

高等学校教材

水轮机调节

(第二版)

河海大学 沈祖诒 主编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书是高等学校“水轮机调节”课程的教材。

本书主要内容有：自动控制理论简介；水轮机调节系统基本工作原理；机械液压型和电气液压型调速器的结构和接线；调速器和调节对象的动态特性；水轮机调节系统稳定性、动态品质和参数整定；调节保证计算；水轮机调节系统计算机辅助分析；调节设备选型、调整和试验。

本书亦可供从事水轮机调节系统设计、制造、安装、调试及运行等方面的技术人员参考。

高等学校教材 水 轮 机 调 节 (第二版)

河海大学 沈祖诒 主编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 23.75印张 543千字 2插页

1981年4月初版

1988年11月第二版 1988年11月北京第三次印刷

印数10141—16240册 定价5.05元

ISBN 7-120-00409-3/TV·153

第一版前言

本书是根据1978年召开的“水电站动力设备”专业座谈会的精神及在“水轮机调节”教材编写会上制定的大纲编写的。

全书主要内容有：水轮机调节系统的基本概念及工作原理；机械液压型及电气液压型调速器的结构和结线及其运动方程；自动调节理论简介；水轮机调节系统稳定性及动态品质分析；水轮机调节保证计算近似算法及用数字计算机的电算法；调节设备的选型、调整和试验。

本书除可作专业教材外，也可作为从事水轮机调节系统设计、制造、安装、调试和运行等方面的技术人员的参考书。本书所述内容均有一定的独立性，读者可根据需要选读其中有关的部分。

第一、二、八、九章及第十章第一节由华东水利学院沈祖诒、严亚芳编写；第三、四章、第十章二至六节及附录由武汉水利电力学院刘炳文、黄奕华编写；第五、六、七章由华北水利水电学院陈嘉谋编写。全书由沈祖诒主编。

本书由华中工学院刘育骥教授主审，参加审稿的还有华中工学院文辅湘、沈宗树、张昌期、李敬恒、邓家祺、魏守平等同志。审稿的同志对全书提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，希望读者批评指正。

第二版前言

本书是根据1983年10月高等学校“水动专业”西安会议拟订的《水轮机调节》大纲进行修订的。修订时，针对水动专业培养目标并考虑水轮机调节理论和技术的发展，调整了章目，丰富充实了内容。

修订中把自动控制理论介绍放到第一章，增加了根轨迹法等内容，并以此作为全书的基础。由于新建大型水电站不再使用机械液压型调速器，机械液压型调速器一章改为以YT型调速器为典型对象，并强调了液压放大装置工作原理。电气液压型调速器一章得到加强，引入了若干电调技术中的新发展，如数字测频等；并且扼要但全面地介绍了电气液压型调速器的调整试验。在水轮机调节系统动态特性分析中，应用了控制原理的基本方法：频率响应法和根轨迹法；并给出了确定调速器参数的基本方法。除了大波动过渡过程电算法外，较详尽地阐述了水轮机调节系统的仿真计算。

本书第一、六章由陕西机械学院陈嘉谋编写；第二、八章由河海大学严亚芳编写；第三、七、九章由河海大学沈祖诒编写；第四、五、十章由武汉水利电力学院刘炳文编写。全书由沈祖诒主编。

本书由华中工学院刘育骥教授主审，陈瑞甜等参加审稿。

在本书修订过程中清华大学、华中工学院、华北水利水电学院、云南工学院和江西工学院水利分院等兄弟院校从事《水轮机调节》课程教学工作的同志，对本书修订提出了许多宝贵的意见，在此表示感谢。

由于编者水平有限，在修订过程中仍会有不当和错误之处，敬希广大读者批评指正。

编 者

1987年11月

目 录

第一版前言

第二版前言

第一章 自动控制理论简介	1
第一节 系统的数学模型	1
第二节 传递函数与瞬态响应	5
第三节 频率响应	16
第四节 反馈控制系统	28
第五节 控制系统的稳定性	39
第六节 根轨迹法	46
第七节 控制系统校正	56
第二章 水轮机调节系统工作原理	68
第一节 水轮机调节的任务与特点	68
第二节 水轮机调节系统原理简图	75
第三节 机组并列工作的静态分析	87
第三章 机械液压型调速器	92
第一节 离心摆	92
第二节 液压放大装置	99
第三节 暂态反馈	110
第四节 YT型调速器	115
第五节 T型调速器	119
第六节 ST型调速器	122
第七节 油压装置	125
第四章 电气液压型调速器	132
第一节 测频回路	132
第二节 校正回路	153
第三节 功率给定、调差及人工失灵区回路	158
第四节 综合放大回路	161
第五节 开度限制回路与成组调节	165
第六节 电气协联装置	167
第七节 电液转换器	174
第八节 JST型集成电路电气液压型调速器	179
第九节 DST-S型集成电路电气液压型调速器	183
第五章 调速器的动态特性	192
第一节 调速器的传递函数	192

第二节	调速器动态分析	200
第三节	调速器的内回路稳定性	210
第六章	调节对象动态特性	213
第一节	水轮机动态特性	214
第二节	引水系统动态特性	219
第三节	发电机一负载动态特性	225
第四节	并列运行机组的动态特性	230
第七章	水轮机调节系统动态特性及参数整定	235
第一节	水轮机调节系统动态特性	235
第二节	校正装置参数整定	258
第三节	水轮机调节系统参数整定	266
第八章	调节保证计算	271
第一节	调节保证计算的任务和标准	271
第二节	水击压力上升计算	272
第三节	转速上升计算	279
第四节	改善大波动过渡过程的措施	293
第五节	调节保证计算步骤与实例	296
第六节	调节设备选型	299
第九章	水轮机调节系统计算机辅助分析	305
第一节	水轮机调节系统大波动过渡过程计算	305
第二节	水轮机调节系统数字仿真	332
第十章	调速器的调整与试验	354
第一节	调速器主要回路和元件的调整试验	354
第二节	调速器的整机调整和静特性试验	360
第三节	水轮机调节系统的动态特性试验	364
第四节	水轮机调节系统故障分析	371
	主要参考文献	374

第一章 自动控制理论简介

水轮机调节系统是一个自动控制系统，水轮机调速器就是一个自动控制器。为了分析水轮机调节系统的工作和特性，本书首先介绍有关自动控制理论的基本知识和基本方法。

自动控制就是利用控制装置使机器或设备自动维持在所指定的工作状态或过程。比如利用水轮机调速器自动维持水轮发电机组转速在指定范围之内变化，就是水轮机转速的自动控制。这里被控制的机器或设备如水轮发电机组称为控制对象，控制装置如调速器称为控制器。控制器和控制对象组成一个系统，称为自动控制系统。

任何一个自动控制系统都是由许多元件或部件组成的。有的元件或部件，尽管它们在物理结构或工作原理上不同，但动态特性却可能是一样的，数学描述的形式也相同。这一类动态特性相同的元件或部件称为同一类动态环节。所有自动控制系统的元件或部件都可以用环节来归类划分，因此每一个自动控制系统都可以说是由若干个环节组成的。

第一节 系统的数学模型

一、系统的数学模型

要正确分析一个系统，首先必须建立这个系统各组成部分及整个系统的数学模型。所谓一个系统或部件的数学模型，就是指用来描述这个系统或部件各物理量之间关系（即动态特性）的数学表达式。

例如对水轮发电机组，为了分析其角速度 ω 随主动力矩 M_t 和负载力矩 M_e 变化的特性，根据刚体转动原理，可写出下述数学式

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_t - M_e$$

式中 J 为水轮发电机组转动部分的转动惯量。

上述数学表达式是一个微分方程，它就是水轮发电机组的数学模型。一个自动控制系统一般包括多个部件或部分，对于每个个别的部件或部分都可以根据支配该部件或部分的具体物理定律写出相应的微分方程式（代数方程也可认为是微分方程式各阶导数项的系数均为零时的特例），这些微分方程式的总和即微分方程组就是描述该系统的数学模型。

例如图1-1所示的RLC网络，可以根据电路的基本定律，写出下列两方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_2 = u_1 \quad (1-1)$$

$$C \frac{du_2}{dt} = i \quad (1-2)$$

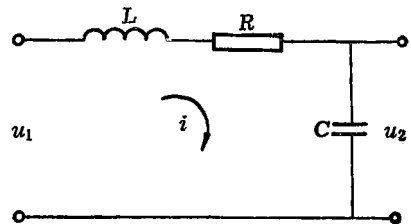


图 1-1 RLC网络

这两个方程式所组成的方程组就是描写RLC网络的数学模型。

如果系统只有一个输入变化量（输入量）和一个输出变化量（输出量），这种系统称为单输入单输出系统。如图1-1所示系统，以 u_1 为输入量， u_2 为输出量，就是一个单输入单输出系统，描述此系统的两个微分方程可以合并成一个一元二阶微分方程，其数学模型可表示为

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \quad (1-3)$$

一般地讲，对于单输入单输出系统，表示其特性的原始微分方程组可以整理成一个一元高阶的微分方程式，其一般形式如下

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y \\ & = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (1-4)$$

如果描述系统的微分方程中各项系数均为常数或仅仅是自变量 t 的函数，则微分方程称为线性微分方程，由这种方程所描述的系统称线性系统。

线性系统的最重要特征，是可以应用叠加原理，即如果有几个不同的输入量（也称作用函数）同时加到系统上，则系统的输出等于这几个输入量单独作用时的输出之和。这样线性系统就可以对各个输入单独处理，然后将结果进行叠加而得到综合输出，这将使问题的分析大为简化。

如果描述系统的微分方程的各项系数都是常数，也就是一个线性常系数微分方程，则这样的系统称为线性定常系统；如果线性微分方程的各项系数中至少有一个是时间的函数，则这样的系统称为线性时变系统。

上面所述的RLC网络，如果 R 、 L 、 C 不随时间变化，就是一个线性定常系统。

二、非线性系统及其线性化

如果系统的数学模型中包含有非线性微分方程，即其各项系数中至少有一项包含有系统某个变量（不是自变量 t ）的函数，如

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = A \sin \omega t \\ & \frac{d^2 y}{dt^2} + (y-1) \frac{dy}{dt} + y = x \frac{dx}{dt} + x^2 \end{aligned}$$

那么这样的系统称为非线性系统。

如果系统数学模型中包括有非线性方程，如

$$y = x^2 \quad \text{或} \quad y = \sin x$$

由于这种方程可作为非线性微分方程的特例，因此这样的系统也是非线性系统。

实际的系统都不是完全线性的。因为一个系统往往是由许多部件或部分组成的，其中可能存在一些非线性的因素。如有的部件有饱和特性；有的部件有死区；有的部件存在着平方律 $y = x^2$ 的关系等等（见图1-2）。对非线性系统不能应用叠加原理，而且对非线性系统在数学上的求解要比线性系统困难得多。

因此在实际应用上往往将非线性系统（或部件）近似地表示成线性系统，也就是将非线性系统加以“线性化”。下面介绍最简单、也是最常用的一种将非线性系统数学模型线性化的方法——微偏法。

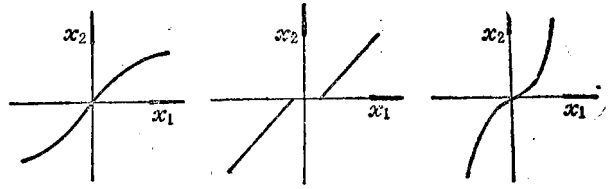


图 1-2 几种非线性特性曲线

假定系统变化只是在稳定工况点

附近某一小范围内变化（称小波动），输入量为 $x(t)$ ，输出量为 $y(t)$ ，其关系是线性的，表示为

$$y(t) = f[x(t)] \quad (1-5)$$

如在稳定工况点变量相应为 x_0 和 y_0 ，那么式（1-5）在该点附近可展开成泰勒级数

$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

式中 $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ 、 $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}$ ……是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的一阶，二阶……导数。

因为系统仅是在稳定工况附近一小范围内变化，即 $(x-x_0)$ 很小，故可略去 $(x-x_0)$ 的高阶项，得

$$y = y_0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \Delta x$$

式中 $y_0 = f(x_0)$ ； $\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ ； $\Delta x = x - x_0$ 。

也可写成

$$\Delta y = \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \cdot \Delta x \quad (1-6)$$

上式说明，在小波动情况下 Δy 和 Δx 成线性比例关系。方程式（1-6）就是由方程（1-5）定义的非线性系统的线性化数学模型。

如果非线性系统（或部件），其输出量是两个输入量的非线性函数，即

$$y = f(x_1, x_2) \quad (1-7)$$

要加以线性化，同样可将式（1-7）在稳定工况点 x_{10} 和 x_{20} 附近展开成泰勒级数

$$\begin{aligned} y = f(x_{10}, x_{20}) &+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_{20}) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_{10})^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

式中偏导数都是指稳定工况点上的值。同样，由于小波动，可以将高阶项略去，整理后得

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 \quad (1-8)$$

式中 $\Delta y = y - y_0 = f(x_1, x_2) - f(x_{10}, x_{20})$ ； $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ ； $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$

这种线性化方法应用较广，但须特别注意它仅适用于小波动的情况，否则可能导致很

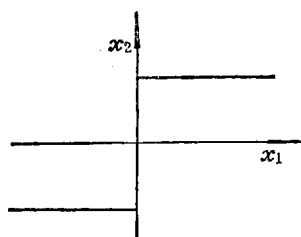


图 1-3 继电器型特性

大误差。如图 1-2 中所示的几种典型非线性特性，平方律关系就可按此方法线性处理；有死区的非线性特性，在死区不大时，一般可按没有死区来近似表示；对饱和和非线性特性，在小波动时可以不考虑其饱和部分。在经过线性化处理之后，非线性系统就可按线性系统来分析。

但是有些系统或部件的非线性是本质性的，如继电器特性（应称双位非线性）（图 1-3），这种非线性往往不能加以线性化。

三、状态方程简介

先看图 1-1 所示的 RLC 网络，其数学模型据式 (1-1) 和式 (1-2) 可以写成下列一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_2 + \frac{1}{L}u_1 \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C}i\end{aligned}$$

上述方程组又可改用矩阵的形式表示

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [u_1] \quad (1-9)$$

式 (1-9) 就是用一阶矩阵微分方程来描述 RLC 网络的数学模型，也称为状态方程。

下面介绍状态方程及其有关名词的定义。

状态变量：指能确定系统状态的最少的一组变量，即如果这几个变量确定了，系统的状态就唯一地被确定了。这几个变量就称为系统的状态变量。如上例中 i 和 u_2 就是一组状态变量，只要 $t = t_0$ 时的初始状态给定， $t \geq t_0$ 时的输入 u_1 给定，则在任意时刻 t 的 i 及 u_2 值便确定， RLC 网络的状态也就唯一地确定了。

状态向量：如果完全描述一个系统的状态需要几个状态变量，那么可将这些状态变量看作是向量 $\mathbf{x}(t)$ 的各个分量， $\mathbf{x}(t)$ ，就叫做状态向量。在上述例子中状态向量为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i \\ u_2 \end{bmatrix}$$

应该注意，状态变量并不一定是要在物理上可测量或可观察的量。此外，一个系统的状态变量也不是唯一的一组，只要满足能确定系统状态这个条件的任一组变量，都可以作为系统的状态变量。由于对某一系统来讲，状态变量不是唯一的，因此其状态向量也不是唯一的。

状态方程：采用状态向量通过一阶矩阵微分方程的形式来描述给定系统，这个矩阵微分方程就称为状态方程。它一般具有如下形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1-10)$$

式中 x ——状态向量;

A 、 B ——系数矩阵, 对于线性定常系统, A 和 B 是常数矩阵;

u ——输入变量组成的输入向量, 对于单输入量的系统, 输入向量实际只有一个输入变量 u 。

就普遍的意义来讲, 系统的输出量不一定是状态变量, 因此输出量可另用一个代数方程表示

$$y=Cx \quad (1-11)$$

式中 C 也是一系数矩阵, 对于线性定常系统, C 也是一个常数矩阵, 上式称为输出方程。一个系统, 不论是单输入—单输出或多输入—多输出, 只要用一个状态方程 (1-10) 和一个输出方程 (1-11) 就可以完整地加以描述了。

对于单输入—单输出系统, 用一元高阶微分方程 (1-4) 来描述和用状态方程 (1-10) 及输出方程 (1-11) 来描述是可以互换的, 也是等阶的。关于这两种数学模型间的互换, 可参阅本书第九章和有关现代控制理论的书籍。

状态方程由于采用矩阵方法表示, 因此可简化系统的数学表达式, 对于多输入—多输出系统, 其优越性就更加突出。此外采用矩阵或一阶微分方程组的形式更便于在电子计算机上运算, 因此即便是对于单输入—单输出系统, 这种表示方法也逐渐为人们所采用。

下面各节仅讨论适用于线性定常系数的古典控制理论最基本的概念、原理和方法。

第二节 传递函数与瞬态响应

一、微分方程的拉普拉斯变换

古典控制理论主要的研究对象, 是单输入—单输出的线性定常系统, 这种系统的数学模型通常是以一个高阶微分方程的形式表示, 如下式

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_2}{dt} + a_n x_2 \\ = b_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_1}{dt} + b_m x_1 \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (1-12)$$

对这种方程, 为求解在某一给定输入 $x_1(t)$ 下的输出特性, 即时间解 $x_2(t)$, 采用拉普拉斯变换是一种比较简便的途径, 下面介绍其方法 (关于拉氏变换的定义和基本性质, 请参阅有关工程数学教材)。

1. 微分方程和拉氏变换

如果在 $t_0=0$ 时, $x_2(t)$ 及 $x_1(t)$ 的值及其各阶导数均为零 (这对一般线性定常控制系统是成立的), 则式 (1-12) 经拉氏变换后为

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) X_2(s) \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) X_1(s) \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (1-13)$$

变成多项式形式

$$F(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (n \geq m) \quad (1-14)$$

式中 s 为拉氏变换符, $X_2(s)$ 及 $X_1(s)$ 分别表示输出量与输入量的拉氏变换函数。

2. 多项式 $F(s)$ 的反拉氏变换

$F(s)$ 的反拉氏变换 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ 可按式求出

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} dt \quad (t > 0) \quad (1-15)$$

上式积分较复杂, 实际解算时一般是利用拉氏变换表来进行, 先将 $F(s)$ 分解和变化成拉氏变换表中已列出的形式, 然后直接写出其原函数 $f(t)$, 即

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$$

而 $F_1(s), F_2(s) \dots F_n(s)$ 的原函数可由拉氏变换表方便地求出, 设分别为 $f_1(t), f_2(t) \dots f_n(t)$, 则

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (1-16)$$

由于式 (1-14) $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ 中 $A(s)$ 及 $B(s)$ 均为 s 的多项式, 而且 $B(s)$ 的阶次低于 $A(s)$ 阶次, 因此具体做法是先利用部分分式的规则将 $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ 分解为一些简单分式之和, 而这些简单分式的原函数可以由拉氏变换表中求得。为此, 要先解出方程 $A(s) = 0$, 得出其根为 $-p_1, -p_2 \dots -p_n$ 。由于方程 $A(s) = 0$ 可能有实数根, 复数根或重根, 因此分下述三种情况讨论:

(1) 方程 $A(s) = 0$ 仅包含实数根, 且没有重根。这时 $F(s)$ 有如下形式

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2) \dots (s+p_n)}$$

上式可展开成下面简单的部分分式之和

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_l}{s+p_l} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} \quad (1-17)$$

式中 $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots, a_n$ 为待定系数。

为了确定这些待定系数, 可用如下方法: 若求 a_k , 以 $(s+p_k)$ 乘上式两边, 并令 $s = -p_k$, 则有

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_k) \right]_{s=-p_k} = \left[\frac{a_1}{s+p_1} (s+p_k) + \frac{a_2}{s+p_2} (s+p_k) + \dots + \frac{a_k}{s+p_k} \times (s+p_k) + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} (s+p_k) \right]_{s=-p_k}$$

上式右边除了被确定系数 a_k 一项外, 其余均为零, 则有

$$a_k = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_k) \right]_{s=-p_k} \quad (1-18)$$

其余各待定系数也可用上述方法求出。

(2) 方程 $A(s)=0$ 包含有复数根, 且没有重根。因为复数根总是以共轭复数形式成对出现, 设 $-p_1$ 、 $-p_2$ 两个共轭复数根, 则 $F(s)$ 可以展开成下列形式

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1 s + a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{a_3}{s+p_3} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} \quad (1-19)$$

要求出 a_1 和 a_2 值, 可用 $(s+p_1)(s+p_2)$ 乘上式两边, 并令 $s=-p_1$, 则有

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1} = \left[\frac{a_1 s + a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} (s+p_1)(s+p_2) + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} (s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1}$$

上式右边除包含 $(a_1 s + a_2)$ 项外, 其余被展开项都为零, 则

$$(a_1 s + a_2)_{s=-p_1} = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1} \quad (1-20)$$

因为 p_1 是一个复数值, 等式两边也都是复数值, 值两边的实数部分和虚数部分分别相等, 则有两个方程。由这两个方程可解得 a_1 和 a_2 。

(3) 方程 $A(s)=0$ 包含有重根。设 $A(s)=0$ 在 $s=-p_1$ 处有 r 个重根, 而其余根各不相同, 则 $A(s)$ 可写成

$$A(s) = (s+p_1)^r (s+p_{r+1})(s+p_{r+2}) \dots (s+p_n)$$

$F(s)$ 的部分分式展开式为

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s+p_{r+2}} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} \quad (1-21)$$

式中系数 $b_r, b_{r-1}, \dots, b_1$ 分别由下列各式求出

$$\left. \begin{aligned} b_r &= \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right]_{s=-p_1} \\ b_{r-1} &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1} \\ &\dots\dots\dots \\ b_{r-j} &= \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1} \\ &\dots\dots\dots \\ b_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

上述各 b 式可以这样来求得: 用 $(s+p_1)^r$ 乘式 (1-22) 两边, 并令 $s=-p_1$, 使得

$$b_r = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right]_{s=-p_1}$$

如用 $(s+p_1)^r$ 乘式(1-21)两边, 然后对 s 取导数, 则有

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] = b_r \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+p_1)^r}{(s+p_1)^r} \right] + b_{r-1} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+p_1)^r}{(s+p_1)^{r-1}} \right] + \dots + b_1 \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+p_1)^r}{s+p_1} \right] + a_{r+1} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+p_1)^r}{s+p_{r+1}} \right] + \dots + a_n \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+p_1)^r}{s+p_n} \right]$$

这时右边第一项为零, 第二项变成 b_{r-1} , 其余各项均包含有 $(s+p_1)$ 的因子, 当 $s=-p_1$ 时也都为零。则有

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

同样逐次对 s 取导数, 并令 $s=-p_1$, 便可得到 b_{r-1} 的表达式。

分别上述三种情况, 可将 $F(s)$ 分解成一些简单分式之和, 利用拉氏变换表就可以求出 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$, 当解算控制系统过渡过程时, 就时常要用到这种方法。

二、传递函数

在古典控制理论中, 为了描述线性定常系统的输入—输出关系, 常用所谓传递函数。线性定常系统的传递函数, 定义为初始条件为零时, 输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比。

设有一线性定常系统, 它的微分方程如式(1-12)

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_2}{dt} + a_n x_2 \\ = b_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_1}{dt} + b_m x_1 \end{aligned} \quad (n \geq m)$$

式中 x_1 为输入量, x_2 为输出量。初始条件为零时, 对上式两端进行拉普拉斯变换, 就可得到该系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-23)$$

从上式看出, 传递函数实质上就是常系数线性微分方程式的缩写, 将微分方程式变成以 s 为变量的代数方程, 用于表示系统输出量和输入量之间的关系。其各项系数仅取决于系统的参数, 它表达了系统的动特性, 而与输入量的形式无关。传递函数分母中 s 的最高幂次, 就是系统输出量的最高阶导数的阶次, 如果这阶次为 n , 则该系统称为 n 阶系统。

对于非线性系统, 严格地讲是不存在传递函数的, 但是如果该系统可以用一个线性常数微分方程式近似表示, 则也可以认为有一个近似的传递函数。

三、典型环节的传递函数

在自动控制系统中主要有以下几种典型的动态环节。

1. 比例环节

输出量每一瞬间都与输入量成正比的环节称为比例环节。对这种环节任何突变形式的输入都能在输出中无延缓地反映出来, 因而也称为无惯性环节。这种环节最常见的如杠杆, 见图1-4(a)。当A端有位移 Δl_1 发生时, 立即在B端有相应的位移 Δl_2 ,

$$\Delta l_2 = \frac{b}{a} \Delta l_1 = k \cdot \Delta l_1$$

对于晶体管放大器, [见图1-4 (b)], 当其工作在特性曲线的直线部分时也有

$$\Delta u_2 = k \Delta u_1$$

由上可见, 对比例环节一般地可以表达为如下形式

$$x_2 = k x_1 \quad (1-24)$$

式中 k 为环节的放大系数或增益。

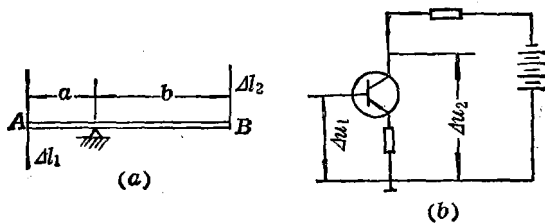


图 1-4 比例环节实例

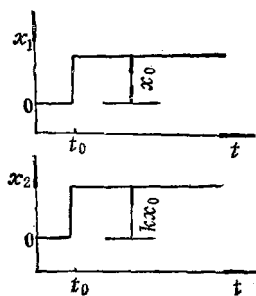


图 1-5 比例环节的阶跃瞬态响应

如果输入量 x_1 变化如图1-5所示(称为阶跃输入), 这时输出量 x_2 的变化过程包括从系统输入变化的瞬间开始, 到输出的终了平衡状态为止这一整个过程, 称为阶跃瞬态响应。

比例环节的阶跃瞬态响应曲线如图1-5所示。比例环节的传递函数可用下式表达

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{L[kx_1]}{L[x_1]} = k \quad (1-25)$$

其他如电位器, 皮带或齿轮传动等也属于比例环节。严格地讲, 比例环节并不存在, 如杠杆本身不是绝对刚性的, 放大器也有惯性, 在高频时不能忽略。但在通常应用范围内, 将它们视为比例的, 无惯性的已足够准确了。

2. 积分环节

输出与输入的积分成正比的环节称之为积分环节。如图1-6 (a) 所示水轮机调速器中的配压阀与接力器组成的液压放大元件, 就是最常见的积分环节, 当不考虑配压阀死区及其他非线性因素时, 接力器的行程为

$$y = \frac{1}{T_y} \int \sigma dt$$

式中 T_y 称为接力器时间常数(或反应时间)。

上式也可表示为

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T_y} \sigma$$

此式反映出积分环节输出量的变化速度正比于输入量的变化值。

对于纯电容电路, 如图1-6 (b), 以电流 i 为输入, 电压 u 为输出, 则

$$u = \frac{1}{C} \int i dt$$

式中 C 为电容器的电容量。因此纯电容电路也是一个积分环节。

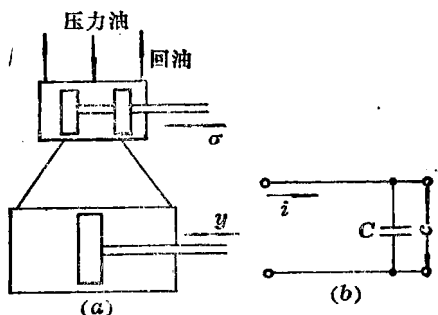


图 1-6 积分环节实例

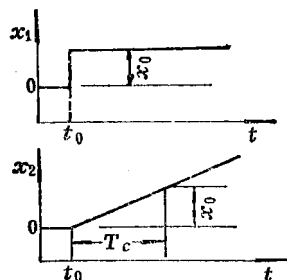


图 1-7 积分环节的阶跃瞬态响应

由上看出，积分环节一般地可以表达为

$$x_2 = k \int x_1 dt = \frac{1}{T_c} \int x_1 dt \quad (1-26)$$

式中 k 为积分环节放大系数。 $k = \frac{dx_2}{dt} / x_1$ ，代表输出量的变化率与输入量变化的比值；

$T_c = 1/k$ 为积分时间常数。

若输入量变化值 x_1 阶跃变化 x_0 ($x_0 \neq 0$)，则输出 x_2 将随时间作直线增加。如果 $x_1 = x_0$ 保持不变，则输出 x_2 不停地单调变化，这就称为无自平衡能力。其瞬态响应曲线如图 (1-7) 所示。从图上看，积分环节输出量的变化有一定的滞后，这种滞后称之为积分滞后。

积分环节的传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{L \left[k \int x_1 dt \right]}{L[x_1]} = \frac{kL[x_1]/s}{L[x_1]} = \frac{k}{s} = \frac{1}{T_c s} \quad (1-27)$$

由上式，有

$$X_2(s) = \frac{1}{T_c s} X_1(s)$$

当 x_1 由零阶跃变化 x_0 时， $X_1(s) = \frac{x_0}{s}$ ，故 $X_2(s) = \frac{x_0}{T_c s^2}$ ，经拉氏变换，有

$$x_2(t) = \frac{x_0}{T_c} t$$

因此在图 (1-7) 所示条件下， T_c 即表示 x_2 由零达到 x_0 所需的时间。

3. 微分环节

若环节的输出与输入的变化速率成正比，这样的环节称为微分环节。

一个理想的纯电感电路如图 1-8 (a)，以电流 i 为输入量，电压 u 为输出量时，就是一个典型的微分环节， $u = L \frac{di}{dt}$ ，其中 L 为电感线圈的电感量。

如图 1-8 (b) 所示的液压阻尼装置，若以活塞位移为输入量 x_1 ，以节流阀两侧的压差为输出量 Δp_1 ，则有 $\Delta p_1 = k \frac{dx_1}{dt}$ ，其中 k 为阻尼系数，这时液压阻尼装置也可看作是一个微分环节。因此微分环节一般地可以表达为

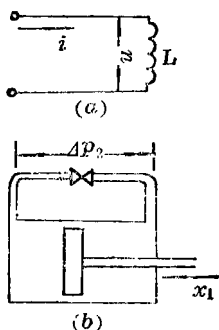


图 1-8 微分环节实例

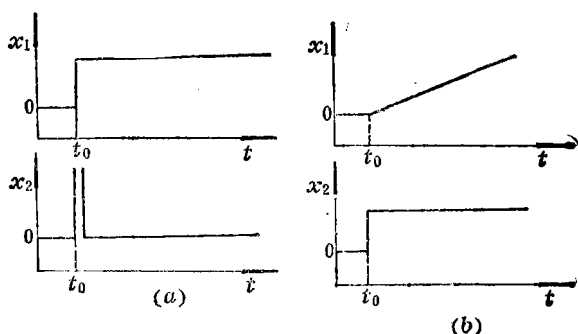


图 1-9 微分环节的瞬态响应

$$x_2 = k \frac{dx_1}{dt} = T_n \frac{dx_1}{dt} \quad (1-28)$$

式中 $k = T_n$ ，称为微分时间常数。

若输入量是阶跃变化，则输出量突然上升为无穷大并立即回零，其阶跃瞬态响应曲线如图1-9(a)。

若输入量为固定速率变化。即 x_1 是一个斜坡函数，则输出量 x_2 就成一阶跃变化，这个斜坡响应曲线如图1-9(b)。

微分环节的特点，在于输出量的变化反映输入量的变化速度，因为瞬态响应速度较快。

微分环节的传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{L[T_n dx_1/dt]}{L[x_1]} = T_n s \quad (1-29)$$

4. 惯性环节（一阶非周期环节）

当有阶跃形式输入时，输出按一指数规律变化，逐步达到最后的稳定值，这种环节称为惯性环节。其阶跃瞬态响应曲线如图1-10。

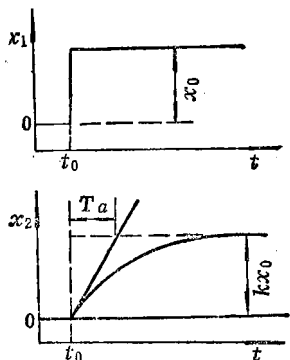


图 1-10 惯性环节的阶跃瞬态响应

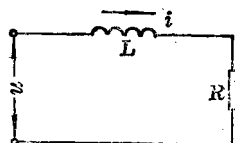


图 1-11 惯性环节实例

一电感电阻电路（图1-11），当其以电压 u 为输入，以电流 i 为输出时，就是一个典型的惯性环节，其电压方程为