文心英才教育研究所 组编

“希望”数学竞赛教程

高二分册

宋书华 丁益民 黎金传 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ “希望”数学竞赛教程 七年级

★ “希望”数学竞赛教程 八年级

★ “希望”数学竞赛教程 高一分册

★ “希望”数学竞赛教程 高二分册

ISBN 978-7-308-06660-0

定价：24.00元

“希望”数学竞赛教程

高二分册

文心英才教育研究所　组编

本册主编　宋书华　丁益民　黎金传

本册编委　杨志明　郑小娇　丁干和　陈群峰
陆　颖　刘　洋　周志国　蒋　寅
吴俊锋　白宏国　韦刚和　余　萍

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

"希望"数学竞赛教程. 高二分册/宋书华, 丁益民, 黎金传主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2009.3
ISBN 978-7-308-06660-0

Ⅰ.希… Ⅱ.①宋…②丁…③黎… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 036982 号

"希望"数学竞赛教程(高二分册)
宋书华 丁益民 黎金传 主编

责任编辑 石国华
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 临安市曙光印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16
字　　数 400 千
版 印 次 2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-06660-0
定　　价 24.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前　　言

中学生学科竞赛的开展，在我国已有多年的历史，其中数学竞赛是开展最早，覆盖面最广的一项竞赛，数学竞赛活动由于其对少年儿童智力开发的重大促进作用而备受广大青少年的喜爱。

随着数学竞赛活动的蓬勃发展，各级各类数学竞赛活动也相继开展。其中比较大型的竞赛活动主要有：中国数学会主办的全国高中数学联赛，全国初中数学联赛；中国科协普及部、《数理天地》杂志社等主办的“希望杯”全国数学邀请赛；中国奥数教学联盟、《数学竞赛之窗》杂志主办的“联盟杯”数学竞赛；华杯赛组委会主办“华罗庚金杯”少年数学邀请赛；《中学数学研究》杂志主办的“五羊杯”数学邀请赛；小学生数学报主办的“小数报邀请赛”等等。

这些竞赛活动对广大青少年数学素养的培养，思维方法的开拓起了很好的促进作用，很多这些竞赛的优胜者在后来的人生路上都取得了辉煌的成绩。

如何才能在这些竞赛中取得好成绩，并提升自己的数学素养，促进自己的数学思维就成了广大家长和学生关注的问题。为解决这个问题，我们特组织了一批竞赛教学一线的专家老师编写了本套丛书，以期给广大读者一个良好的开端。

本丛书分为七年级、八年级和高一、高二分册。

丛书的内容涵盖初中和高中的各部分内容，在课本的基础之上，加以提升，整个难度控制在中考之上，全国联赛之下，服务于中考和竞赛，又不拘泥于中考和竞赛，对各校中档以上学生，参加中考和竞赛，最有帮助。

本书整体难度大致和“希望杯”全国数学邀请赛相当，作为“希望杯”全国数学邀请赛的培训教程最为合适。

使用建议：

1. 参加“希望杯”全国数学邀请赛的同学做赛前冲刺，请将本书所有内容均做完。

2. 希望中、高考提高的同学，请将每章中的例题全部过关，练习题部分的中前8题全部过关。

3. 参加全国初中数学联赛和全国高中数学联赛的同学，请在本书的基础上，再做一些更难的问题，来提高自己的数学素养。

限于作者水平，书中不妥之处请广大读者批评指正。联系电话是：0512－68184173，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：wenxinjiaoyu@163.com。

文心英才教育研究所

2009年3月

目　录

Contents

第1讲　集合及其运算

考题再现

1.（2005年第2试）已知 m,n 为正数，且 $m\cdot n^{1+\lg m}=1$，则 mn 的取值范围是（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(10^{-2},100)$

C. $(0,10^{-4}]\cup[1,+\infty)$　　D. $(0,10^{-4})$

【分析】 将原等式变形为 $n^{1+\lg m}=m^{-1}$，两边取对数，可得关于 $\lg m$ 与 $\lg n$ 的等式，然后由均值不等式求解.

【解析】 取对数，得 $-\lg mn=\lg m\cdot\lg n\leqslant\left(\frac{\lg m+\lg n}{2}\right)^2=\frac{(\lg mn)^2}{4}$

$\Rightarrow \lg mn\geqslant 0$ 或 $\lg mn\leqslant -4$，从而得 mn 的取值范围是 $(0,10^{-4}]\cup[1,+\infty)$.

答案选C.

【说明】 这道题考查的知识点有对数的四则运算，均值不等式. 等式变形后两边取对数是解答此题的关键. 均值不等式的一般表述为：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取"="号. 均值不等式有多种变形，常见的二维均值不等式的变形有以下九种：

(1) 对实数 a,b，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$；

(2) 对正实数 a,b，有 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$；

(3) 对实数 a,b，有 $(a+b)^2\geqslant 4ab$；

(4) 对 $ab^2>0$，有 $\frac{a}{b^2}\geqslant\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$；

(5) 对 $b>0$，有 $\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b$，$\frac{a^2}{b}\geqslant a-\frac{1}{4}b$；

(6) 对 $a>0$，有 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$；

(7) 对 $a>0$，有 $a-1\geqslant 1-\frac{1}{a}$；

(8) 对实数 a,b，有 $a(a-b)\geqslant b(a-b)$；

(9) 对实数 a,b，有 $a^2\geqslant 2ab-b^2$；

(10) 对实数 a,b 及 $\lambda\neq 0$，有 $ab\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda^2a^2+\frac{b^2}{\lambda^2}\right)$.

三维均值不等式可以由二维均值不等式类似推得，这里不再列举.

2. (2005 年第 2 试)实数 x,y 满足 $2x^2+4xy+2y^2+x^2y^2\leqslant 20$,则 $2\sqrt{2}(x+y)+xy$ 的取值范围是________.

【分析】 题中不等式变形为 $2(x+y)^2+(xy)^2\leqslant 20$,令 $x+y=\sqrt{10}r\cos\alpha, xy=2\sqrt{5}r\sin\alpha$,由均值不等式 $(a+b)^2\geqslant 4ab$ 进行变形和推理,可求得答案.

【解析】 $2(x+y)^2+(xy)^2\leqslant 20$,令 $x+y=\sqrt{10}r\cos\alpha, xy=2\sqrt{5}r\sin\alpha, 0\leqslant r\leqslant 1$,

由 $(x+y)^2\geqslant 4xy\Rightarrow 10r^2\cos^2\alpha\geqslant 8\sqrt{5}r\sin\alpha$.

(1) 当 $r=0$ 时,$2\sqrt{2}(x+y)+xy=0$;

(2) 当 $r\neq 0$ 时,则 $4\sin\alpha\leqslant\sqrt{5}r\cos^2\alpha\Rightarrow 4\sin\alpha\leqslant\sqrt{5}r(1-\sin^2\alpha)\Rightarrow\sqrt{5}r\sin^2\alpha+4\sin\alpha-\sqrt{5}r\leqslant 0$,

故 $-\dfrac{\sqrt{4+5r^2}+2}{\sqrt{5}}\leqslant\sin\alpha\leqslant\dfrac{\sqrt{4+5r^2}-2}{\sqrt{5}}\Rightarrow-\sqrt{5}\leqslant\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow-1\leqslant\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore\ \alpha\in[0,\gamma]$,其中 $\gamma=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cup[\pi-\gamma,2\pi]$,而 $2\sqrt{2}(x+y)+xy=4\sqrt{5}\cos\alpha+2\sqrt{5}\sin\alpha=2\sqrt{5}(2\cos\alpha+\sin\alpha)=10\sin(\alpha+\theta)$,其中 $\tan\theta=2$,$\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$\tan\gamma=\dfrac{1}{2}$,$\tan\theta\tan\gamma=1\Rightarrow\tan\alpha=\cot\gamma=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)\Rightarrow\alpha+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $2\sqrt{2}(x+y)+xy$ 的取值范围是 $[-10,10]$.

答案填 $[-10,10]$.

【说明】 这道题考查的知识点有均值不等式,以及换元法.由均值不等式 $(a+b)^2\geqslant 4ab$ 进行推理是解答此题的关键.

3. (2000 年第 2 试)当 $0<x<a$ 时,不等式 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(a-x)^2}\geqslant 2$ 恒成立,则 a 的最大值是________.

【分析】 原不等式等价于 $\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(a-x)^2}}{2}}\geqslant 1$.由 $0<x<a$,得 $\dfrac{1}{x}>0$,$\dfrac{1}{a-x}>0$.利用"两个正数的平方平均值不小于它们的调和平均值",可知只需 $\dfrac{2}{x+(a-x)}\geqslant 1$ 即可,由此得 $0<a\leqslant 2$.

【解析】 因为 $0<x<a$,所以 $\dfrac{1}{x}>0$,$\dfrac{1}{a-x}>0$,

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\geqslant 2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(a-x)^2}}{2}}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{2}{x+(a-x)}\geqslant 1$$

所以 $a\leqslant 2$,故答案填 2.

【说明】 这道题考查的知识点有两个正数的加权平均值不小于它们的调和平均值.加

权平均数，算术平均数，几何平均数与调和平均数之间的关系用数学符号语言表示为：

若 $x,y\in\mathbf{R}^+$，设 $Q(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，$A(x,y)=\frac{x+y}{2}$，$G(x,y)=\sqrt{xy}$，$H(x,y)=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$，则 $Q(x,y)\geqslant A(x,y)\geqslant G(x,y)\geqslant H(x,y)$.

4. (补充例题) 设 $x>0$，求 $y=\left(2+\frac{1}{x}\right)(1+x)$ 的最小值.

【分析】 先将函数式变形，然后运用均值不等式可以求解.

【解析】 因为 $x>0$，所以

$$y=\left(2+\frac{1}{x}\right)(1+x)=3+2x+\frac{1}{x}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{1}{x}\times 2x}=3+2\sqrt{2}$$

当且仅当 $\frac{1}{x}=2x$，即 $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 时取等号，

所以 $y_{\min}=2\sqrt{2}+3$.

【说明】 这是运用均值不等式求函数最值的典型例题. 考查的知识点主要是均值不等式. 要注意的是，切不可直接对 $2+\frac{1}{x}$ 与 $1+x$ 分别利用平均值不等式，再相乘求最值，这是因为前后取等条件不一致.

5. (2000 年培训题) 已知 x,y,a,b 均为正实数，且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值是________.

【分析】 用"1"代换，即对所求式子 $x+y$ 乘以等于"1"的 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$，然后运用均值不等式容易求解.

【解析】 $\because \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，$x,y,a,b\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore x+y=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)(x+y)=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geqslant a+b+2\sqrt{\frac{bx\cdot ay}{yx}}=a+b+2\sqrt{ab}$

当且仅当 $x=a+\sqrt{ab}$，$y=b+\sqrt{ab}$ 时取等号，

$\therefore (x+y)_{\min}=a+b+2\sqrt{ab}$.

【说明】 这是一道比较常规的题，考查的知识点主要是均值不等式以及换元法. 用"1"代换是解这道题的关键.

6. (2000 年培训题) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 e_1，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 的离心率为 e_2，则 e_1+e_2 的最小值为 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

【分析】 $e_1=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$，$e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$，然后由均值不等式可以求得答案.

【解析】 $e_1+e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$

$$\geqslant\sqrt{\frac{2b}{a}}+\sqrt{\frac{2a}{b}}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

【说明】 这道题考查的主要知识点是双曲线和离心率，以及均值不等式.在此题的解答过程中，均值不等式起的是解题“工具”的作用.

7. (2000年培训题)函数 $y=\sin^{12}x+\cos^{12}x$ 的值域是_______.

【分析】 因为可以把 $\sin^{12}x$ 变形为 $(\sin^4x)^3$，$\cos^{12}x$ 变形为 $(\cos^4x)^3$，所以可以考虑构造三维均值不等式求解.

【解析】 由均值定理知 $(\sin^4x)^3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\geqslant 3\sin^4x\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ ①

$$(\cos^4x)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3\geqslant 3\cos^4x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad ②$$

①+②得

$$\sin^{12}x+\cos^{12}x\geqslant\frac{3}{16}(\sin^4x+\cos^4x)-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}(1-2\sin^2x+\cos^2x)-\frac{1}{16}$$

$$\geqslant-\frac{1}{32}\sin^2 2x+\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{32}$$

显然 $y\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin^{12}x+\cos^{12}x$ 的值域是 $\left[\dfrac{1}{32},1\right]$，

故答案填 $\left[\dfrac{1}{32},1\right]$.

【说明】 这道题的解决运用了三维均值不等式性质，以及构造法的解题方法，把 $\sin^{12}x$ 变形为 $(\sin^4x)^3$，$\cos^{12}x$ 变形为 $(\cos^4x)^3$，然后构造三维均值不等式是解决这道题的关键.

8. (2000年培训题)若 $a>0,b>0$，则 ( )

A. $\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ B. $\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}\geqslant\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

C. $\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}\geqslant a+b$ D. $\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}\geqslant a^2+b^2$

【分析】 由均值不等式，可知 $\dfrac{\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^3}\cdot\left(\dfrac{a}{b^3}\right)^3}=\dfrac{1}{b^2}$，同理，可得另一个不等式，然后比较，可以选出正确的答案.

【解析】 因为 $\dfrac{\dfrac{b}{a^3}+\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^3}\cdot\left(\dfrac{a}{b^3}\right)^3}=\dfrac{1}{b^2}$ ①

且 $$\frac{\frac{a}{b^3}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^3}}{4}\geqslant\frac{1}{a^2}.\quad ②$$

①＋②得 $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

故答案选 B.

【说明】 这道题的解决运用了四维均值不等式性质，以及构造法的解题方法，根据选项的形式构造均值不等式是解答此题的关键.

9. (补充例题)将一块边长为 a 的正方形铁皮，剪去四个角(四个全等的正方形)，做成一个无盖的铁盒，要使其容积最大，剪去的小正方形的边长为多少？最大容积是多少？

【分析】 如图 1－1 所示，设剪去的小正方形的边长为 x，列出容积的等式，然后由均值不等式可以求出最大容积.

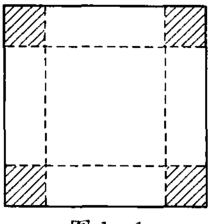

图 1－1

【解析】 如图 1－1 所示，设剪去的小正方形的边长为 x，

则其容积为 $V=x(a-2x)^2, 0<x<\frac{a}{2}$，

$$V=\frac{1}{4}\times 4x\times(a-2x)(a-2x)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right]^3=\frac{2a^3}{27}$$

当且仅当 $4x=a-2x$ 即 $x=\frac{a}{6}$ 时取“＝”，即当剪去的小正方形的边长为 $\frac{a}{6}$ 时，铁盒的容积最大，容积为 $\frac{2a^3}{27}$.

【说明】 这道题考查的知识点有长方体的体积，以及三维均值不等式. 将体积等式变形并运用三维均值不等式表示出最大容积形式是解此题的关键.

10. (2002 年第 2 试)从半径为 1 的圆铁片中去掉一个半径为 1、圆心角为 x 的扇形，将余下的部分卷成无盖圆锥.

(1) 用 x 表示圆锥的体积 V；

(2) 求 V 的最大值.

【分析】 这是一道圆锥侧面展开图的试题，余下扇形的弧长和半径分别为圆锥的底面周长和母线长，由此很容易用 x 表示圆锥的体积 V；在求 V 的最大值的时候，用三维均值不等式可以求得.

【解析】 (1) 设卷成的无盖圆锥体的底面半径为 r，高为 h，

则有　$2\pi-x=2\pi r, V=\frac{1}{3}\pi r^2h, r^2+h^2=1$，

其中　$0<x<2\pi, 0<r<1, 0<h<1$，

所以　$x=2\pi(1-r), r=1-\frac{x}{2\pi}, h=\sqrt{1-r^2}$，

所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2\cdot\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

$$=\frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)}$$

所以 $V=\frac{(2\pi-x)^2}{24\pi^2}\sqrt{x(4\pi-x)}\,(0<x<2\pi)$.

(2) 由(1)知, $V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}\,(0<r<1)$

$$=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{r^2\cdot r^2\cdot(2-2r^2)}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r^2+r^2+2-2r^2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

其中,当 $r^2=2-2r^2$,即 $r^2=\frac{2}{3}$ 时,也即 $x=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$时,$V$ 取得最大值,

所以 V 的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$.

【说明】 这道题考查的知识点有圆锥侧面展开图,以及三维均值不等式的应用. 第(1)问的解答并不难,只需套用公式. 对于第(2)问的解答,运用三维均值不等式是解题的关键.

趋势预测

近八年的希望杯试题中,本讲知识属于考查的重点内容,但不是考查的热点内容,尤其近来的连续几年,涉及本讲知识的试题较少见. 综观历年希望杯试题,考查的题型涉及选择题、填空题和解答题,其中大多是选择题和填空题. 考查范围不拘泥单纯的均值不等式知识,而往往和其他章节的知识相结合,试题难度一般在中档. 解决这些题时,均值不等式成立的条件是关键和重点.否则就有可能出错.

根据历年考查的情况分析,预计今后的考查仍将延续以往的形式:着重考查代数式的取值范围及相关的实际应用问题;着重考查函数的值域问题;着重考查不等式的推理与证明;还有可能考查均值不等式与三角函数、圆锥曲线、立体几何等知识的整合问题. 在冲刺复习中这些问题都需引起注意,尤其要注意均值不等式使用时的恰当变形以及均值不等式的适用条件.

针对模型

1. 已知 $x>0$,则函数 $y=x+\dfrac{4}{x+1}$ 的最小值是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\sqrt{17}-1$

2. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1$,则 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}$ 的最小值是　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

3. 已知 $x<\dfrac{5}{4}$,则函数 $y=4x-1+\dfrac{4}{4x-5}$的最大值等于　(　　)

A. 0　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. 2　　D. 9

4. 函数 $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}(x\in\mathbf{R})$的最小值等于　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 已知 $x,y\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,且 $xy=1$,则$\dfrac{2}{2-x^2}+\dfrac{4}{4-y^2}$ 的最小值是　(　　)

A. $\dfrac{20}{7}$　　B. $\dfrac{12}{7}$　　C. $\dfrac{16+4\sqrt{2}}{7}$　　D. $\dfrac{16-4\sqrt{2}}{7}$

6. $\max\min\left\{a,b,\dfrac{1}{a^2+b^2}\right\}$的值为________.

7. 已知 $x>3$,则函数 $y=2x+\dfrac{8}{x-3}$ 的最小值等于________.

8. 当 $x>-1$ 时,求$\dfrac{x^2-3x+1}{x+1}$ 的最小值等于________.

9. 若 $x>0$,则函数 $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ 的最大值等于________.

10. 对一切实数 x,所有的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<b)$的值均为非负实数,则 $\dfrac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值是________.

11. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$,且 $a+b=1$,求 $y=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$的最小值.

12. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,且满足 $\dfrac{kabc}{a+b+c}\geqslant(a+b)^2+(a+b+4c)^2$,求 k 的最小值.

13. 设 x,y,z 为正实数,求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{(1+2x)(3y+4x)(4y+3z)(2z+1)}{xyz}$ 的最小值.

14. 设 $a,b,c\in(1,+\infty)$,求证:$2\left(\dfrac{\log_b a}{a+b}+\dfrac{\log_c b}{b+c}+\dfrac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$.

15. 对于正整数 n,求证:$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

16. 求证:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}$.

17. 已知 $a>0,b>0,c>0,abc=1$,试证明:

(1) $\dfrac{a+b+c}{a^2(b+c)}+\dfrac{a+b+c}{b^2(a+c)}+\dfrac{a+b+c}{c^2(a+b)}\geqslant\dfrac{9}{2}$.

(2) $\dfrac{1}{a^2(b+c)}+\dfrac{1}{b^2(a+c)}+\dfrac{1}{c^2(a+b)}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

18. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$,求证:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

19. 是否存在最小的正整数 t,使得不等式 $(n+t)^{n+t}>(1+n)^3n^nt^t$ 对任何正整数 n 恒成立,证明你的结论.

20. 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 为正数,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$,求证:

(1) $\left(1+\dfrac{1}{a_1^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{a_2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{a_n^2}\right)\geqslant(1+n^2)^n$.

(2) $\dfrac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\dfrac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\dfrac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\dfrac{n}{2n-1}$.

第 2 讲　不等式解法与证明

考题再现

1. (2008 年第一试)设 p: $\log_{\frac{1}{2}}(2|x|-1)>0$;$q$:$\dfrac{x^2-2}{4x^2-1}<0$,则 p 是 q 的　(　　)

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【分析】 将 p、q 命题所对的不等式的解求出,即可判断两者之间的逻辑关系.

【解析】 命题 p:由 $\log_{\frac{1}{2}}(2|x|-1)>0$ 得:$0<2|x|-1<1$,解得 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<1$;

命题 q:$\dfrac{x^2-2}{4x^2-1}<0\Leftrightarrow(x^2-2)(4x^2-1)<0\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}<x^2<2$,解得 $-\sqrt{2}<x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<\sqrt{2}$,命题 p 的范围对应的集合是命题 q 的范围对应的集合的真子集,所以 p 是 q 的充分但不必要条件

故答案选 A.

【说明】 本题以解不等式为模型,考查充要条件的判断.对数不等式和分式不等式应转化为整数不等式之后再解,至于充要条件的判断可以转化为所解得不等式的解集的子集关系的问题.

2. (2008 年第一试)已知函数 $f(x)=x^2-(p+1)x+2p+1$,如果对于闭区间 $[-1,1]$ 中的任意 p 值,都有 $f(x)>0$,那么 x 的取值范围为________.

【分析】 因为不等式 $x^2-(p+1)x+2p+1>0$ 对于 p 在 $[-1,1]$ 上恒成立,所以应该转化为 $g(p)_{\min}>0$.

【解析】 设 $g(p)=x^2-(p+1)x+2p+1=(2-x)p+x^2-x+1$,所以原命题转化为

$$g(p)_{\min}>0,\text{只需}\begin{cases}g(1)>0\\g(-1)>0\end{cases},\text{即}\begin{cases}g(1)=p+1>0\\g(-1)=3p+3>0\end{cases},\text{解得 }p>-1.$$

【说明】 关于不等式恒成立的问题，应该转化为相应的函数的最值问题. 本题将不等式转化为 $g(p)$，但该函数是一次函数，所以只需端点值的函数值大于零即可.

3. (2008 年第二试)如果对于任意实数 x，都有 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2008|\geqslant m$，那么实数 m 的最大值是 ( )

A. 1003×1004　　B. 1004^2　　C. 1003×1005　　D. 1004×1005

【分析】 由于题目所给不等式为绝对值不等式，所以该恒成立问题需要转化为绝对值函数的最值.

【解析】 设 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2008|$，所以原命题转化为 $f(x)_{\min}\geqslant m$，

$f(x)$的几何意义：数轴上任意一点到(1,0)，(2,0)，…，(2008,0) 这些点的距离之和.

显然当 $x\in[1004,1005]$时，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-1004)+(1005-x)+(1006-x)+\cdots\\&\quad+(2008-x)\\&=(1005+1006+\cdots+2008)-(1+2+3+\cdots+1004)\\&=\frac{1004\times3013}{2}-\frac{1004\times1005}{2}=1004^2\end{aligned}$$

则 m 的最大值为 1004^2.

故答案选 B.

【说明】 对于求含多个绝对值符号的函数的最值问题，可以用分类讨论法去掉绝对值符号，也可以用几何意义来解决.

4. (2008 年第二试)设 $a>0$，若不等式$\sqrt{x}>ax+\frac{1}{2}$ 的解集为$(b,4)$，则 $a+b$ 的值为 ( )

A. $\frac{19}{8}$　　B. $\frac{35}{8}$　　C. $\frac{25}{24}$　　D. $\frac{59}{72}$

【分析】 本题所给不等式解集，将其转化为对应不等式的根，从而求解 a,b 的值.

【解析】 设 $\sqrt{x}=t\geqslant0$，则原不等式转化为 $t>at^2+\frac{1}{2}$ 的解集为$(\sqrt{b},2)$，所以$\sqrt{b}$，2 是方程 $at^2-t+\frac{1}{2}=0$ 的两根，即$\begin{cases}\sqrt{b}+2=\frac{1}{a}\\2\sqrt{b}=\frac{1}{2a}\end{cases}$，所以 $a=\frac{3}{8}$，$b=\frac{4}{9}$，则 $a+b=\frac{59}{72}$.

【说明】 对于一类无理不等式可以用转化法将其转化为二次不等式，要注意不等式的解集端点和对应方程的根.

5. (2003 年第二试)不等式 $x-2-|x^2-4x+3|\geqslant0$ 的解集是 ( )

A. $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$　　　D. $\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

【分析】 通过定义将绝对值不等式转化为二次不等式.

【解析】 原不等式转化为 $2-x\leqslant x^2-4x+3\leqslant x-2$，解得$\begin{cases}\frac{5-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5+\sqrt{5}}{2}\\ x\leqslant\frac{3-\sqrt{5}}{2}\text{ 或 }x\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，所以原不等式解集为$\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$.

故答案选 A.

【说明】 绝对值不等式 $|f(x)|\leqslant g(x)$ 等价为 $-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 不等式组，无需对 $g(x)$ 是否大于零作讨论.

6.（2003 年第二试）若 $a\leqslant-1$，则不等式 $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\geqslant a$ 的解是________.

【分析】 本题需要对 x 的正负进行讨论以去掉不等式中的分母.

【解析】 当 $x>0$ 时，原不等式转化为 $\sqrt{x^2-1}\geqslant ax$，因为 $ax<0$，所以此时只需 $x^2-1\geqslant0$，又 $x>0$，所以 $x\geqslant1$；当 $x<0$ 时，原不等式转化为 $\sqrt{x^2-1}\leqslant ax$，即 $(1-a^2)x^2\leqslant1$，因为 $a\leqslant-1$，此时 $(1-a^2)x^2\leqslant1$ 肯定成立，所以 $x\leqslant-1$，综上所述原不等式解为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

【说明】 分式不等式和无理不等式都要进行讨论和相应转化.

7.（1998 年第一试）若 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant2$，求证：$\frac{1}{2}\leqslant 2x^2+3xy+2y^2\leqslant7$.

【分析】 由 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant2$ 几何意义可以想到设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(1\leqslant r\leqslant\sqrt{2})$，下面只需进行三角运算即可.

【证明】 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(1\leqslant r\leqslant\sqrt{2})$，

则 $2x^2+3xy+2y^2=2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin\theta\cos\theta+2r^2\sin^2\theta=2r^2+\frac{3r^2}{2}\sin2\theta\leqslant\frac{7r^2}{2}\leqslant7$；

另一方面：$2x^2+3xy+2y^2=2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin\theta\cos\theta+2r^2\sin^2\theta$

$$=2r^2+\frac{3r^2}{2}\sin2\theta\geqslant\frac{r^2}{2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

【说明】 与圆、椭圆等相关的动点问题或者最值问题可以考虑进行三角代换.

8.（2002 年第二试）证明：当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{2}{3}ax+a^2+2\right)\leqslant-1$.

【分析】 直接由 $-1\leqslant x\leqslant1$，很难向下推理，可以考虑分析法.

【解析】 要证：$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{2}{3}ax+a^2+2\right)\leqslant-1$，