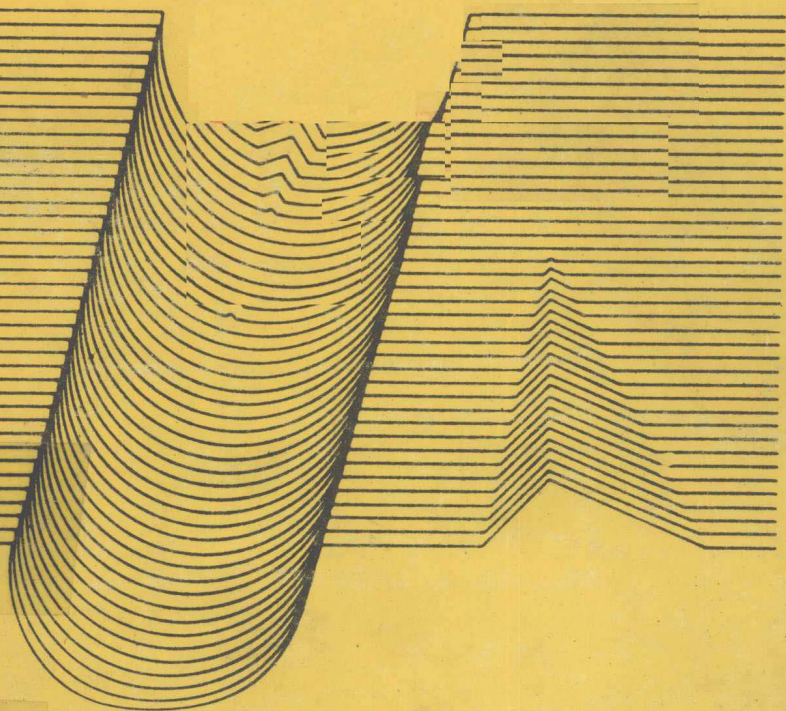


研究生教材

控制与信息理论 矩阵基础

江崇礼 编著



大连理工大学出版社

研究生教材

控制与信息理论矩阵基础

江 崇 礼 编著

大连理工大学出版社

内 容 简 介

本书论述了控制理论与信息论的矩阵基础,主要介绍了由于控制理论和信息论的需要,而在近代发展起来的新的矩阵理论。全书共分十章,第一章高矩阵是后面有关章节的基础,第二章至第九章阐述广义逆,克罗内克积,矩阵范数,矩阵谱分解,奇值分解,矩阵函数,矩阵方程式与多项式矩阵等内容。最后一章介绍群、环、域的基础知识,该章目的旨在为读者学习编码理论奠定数学基础。

本书可作为自动控制,信息处理等专业的研究生教材。也可供从事控制理论与控制工程、信息论与信息处理、系统理论与系统工程等学科的科研工作者和工程技术人员参考。

控制与信息理论矩阵基础

Kongzhi Yu Xinxi Lilun Juzhen Jichu

江 崇 礼 编 著

大连理工大学出版社出版发行

(大连市甘井子区凌水河)

大连理工大学印刷厂印刷

开 本: 787 × 1092 1/32

印 张: 5.75

字 数: 124 千字

1990年10月第1版

1990年10月第1次印刷

印 数: 0001—1000 册

责任编辑: 尉迟喆斐

责任校对: 玉 洁

封面设计: 葛 明

ISBN 7-5611-0334-4/TP·25

定价: 1.18 元

前 言

作者近年来在科研和研究生教学中深深感到，仅仅具备大学本科线性代数基础的工科研究生，学习控制理论与信息论课程时，在矩阵理论方面遇到了许多困难。控制理论与信息论所涉及到的矩阵基础，大多是近代发展起来的矩阵理论的新领域，而这些领域在工科大学线性代数课程中是涉及不到的。要全面详细地介绍这些领域，需要浩瀚的篇幅，本书从工科研究生教学实际出发，尽可能全面而简洁地介绍这些领域，为减轻读者学习的困难，对一些繁难的定理，作者都以大学的线性代数为基础，重新做出了简明的证明。本书是作者在近年来科研和研究生教学的基础上编写出来的。

由于控制理论和信息论而涉及的矩阵领域广、内容新以及作者水平所限，难免挂一漏万，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

本书在编写过程中得到了王宏禹教授、纪传礼教授等的热情支持，对此也一并致谢。

作 者

1990.5.26 于大连理工大学

目 录

第一章 高矩阵	(1)
§ 1-1 高矩阵的定义	(1)
§ 1-2 高矩阵的有关定理	(1)
习题一	(9)
第二章 广义逆及其应用	(11)
§ 2-1 引言	(11)
§ 2-2 高矩阵的右逆与左逆	(12)
§ 2-3 一般矩阵的广义逆 A^-	(16)
§ 2-4 广义逆 A^- 的性质	(19)
§ 2-5 广义逆 A^- 在解线性方程组中的应用	(21)
§ 2-6 相容线性方程组的最小范数解	(22)
§ 2-7 不相容方程组的最小二乘解	(27)
§ 2-8 Moore-Penrose 广义逆	(30)
习题二	(34)
第三章 克罗内克直积	(35)
§ 3-1 定义与性质	(35)
§ 3-2 行展开及列展开	(36)
习题三	(38)

第四章 向量与矩阵的范数.....	(39)
§ 4-1 向量范数.....	(39)
§ 4-2 矩阵范数.....	(48)
习题四.....	(53)
第五章 特征值、特征向量与矩阵的谱分解.....	(55)
§ 5-1 关于特征值和特征向量的一些定理.....	(55)
§ 5-2 两个二次型的同时对角变换.....	(57)
§ 5-3 特征值的上限与下限.....	(60)
§ 5-4 Toeplitz 矩阵.....	(66)
§ 5-5 矩阵的谱分解.....	(69)
习题五.....	(76)
第六章 矩阵的奇值与奇值分解.....	(77)
§ 6-1 方阵的三角形分解.....	(77)
§ 6-2 矩阵的奇值与奇值分解.....	(83)
§ 6-3 矩阵的 $QR(QL)$ 分解.....	(86)
习题六.....	(88)
第七章 矩阵函数.....	(89)
§ 7-1 方阵的无穷级数与解析函数.....	(89)
§ 7-2 特征多项式与 Cayley-Hamilton 定理.....	(92)
§ 7-3 Cayley-Hamilton 定理的应用.....	(95)
习题七.....	(101)
第八章 矩阵方程式.....	(103)

§ 8-1	关于微分方程的预备知识.....	(103)
§ 8-2	线性方程式.....	(106)
§ 8-3	矩阵 Riccati 方程.....	(115)
	习题八.....	(132)
第九章	多项式矩阵	(135)
§ 9-1	多项式矩阵的初等运算.....	(135)
§ 9-2	多项式向量的线性相关.....	(137)
§ 9-3	单位模阵.....	(140)
§ 9-4	多项式矩阵的互素性.....	(141)
	习题九.....	(156)
第十章	群、环、域	(158)
§ 10-1	群.....	(158)
§ 10-2	子群.....	(162)
§ 10-3	陪集与拉格朗日定理.....	(163)
§ 10-4	代码与群码.....	(164)
§ 10-5	环和域.....	(169)
	习题十.....	(174)
	参考文献.....	(176)

第一章 高 矩 阵

高矩阵是非奇异方阵的推广，非奇异矩阵虽然很重要，但由于其正方形的约束，使其在应用上受到不少限制。而高矩阵可灵活地应用到许多方面，它对于信息处理与控制工程中的矩阵问题，将会带来很多方便。

§ 1-1 高矩阵的定义

定义 1 秩数等于列数的矩阵叫高矩阵。

定义 2 秩数等于行数的矩阵叫矮矩阵。

高矩阵的行数只能大于或等于列数，其外表有“高”的形式，故有高矩阵之称。与之对应，矮矩阵的行数只能小于或等于其列数，外表有“矮”的形式，故有矮矩阵之称。

§ 1-2 高矩阵的有关定理

定理 1 下列诸命题相互等价

- (i) $G_{m \times r}$ 是高矩阵；
- (ii) 存在矩阵 H ，使 $(G \ H)$ 非奇异；
- (iii) 存在矩阵 K ，使 $K^T G = I_{r \times r}$ ，

其中， H, K 必为高矩阵。

证明 首先我们证 (i) $\Rightarrow$ (ii)

把 G 按行分块而记为

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

由于 $G_{m \times r}$ 是高矩阵, 故 G 中必有一个 r 阶子式非零。设此子式为

$$\Delta = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i_1} \\ \mathbf{g}_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{i_r} \end{bmatrix} \right| \neq 0 \quad (2)$$

即 G 中必存在 r 个行向量 $\mathbf{g}_{i_1}, \mathbf{g}_{i_2}, \dots, \mathbf{g}_{i_r}$ 是线性独立的。

现在我们来构造一个 $m \times (m-r)$ 的矩阵 H , 其中 H 的第 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行均为 0 行向量, 而其余的 $m-r$ 行与 I_{m-r} 的 $m-r$ 行一致。显然, H 是一个 $m \times (m-r)$ 高矩阵 (因 H 的列数是 $m-r$, 且 H 中又有一个 $m-r$ 阶子式 $|I_{m-r}| = 1 \neq 0$)。

为表达清楚, 不妨把 (G, H) 的各行重新排列 (其行列式的绝对值不变), 则 (G, H) 重新排列后, 具有下列形式 (G, H) 。

$$(G, H)_* = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{g}_{i_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{g}_{i_r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{g}_{j_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{g}_{j_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{g}_{j(m-r)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

显然, $(G, H)_*$ 的各行是线性独立的, 且
 $|\det|(G, H)_*| = \det(G, H) \neq 0$,
 故 (G, H) 为非奇异阵。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) .

由于 (G, H) 非奇异, 存在 $(G, H)^{-1}$, 把它按行分块记为

$$(G, H)^{-1} = \begin{bmatrix} K^T \\ L^T \end{bmatrix}'_{m-r} \quad (4)$$

则由

$$\begin{aligned} I_m &= (G, H)^{-1} (G, H) \\ &= \begin{bmatrix} K^T \\ L^T \end{bmatrix} (G, H) = \begin{bmatrix} K^T G & K^T H \\ L^T G & L^T H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

可知

$$K^T G = I_r$$

由 (4) 式可知, K^T 为矮矩阵, 故 K 为高矩阵。

(iii) $\Rightarrow$ (i) .

$$\text{由 } K^T G = I_r, (G = G_{m \times r}) \quad (6)$$

可知

$$r = \text{rank}(K^T G) \leq \text{rank}(G) \leq \min\{m, r\}$$

已知

$$G \text{ 的列数} = I_r \text{ 的列数} = r$$

故必有

$$\text{rank}(G) = r = G \text{ 的列数}.$$

即 G 为高矩阵,

将 (6) 两边转置得

$$G^T K = I_r$$

同理可证, K 必为高矩阵。 ■

定理 2 若 $G_{m \times r}$ 为高矩阵, 则存在高矩阵 $H_{m \times (m-r)}$, 使 $G^T H = O_{r \times (m-r)}$; 又若有 $G^T X = 0$, 且

$$X \text{ 的列数} > m-r$$

则 X 必是非高矩阵。

证明 由定理 1 可知, 存在 G_1 , 使得 (G, G_1) 非奇异,

令
$$(G, G_1)^{-1} = \begin{bmatrix} K^T \\ H^T \end{bmatrix}_{m-r}$$

则由

$$|K, H| = \begin{vmatrix} K^T \\ H^T \end{vmatrix} \neq 0$$

可知 H 为高矩阵 (H 为 $m \times (m-r)$ 矩阵)。

再由

$$I_m = \begin{bmatrix} K^T \\ H^T \end{bmatrix} (G, G_1) = \begin{bmatrix} K^T G & K^T G_1 \\ H^T G & H^T G_1 \end{bmatrix}$$

可知 $H^T G = 0 \Rightarrow G^T H = 0$ 。

由 (G, G_1) 非奇异可知 $\begin{bmatrix} G^T \\ G_1^T \end{bmatrix}$ 非奇异, 再由已知条件 $G^T \dot{X} = 0$, 可知

$$\begin{bmatrix} G^T \\ G_1^T \end{bmatrix}_{m-r} X = \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}_{m-r}$$

由 $\begin{bmatrix} G^T \\ G_1^T \end{bmatrix}$ 的非奇异

则

$$\text{rank}(X) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \leq m-r$$

所以, 当 X 的列数 $> m-r$ 时, X 必非高矩阵。 ■

定理 3 若 G, H 均为高矩阵, 则对任意矩阵 A , 有

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(GA) = \text{rank}(AH^T) = \text{rank}(GAH^T).$$

证明 令 $B = GA$, 则

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$$

根据定理1, 则必存在高矩阵 K , 使得

$$K^T G = I$$

于是

$$K^T B = K^T GA = I A = A$$

故

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$$

所以

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(GA)$$

同理可证

$$\text{rank}(AH^T) = \text{rank}(HA^T) = \text{rank}(A)$$

综合上述结果, 自然有

$$\text{rank}(GAH^T) = \text{rank}(AH^T) = \text{rank}(A).$$

定理 4 设 A 为任意矩阵, 且 $\text{rank}(A) = r$, 当且仅当存在两个秩为 r 的高矩阵 G, H , 使得

$$A = GH^T.$$

证明 充分性: 当 $A = GH^T$ 时, 由定理 3 可知

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(GH^T) = \text{rank}(H^T) = r = \text{rank}(G)$$

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 则必存在非奇异矩阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

令

$$P^{-1} = (G, K), Q^{-1} = \begin{bmatrix} H^T \\ L^T \end{bmatrix}^T$$

则 G, H 均为高矩阵, 且

$$\text{rank}(G) = \text{rank}(H) = r$$

故 $A = (G, K) \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T \\ L^T \end{bmatrix} = GH^T.$ ■

定理 5 若高矩阵 G, H, G_1, H_1 满足等式

$$GH^T = G_1 H_1^T \quad (7)$$

则必有非奇异矩阵 P , 使得

$$GP = G_1, P^{-1} H^T = H_1^T \quad (8)$$

证明 设 G 的秩为 r , 则由定理 3 及式 (7) 可知 H, G_1, H_1 的秩均为 r , 再由定理 1 可知, 必有列数为 r 的高矩阵 K, L, M , 使

$$K^T G = L^T H = M^T H_1 = I_r \quad (9)$$

(9) 式两边转置, 则有

$$H^T L = H_1^T M = I_r \quad (10)$$

将 (9) 式乘式 (10) 有

$$K^T GH^T L = I_r \quad (11)$$

将 (7) 式代入 (11) 式左边, 则

$$K^T GH^T L = K^T G_1 H_1^T L = I_r \quad (12)$$

令

$$P = K^T G_1 \quad (13)$$

则 P 为非奇异阵, 且其逆为

$$P^{-1} = H_1^T L \quad (14)$$

由 (13), (10), (7), (9), 则有

$$\begin{aligned} GF &= GK^T G_1 = GK^T G_1 H_1^T M = GK^T GH^T M \\ &= GH^T M = G_1 H_1^T M = G_1 \end{aligned} \quad (15)$$

进一步, 将 (15) 代入 (7) 式右边

$$GH^T = GPH_1^T \quad (16)$$

两边左乘 K^T , 则

$$K^T GH = H^T = K^T GPH_1^T = PH_1^T$$

$$H_1^T = P^{-1} H^T. \quad \blacksquare$$

定理 5 是对定理 4 的进一步补充, 它说明在某种意义上, 矩阵 A 的分解具有唯一性, 即在 A 的两种不同分解中, 其因子间只差一个非奇异矩阵。

定理 6 $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

证明 设 $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$

根据定理 4, 必存在高矩阵 G, H, G_1, H_1 , 使得

$$A = GH, \quad B = G_1 H_1^T$$

故有

$$(A+B) = (G, G_1) \begin{bmatrix} H^T \\ H_1^T \end{bmatrix}$$

从而

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(G, G_1) \leq r+s = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

推论 1 $\text{rank}(A-B) \geq \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$

证明 由定理 6, 及 $A = (A-B) + B$ 可知

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A-B) + \text{rank}(B)$$

即

$$\text{rank}(A-B) \geq \text{rank}(A) - \text{rank}(B). \quad \blacksquare$$

定理 7 对任意矩阵 A , 恒有

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A) \quad (17)$$

证明 设 $\text{rank}(A) = r$, 则根据定理 4, 必存在秩为 r 的高矩阵 G, H , 使得

$$A = GH^T$$

再根据定理 3

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(HG^T GH^T) = \text{rank}(G^T G) \quad (18)$$

把 G 按行分块记为

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

则 $G^T G$ 可表示为

$$G^T G = [\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_2^T \cdots \mathbf{g}_m^T] \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i \quad (20)$$

因 G 是高矩阵，则必可在其中 m 行中找出线性独立的 r 行，不妨记为 $\mathbf{g}_{i_1}, \mathbf{g}_{i_2}, \dots, \mathbf{g}_{i_r}$ ，将 (19) 式右边各行重新排列，得

$$G_* = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i_1} \\ \mathbf{g}_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{i_r} \\ \mathbf{g}_{j_1} \\ \mathbf{g}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{j(m-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_i \\ \cdots \\ G_j \end{bmatrix}$$

其中，

$$G_i = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i_1} \\ \mathbf{g}_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{i_r} \end{bmatrix}, \quad G_j = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j_1} \\ \mathbf{g}_{j_2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{j(m-r)} \end{bmatrix}$$

则 G_i 是非奇异方阵。

$$\begin{aligned}
G_*^T G_* &= [G_i^T \quad G_j^T] \begin{bmatrix} G_i \\ G_j \end{bmatrix} \\
&= G_i^T G_i + G_j^T G_j \\
&= \sum_{k=1}^r \mathbf{g}_{ik}^T \mathbf{g}_{ik} + \sum_{k=1}^{m-r} \mathbf{g}_{jk}^T \mathbf{g}_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i \\
&= G^T G.
\end{aligned}$$

因 G_i 是非奇异方阵，则必有

$$G_i^T G_i > 0$$

即 $G_i^T G_i$ 是正定方阵，又因 $G_j^T G_j \geq 0$

故 $G_*^T G_* = G_i^T G_i + G_j^T G_j > 0$

因而

$$G^T G = G_*^T G_* > 0,$$

即 $G^T G$ 是正定阵， $G^T G$ 也是满秩阵

$$\text{rank}(G^T G) = r$$

再由 (18) 式，有

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(G^T G) = r = \text{rank}(A)$$

推论 2 $\text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A)$

推论 3 若 A 为高矩阵，则 $A^T A$ 为非奇异矩阵。

推论 4 若 A 是矮矩阵，则 AA^T 为非奇异矩阵。

习 题 一

1. 如果 A 是反对称矩阵，则有实高矩阵 G 及非奇异反对称阵 A_1 ，使

$$A = G A_1 G'$$

2. 任意 n 阶实矩阵可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和。

3. 设有一个线性方程组如下

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

证明 如果 A 是一个高矩阵, 则此方程只有唯一解 $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

4. 设 A 为实对称矩阵, 求证:

$$A = 0 \iff A^2 = 0$$

5. 设 A, B 均为 n 阶对称矩阵, 证明:

$$AB \text{ 为对称} \iff AB = BA$$

6. 证明: 对任意实高矩阵 G 恒有: $G^T G$ 为非奇异对称阵。

7. 设 A 为非零的实对称阵, 则 $A^2 = A$, 当且仅当存在高矩阵 G , 使

得
$$A = G(G^T G)^{-1} G^T$$