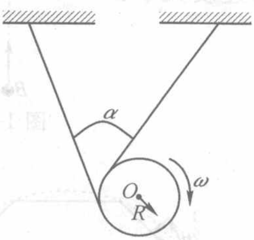

图 1-14

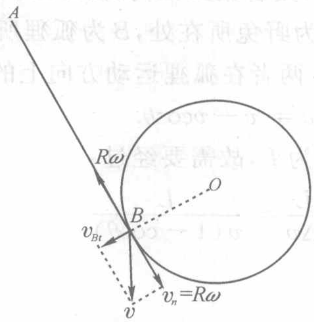

图 1-15 甲

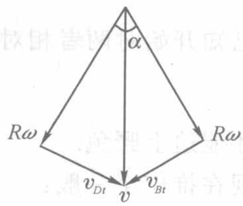

图 1-15 乙

解析 如图 1-15 甲所示，绳上 B 点与盘上 B 点有相同的速度．因为绳上 B 点沿绳方向分速度为 0，其速度即为对 A 点的转动速度 v_{Bt}，所以盘上 B 点沿绳方向速度亦为零．

设盘心速度为 v，则其切向分量：

$$v_n=R\omega,$$

法向分量：

$$v_t = v_{Bt}.$$

同理，对 D 点亦有：$v_n = R\omega, v_t = v_{Dt}$.

作出矢量关系如图 1-15 乙所示，由图易得，盘心速度：

$$v = \frac{R\omega}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

9. 长均为 l 的两杆用铰链 P 相连（图 1-16），其中一根杆的自由端用铰链 O 固定，而另一根自由端 Q 以大小和方向恒定的速度 v_0 开始运动，并且在开始时刻速度 v_0 平行与此时两杆夹角 2α 的角平分线. 求开始运动后经过非常短的时间，连接两杆的铰链 P 的加速度大小和方向.

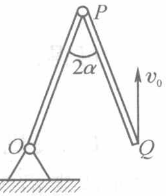

图 1-16

解析　设 P 点速度为 v_P，方向垂直于 OP 杆，如图 1-17 所示. 对 PQ 杆，由速度相关关系可知

$$v_P\cos(90° - 2\alpha) = v_0\cos\alpha,$$

可得

$$v_P = \frac{v_0}{2\sin\alpha},$$

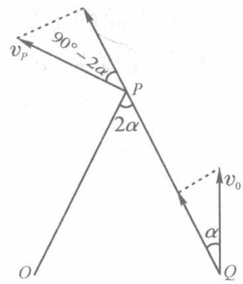

图 1-17

对应的向心加速度（沿 PO 方向）

列出加速度的矢量关系式：

$$a_n = \frac{v_P^2}{l} = \frac{v_0^2}{4l\sin^2\alpha}.$$

$$\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t,$$

其中，a_t 为 P 点切向加速度矢量. 因为 Q 点的速度大小方向均恒定，设想一个 Q 点不动的惯性参照系，O 点以恒定速度 $-v_0$ 运动，P 点运动情况应该与之前对称相同，因为这两个加速度应该相同，所以它必沿 2α 角平分线方向. 作出如图 1-18 所示的矢量图解，由图可知：

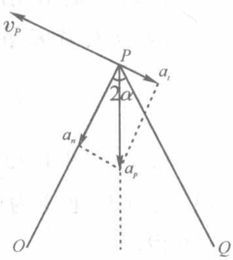

图 1-18

$$a_P = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{v_0^2}{4l\sin^2\alpha\cos\alpha},$$

方向沿角 2α 的角平分线，与 v_0 方向相反.

10. 三列蒸汽火车沿铁路直线道匀速行驶，对从火车上吹来的三股汽圈拍照，所得照片如图 1-19 所示（俯视）. 第一列火车速度 $v_1 = 50\text{km/h}$，第二列火车速度 $v_2 = 70\text{km/h}$，它们的行驶方向如图上箭头所示，求第三列火车的速度.

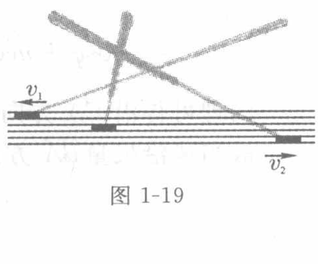

图 1-19

解析　观察照片，将第一、二列火车间距 AB 按 5 : 7 比例分成左、右两部分，分点 C 为两车相遇处，汽圈交点为 O，如

图 1-20 所示，CO 即为相遇时两车喷出的汽被风吹后的位移，矢量$\overrightarrow{CO}$ 即为风速方向，CO 的长度表示风速的大小. 再经过 O 点作平行于第三列火车汽圈方向的直线与 AB 交于 D 点，矢量$\overrightarrow{CD}$ 的方向为第三列火车的速度方向，CD 的长度表示第三列火车的速度大小. 在图 1-20 中量出 CD 的长度，由比例关系有：

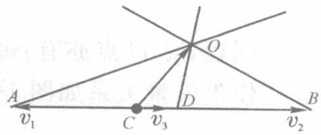

图 1-20

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{CD}{AC}$$

可得：

$$v_3 = 16.6\text{km/h}.$$

11. 飞机沿闭合航线 ABC 飞行，A、B 和 C 位于等边三角形的顶点，如果风沿矢量$\overrightarrow{AB}$ 方向或者沿矢量$\overrightarrow{BA}$ 方向，问：在哪种情况下，用于飞行的时间最少？

解析 设飞机飞行速率为 v，风速为 u，等边三角形 ABC 的边长为 l.

在 $v > u$ 的情况下：

(1) 如图 1-21 所示，由图可知：风沿 $A \to B$ 方向，则飞机沿 AB 飞行的速度为$(v+u)$，沿 BC 飞行的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 由速度矢量合成可得：

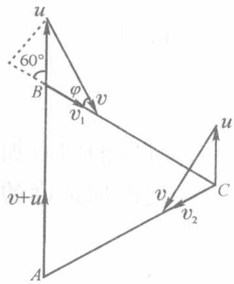

图 1-21

$$\sin\varphi = \frac{u\sin 60^\circ}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{u}{v},$$

$$v_1 = v\cos\varphi - u\cos 60^\circ$$

$$= v\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u^2}{v^2}} - \frac{u}{2}.$$

同理可作出沿 CA 方向的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 矢量，并可得：$v_2 = v_1$.

故当风沿矢量$\overrightarrow{AB}$ 方向，历时：

$$t_1 = \frac{l}{u+v} + \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = l\left(\frac{1}{u+v} + \frac{4}{\sqrt{4v^2 - 3u^2} - u}\right);$$

(2) 如图 1-22 所示，由图可知：风沿 $B \to A$ 方向，则飞机沿 BA 飞行的速度为$(v-u)$，沿 BC 飞行的速度 $\boldsymbol{v}_1{}'$ 由速度矢量合成可得：

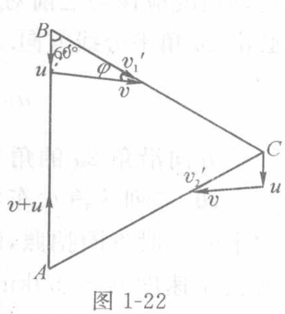

图 1-22

$$\sin\varphi = \frac{u\sin 60^\circ}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{u}{v},$$

$$v_1{}' = v\cos\varphi + u\cos 60^\circ = v\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{u^2}{v^2}} + \frac{u}{2}.$$

同理可得沿 CA 方向的速度 $\boldsymbol{v}_2{}'$，$v_2{}' = v_1{}'$.

故当风沿矢量$\overrightarrow{BA}$ 方向，历时：

$$t_2=\frac{l}{v-u}+\frac{l}{v_1'}+\frac{l}{v_2'}=l\left(\frac{1}{v-u}+\frac{4}{\sqrt{4v^2-3u^2}+u}\right).$$

两种情况下,时间之差:

$$t_2-t_1=\frac{2u}{v^2-u^2}\cdot l-\frac{4\times 2u}{4\times(v^2-u^2)}\cdot l=0,$$

故得:$t_1=t_2$,即两种情况下,用于飞行的时间相等.

在 $v<u$ 的情况下,飞机不可能沿此航线航行.

12. 绳的一端固定在半径为 r 的圆柱侧面上,靠近圆柱的底部,绳绕圆柱 k 圈(k 为整数).绳的自由端系一个物体,使物体具有速度 v,沿圆柱半径方向(图 1-23),求在多少时间内绳又全部缠在圆柱上.圆柱固定在光滑平面上.

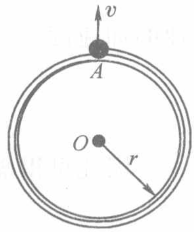

图 1-23

解析 本题解法同本章第 4 题.应用第 4 题的结论可知:长为 L 的绳子全部绕出或绕进半径为 r 的圆柱,历时

$$t_1=\frac{L^2}{2rv},$$

其中 v 为绳子自由端所系小球的速度,且速度方向始终与绳子拉紧方向垂直.题中 $L=2\pi rk$,故

$$t_1=\frac{4\pi^2r^2k^2}{2rv}=\frac{2\pi^2rk^2}{v}.$$

本题值得注意的是,当绳子全部绕出圆柱时至绳子开始绕进圆柱,需经历一段时间 t_2,作出示意图如图 1-24.由图可得,小球从 A 位置(绳子刚好全部绕出)运动到 B 位置(绳子开始绕进圆柱)为匀速圆周运动,历时:

$$t_2=\frac{\pi L}{v}=\frac{2\pi^2rk}{v}.$$

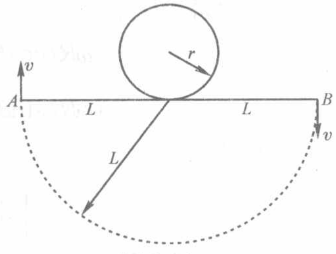

图 1-24

综上所述:经 $t=2t_1+t_2=\frac{2\pi^2rk}{v}(2k+1)$时间,绳子又全部缠在圆柱上.

13. 半径为 r 的圆盘以角速度 ω 转动,现与水平面成角 α 以速度 v 抛出圆盘,圆盘运动时圆盘面保持竖直.求当圆盘上升到最大高度时,盘上最高点运动轨迹的曲率半径.

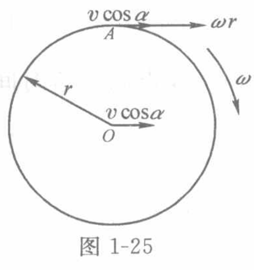

图 1-25

解析 由题意得,圆盘的中心在最高点的速度为 $v\cos\alpha$,若盘绕中心沿顺时针方向转动,如图 1-25 所示,则最高点的速度

$$v_{A1}=v\cos\alpha+\omega r;$$

若盘绕中心沿逆时针方向转动,则最高点的速度

$$v_{A2}=v\cos\alpha-\omega r.$$

故最高点速度可表示为：

$$v_A=\left|v\cos\alpha\pm\omega r\right|,$$

最高点的加速度：

$$a_A=a_{AO}+a_O,$$

其中，a_{AO} 为最高点相对于盘中心的加速度，大小为 $\omega^2 r$，方向竖直向下，a_O 为盘中心相对地的加速度，大小为 g，方向竖直向下，由此：$a_A=\omega^2 r+g$，而 $a_A=\dfrac{v_A^2}{\rho}$，则：

$$\frac{(v\cos\alpha\pm\omega r)^2}{\rho}=\omega^2 r+g,$$

因此可得盘上最高点运动轨迹的曲率半径为：

$$\rho=\frac{v_A^2}{a_A}=\frac{(v\cos\alpha\pm\omega r)^2}{\omega^2 r+g}.$$

14. 半径为 R 的轮子位于地面上方高 H 处，其以角速度 ω 转动．水滴从轮子边缘上 A 点处脱离，落在轮子正下方 B 点(图 1-26)．求水滴下落时间以及 A 点位置．

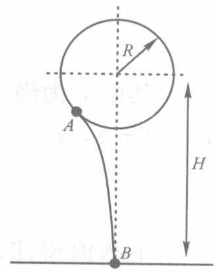

图 1-26

解析　水滴刚脱离时，水滴速率与轮子边缘 A 点相同，大小为 ωR．然后水滴作斜抛运动，如图 1-27 所示，θ 为 A 点半径方向与竖直方向的夹角．

由图可列式：

$$\begin{cases}\omega Rt\cos\theta=R\sin\theta\\ \omega Rt\sin\theta+\dfrac{1}{2}gt^2=H-R\cos\theta\end{cases},$$

解得：

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\omega t}{\sqrt{\omega^2t^2+1}}\\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2t^2+1}}\end{cases},$$

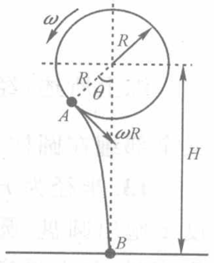

图 1-27

$$(\omega^2t^2+1)R\cos\theta=R\sqrt{\omega^2t^2+1}=H-\frac{1}{2}gt^2,$$

故水滴下落时间：

$$t=\frac{\sqrt{2}}{g}\left[R^2\omega^2+gH-R(R^2\omega^4+2gH\omega^2+g^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由：

$$\cos\theta=\frac{R}{H-\frac{1}{2}gt^2}=\frac{g}{-R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+g^2+2gH\omega^2}}=\frac{R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+g^2+2gH\omega^2}}{g+2H\omega^2},$$

可得水滴下落时 A 点半径方向与竖直方向的夹角：

$$\theta=\arccos\frac{R\omega^2+\sqrt{R^2\omega^4+g^2+2gH\omega^2}}{g+2H\omega^2}.$$

15. 观察者以恒定速度沿着一条倾斜的直路运动. 与水平面成 α 角度倾斜向上抛出物体，物体以时间间隔 t 两次穿过观察者的运动路线. 这两次物体位于观察者前方，与他同样距离. 从观察者看来，物体的运动轨迹是怎样的？在第二次穿过后，观察者测量物体在连续时间 t 内通过的路程，求这各段路程之比.

解析 按题意作出示意图 1-28 甲，图中倾斜的直线 AB 为观察者的运动路径. 观察者速度大小为 v_1，沿斜面向下做匀速直线运动. 图中虚线所示的抛物线为初速度大小为 v_2，方向与水平成 α 角斜向左上方抛出的物体的运动轨迹，O 为物体运动的最高点.

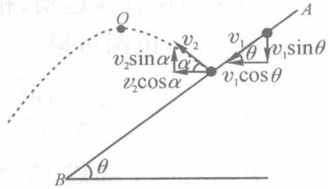

图 1-28 甲

做抛体运动的物体在水平方向上速度不变为 $v_2\cos\alpha$，观察者在水平方向上的速度也不变，为 $v_1\cos\theta$，θ 为斜面的倾角. 由题意可知，物体两次穿过观察者的运动路线，与观察者的相对位置不变，故两者在水平方向上的速度相等.

所以在观察者看来，物体的运动轨迹为一竖直线，如图 1-28 乙，物体作竖直上抛运动，物体从 C 点运动到最高点 O 再下降至 D 点、E 点 ……

观察者观察到物体从最高点 O 到 D 点历时 $t/2$，从 D 点到 E 点历时 t，从 E 点到 F 点历时 t……

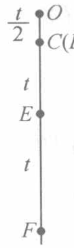

图 1-28 乙

取 $T=\frac{t}{2}$，由运动学规律可知，初速度为0的匀加速直线运动，经过相邻的两段位移时间相等时，物体的位移之比为：1∶3∶5∶…

因此物体从 D 点到 E 点，从 E 点到 F 点 …… 物体所通过的位移之比为：

$$(3+5):(7+9):(11+13):\cdots=8:16:24:\cdots=1:2:3\cdots,$$

所以在观察者看来，物体第二次穿过后，观察者测量在连续时间 t 内通过的路程之比为：

$$\Delta h_1:\Delta h_2:\Delta h_3:\cdots=1:2:3:\cdots.$$

16. 从相距 $l=10\text{m}$ 的两点，分别与水平成角 $\alpha_1=30^\circ$ 和 $\alpha_2=60^\circ$ 同时迎面抛出两个物体，初速度分别等于 v_1 和 v_2，当落下时两物体位置互换(图 1-29)，求当两个物体位于同一竖直线上时它们的相对速度 $v_{相}$.

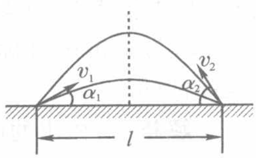

图 1-29

解析 斜抛运动物体的水平位移：

$$L = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g},$$

由于两物体的水平位移相等，且 $\alpha_1 = 30°$，$\alpha_2 = 60°$，可得

$$l = \frac{v_1^2\sin 60°}{g} = \frac{v_2^2\sin 120°}{g},$$

解得

$$v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{2gl}{\sqrt{3}}}.$$

因为两物体同时抛出，在自由落体坐标系中，两物体均沿初速度方向做匀速直线运动，相对速度不变. 以物体 2 为参照物，作出矢量图 1-30，由图可得

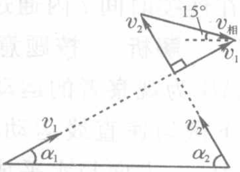

图 1-30

$$v_相 = \sqrt{2}v_1 = \sqrt{\frac{4gl}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4\times 10\times 10}{\sqrt{3}}}\text{m/s} \approx 15.20\text{m/s},$$

方向与水平面成 15° 角斜向右下方.

17. 航天员沿直线从 A 点飞到 B 点，他的运动图象如图 1-31 所示（v 是宇航员的速度，x 是他的坐标），求宇航员从 A 点飞到 B 点所需时间.

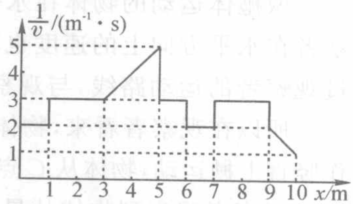

图 1-31

解析 因为运动物体所经历的时间

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \Delta x \times \frac{1}{v},$$

在题图中，$\Delta x \times \frac{1}{v}$ 表示图线与水平轴 x 所围成的面积 ΔS，可得：$\Delta t = \Delta S$.

故：

$$t = S = \left[2\times 1 + 3\times 2 + \frac{1}{2}\times(3+5)\times 2 + 3\times 1 + 2\times 1 + 3\times 2 + \frac{1}{2}\times(2+1)\times 1\right]\text{s}$$
$$= 28.5\text{s}.$$

所以宇航员从 A 点飞到 B 点需要 28.5s.

18. 在光滑水平硬地上玩游戏，图 1-32 上 C 是高 $h = 0.5$m 的网，A 是发球点，B 是目标，A、B 相对网对称分布，它们相距 $L = 3$m. 求为了击中目标抛球所需的最小速度. 球与地板的碰撞是完全弹性的.

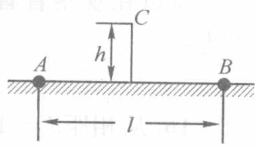

图 1-32

解析 抛出的球需要击中另一侧的目标 B，球必须过网，因此球在竖直方向上的速度：

$$v_y \geqslant \sqrt{2gh} \approx 3.16\text{m/s}.$$

球的水平速度可以尽可能的小，球可以跟地面碰撞 n 次后击中目标 B，因此，只要球