

高等师范专科学校教育学院协编教材

中学数学教材教法与初等数学研究

初等几何研究

李家莼 主编



西南师范大学出版社

高等师范专科学校教育学院协编教材

中学数学教材教法与初等数学研究

初等儿 俄 研究

主 编 李家莼

副主编 龙盛鼎 陆中权

编 者 陆中权 蒋廷康 徐品方

郭海清 李纯白 罗长青

西南师范大学出版社

1990 · 重庆

中学数学教材教法与初等数学研究

初等几何研究

李家莼 主编

西南师范大学出版社出版

(重庆 北碚)

新华书店重庆发行所经销

西南师范大学出版社印刷厂印刷

•
开本:787×1092 1/32 印张:12.25 字数:265千

1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷

印数:1—10,000

•
ISBN 7—5621—0268—6/G·155

定价:4.65元

说 明

根据师范专科学校和教育学院的培养目标，紧密结合当前师专、教院和初中数学教学的实际，“西南地区师专、教院教材编写协作会”组织编写了这套教材。本教材共分为中学数学教学法、初等代数研究和初等几何研究三册，供师专、教院数学专业使用，也可作为在职中学数学教师进修用书或教学参考。

本教材力求体现“加强基础，培养能力”的基本精神，努力做到叙述简洁、准确生动、富于启发。尽量列举初中数学的实例并进行理论分析。注意适当渗透新思想、新观念和新方法。每节有内容提要，力求使主题集中、思路清晰，便于教师教、学生学。

考虑到西南地区二年制与三年制师专并存的实际和教院成人教育的特点，本教材在内容要求上有较大的灵活性，安排了选学章节（用*标出），二年制师专可根据实际情况少学或不学。教育学院也可根据自己的特点，对内容作适当的取舍。另外，还用小字编排有阅读材料，供师生参考。

鉴于本课程实践性强的特点，推荐有同步的录像资料，与本教材配套，供教师选用。本教材另配有习题解答与研究，供教师参考。

本套教材主编李家菀，副主编龙盛鼎、陆中权。

编委：教学法分册：李家菀、张一民、李志凡、黄蕴魁、陈再漪、李近仁；初等代数研究分册：龙盛鼎、李绍成、沈慧仙、赵进裕、陈兰贵、张应选；初等几何研究分

册：陆中权、蒋廷康、徐品方、郭海清、李纯白、罗长青。

本分册是初等几何研究部分。绪论、第一章由陆中权，第二章由郭海清，第三、四章由蒋廷康，第五章由徐品方，第六章由李纯白，第七章由罗长青分别执笔写成初稿并打印成册，初审后编委分头对各章进行了加工，在此基础上，陆中权对各章作了修改、整理并编撰了阅读材料。最后由李家蕊、陆中权对全书定稿。

参加本分册初审的有宋如山、朱安生、王国森、龙朝阳、徐发吉、唐学琳、龚培德、陈荣祥、马岷兴、孙宏等。

在编写过程中，得到了四川省教委、云南省教育厅、贵州省教委、西南师大出版社以及自贡师专、内江师专、成都大学、成都科学技术大学等校的有关心、支持和帮助，在此表示感谢。

编写中，参考了大量有关的教材、书刊和文章，在此，对有关的编者和作者一并表示感谢。

限于编者水平和时间仓促，肯定存在缺点和错误，敬请读者给予批评指正。

编者

1989年1月

目 录

绪论	(1)
第一章 几何公理体系与初中几何	(13)
§1.1 几何学的公理化	(13)
一 公理化方法	(13)
二 欧几里得《几何原本》的成就与缺点	(14)
三 对第五公设的试证及非欧几何	(16)
四 希尔伯特公理体系	(20)
§1.2 初中几何的教学体系和内容安排	(24)
一 初中几何的教学体系	(24)
二 初中几何教学内容的安排	(27)
阅读材料一	(47)
习题一	(49)
第二章 初中几何教学概论	(50)
§2.1 初中几何教学的一般要求	(50)
一 几何概念的教学要求	(50)
二 入门阶段的教学要求	(55)
三 正确分析和使用图形的教学要求	(62)
四 逻辑思维训练的教学要求	(71)
§2.2 重点内容的教学方法和研究	(78)
一 三角形及四边形的教学	(78)
二 相似形的教学	(88)
三 圆的教学	(96)
四 轨迹及作图的教学	(109)

阅读材料二	(114)
习题二	(119)
第三章 初等几何变换	(122)
§3.1 一一变换的概念	(122)
§3.2 合同变换	(124)
一 合同变换的概念	(124)
二 平移	(128)
三 旋转	(131)
四 反射	(135)
五 反射、平移和旋转之间的联系	(140)
六 合同变换与解题思路	(151)
§3.3 相似变换与位似变换	(152)
一 相似变换的定义及其性质	(152)
二 位似变换的定义及其性质	(158)
阅读材料三	(168)
习题三	(170)
第四章 几何题的证明	(172)
§4.1 几何证题的一般方法	(172)
§4.2 几何证题的分类	(178)
一 证度量关系	(178)
二 证位置关系	(199)
阅读材料四	(213)
习题四	(215)
第五章 几何量的计算	(218)
§5.1 线段与角的度量	(218)
一 线段度量的概念	(218)
二 角(弧)度量的概念	(219)

三	广义勾股定理	(222)
四	斯瓦特定理及其应用	(223)
五	线段计算例题	(228)
§5.2	面积计算	(234)
一	面积的概念	(234)
二	矩形面积公式的证明	(235)
三	圆周长和圆面积	(242)
四	计算面积的常用方法	(250)
五	组合图形面积的计算	(256)
§5.3	解三角形	(261)
一	解直角三角形	(262)
二	解斜三角形	(262)
阅读材料五	(271)
习题五	(272)
第六章 轨迹	(278)
§6.1	基本概念	(278)
一	轨迹的定义	(278)
二	轨迹的基本属性	(280)
三	轨迹的证明	(281)
四	基本轨迹命题	(283)
五	常用轨迹定理	(285)
§6.2	轨迹命题的类型及其解法	(294)
一	三种类型的轨迹命题	(294)
二	解法举例	(295)
§6.3	轨迹的探求与检查	(312)
一	直接探求法	(312)
二	间接探求法	(319)
三	轨迹的检查	(323)

阅读材料六	(329)
习题六	(330)
第七章 几何作图	(332)
§7.1 几何作图的基本知识	(332)
一 几何作图的概念	(332)
二 尺规作图与作图公法	(334)
三 解作图题的一般步骤	(337)
四 基本作图	(342)
§7.2 解作图题的一般方法	(345)
一 轨迹交截法	(345)
二 三角形奠基法	(350)
三 变换法	(354)
四 代数分析法	(368)
阅读材料七	(374)
习题七	(380)

绪 论

一、初等几何研究的对象、目的和方法

几何学是研究现实世界空间形式的一门学科。为了对作为科学的几何和作为教学科目的几何，有一个稍为具体的了解，必须认识到初等几何在整个几何学科中的地位，为此，我们简略地介绍一下几何发展的几个基本阶段。

1. 几何学的发展

几何学经历了四个历史发展阶段，在每一个发展阶段中，它具有非常不同的特色。

几何学发展的第一个阶段，可以用“积累各个几何事实，并企图建立起各个事实间的某种联系”来概括和描述其特征。这一些几何事实是人们观察宇宙空间中星体排列和形状，以及制作劳动工具、丈量土地等生产实践中广泛需要的。它们有着直接应用的价值。例如，长度、面积、体积的度量就是属于这一类几何事实。但是，在这一阶段里，人们也企图能建立起各个几何事实间的某种关系。例如，建立起圆的周长与圆的半径之间的关系等等。不过这些关系的建立，也没有逻辑的证明，而凭藉于经验、实验。所以这一阶段中，几何学主要是经验性的科学、几何的方法与物理学、天文学的实验与观察的方法很少有不同之处。

从公元前六世纪开始，古希腊人在丰富的经验材料的基础上，比较重视在形式逻辑的体系下去揭示这些几何事实之间存在的联系。在古希腊几何学的发展，进入了第二个阶

段。这一阶段可以用“把积累的几何事实加以系统化”来概括和描述其特征。到公元前三世纪，阿历山大学派的学者欧几里得写出了有名的“几何原本”，集中了这一时期研究的成果，所以这一阶段，通常也称之为“欧几里得阶段”。在这一阶段里，几何事实的经验基础变得非常狭小了，逻辑方法代替了直观的作用和测量，占有非常重要的地位。除了少数几个几何事实的基本概念以外，其它的许多几何概念获得了精确性的叙述，这种精确性的叙述是采用给出定义的方式来保证的。几何命题也被区分为两类，除了少数的几何命题，其真实性不用引起任何怀疑的，并且已被丰富的经验所证实了的，作为公理提出以外，其它的许多几何命题（定理），都要借助于公理和已证实过的几何命题用逻辑的方法来推导出。不过，在这一时期，人们虽然力图把几何学的处理方法，建筑在严谨的逻辑方法论的基础上，但是，也并不是真正能这样做到的。事实上，有许多几何事实还是凭之于直观、凭之于几何图形的“显然的”性质。有些概念和命题，如果深入地分析一下它的逻辑基础，可以发现作为基础的那些概念，公理并不是十分完整的。

几何学发展第三个阶段的最重要的标志是解析几何的产生与发展。1637年，笛卡尔系统地总结用数对表示点的位置的方法，建立了笛卡尔直角坐标系，并运用了代数方法研究几何学，从而拓广了几何学的研究内容，使圆锥曲线等图形也成为几何学的研究对象。特别是，研究几何的方法从单纯强调逻辑方法，到强调逻辑方法和代数方法并重，从而促进了几何学的进一步发展。这一阶段可以用“把几何事实代数化”来概括和描述它的特征。

在初等几何和解析几何的发展过程中，人们不断发现欧几里得的《几何原本》在逻辑上有不够严密之处，并不断地充实了一些公理。特别是尝试去证明第五公设的失败，促使人们重新考察几何学的逻辑基础，并取得两方面的成果。一方面从改变几何的公理系统，即用和欧几里得的第五公设相矛盾的命题来代替第五公设，从而导致几何学研究对象的根本突破。这样，现代几何的发展标志着几何学的发展进入了第四阶段。在这一阶段，先后由高斯、波里埃和罗巴切夫斯基建立起罗氏几何，以后又有了黎曼几何。另一方面，由对公理系统的严格分析中，最后形成了公理法，并在1899年由希尔伯特在他的《几何基础》中，完善地建立起欧几里得几何的严格公理系统。我们通常用“公理化”来概括和描述这一阶段的特征。

2. 初等几何的体系和方法

从几何学的发展简史，我们可以将初等几何概括归纳为如下三方面的涵义：

一是就研究内容来说，初等几何基本不超过《几何原本》所涉及的范围，即直线、角、直线形、相似形、圆、空间位置关系、多面体和旋转体。对这些图形，主要是研究有关相等、不等和成比例等度量关系，以及重合、平行和垂直等位置关系。二是在研究方法上，主要是借助于逻辑的方法，而尽量避免借用图形直观。而且是侧重定性的地进行研究，很少涉及定量的处理。三是在体系安排上，要尽量保证论述的严密性，因而带有用公理法的倾向。

二、作为初中教学科目的几何

作为初中教学科目的几何，它的基本内容应该属于几何

学发展的哪一个阶段呢？对于这个问题，我们要分析一下，在初中期间学习几何的基本任务究竟是什么？

1. 初中几何教学的任务

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门学科。在中学期间学习数学，目的就在于学习这门学科的一些基础知识，提高数学能力。几何是以现实世界的空间形式和关系作为它的研究对象的一门学科，在初中期间学习几何的基本任务，在于打好这门学科的基础和培养有关的能力。

但是，作为教学科目的几何，与作为科学的几何学在要求上是有所不同的。作为教学科目的几何，必须考虑到通过这门课程的教学，全面地达到学习这门课程应有的教育目的；同时，还得考虑到学习这门课程的学生的实际接受能力。

初中几何教学的任务，一般认为应该包括以下三方面的内容：

(1) 教养性的目的

这里是指让学生掌握几何课程中的基础知识，包括平面和空间的几何图形的概念、性质，相互位置关系，量的计量等等，以及它的逻辑推理的方法。

(2) 教育性的目的

这里主要是发展学生的空间观念，培养学生逻辑思维的习惯。正确下定义，正确将概念进行分类，在每一个命题中区分出条件和结论，区分正命题、逆命题、否命题、逆否命题，理解它们间相互的关系，建立充分和必要条件，运用各种证明方法等等。这些内容在学习数学的其它分科，甚至教学计划中的其它各门学科都应该赋予不同程度的要求，但无

疑的，在几何教学的过程中，它应该占有更大的比重。

(3) 实践性的目的

几何教学中，要求在掌握几何科学的理论和内容时，应该让学生理解它们的实际应用，在整个学习几何的过程中，不断地训练几何的基本技能和技巧，提高学生分析问题和解决问题的能力。

在1988年11月国家教委颁发的《九年制义务教育全日制初级中学数学教学大纲》（初审稿）中，初中几何课程的教学要求^①是：

①使学生掌握有关相交线、平行线、三角形、四边形、圆的概念和性质，掌握全等三角形与相似三角形的概念和性质，会运用这些概念和性质进行论证和计算，理解关于轴对称、中心对称的概念和性质，会利用勾股定理和锐角三角函数解直角三角形，会运用所学的知识解决简单的实际问题。

②使学生能够用直尺、圆规、刻度尺、三角板、量角器等工具画几何图形，掌握一些常用的尺规作图。

③使学生通过实验或具体模型（如长方体）了解空间线、面的平行与垂直关系，能够识别一些特殊的多面体和旋

①教学要求分以下几个层次：

了解：对知识的涵义有感性的、初步的认识，能够说出这一知识是什么，能在有关的问题中识别他们。

理解：对概念和规律（定律、定理、公式、法则等）达到了理性认识，不仅能说出概念和规律是什么，而且能够知道它是怎样得出来的，它与其他概念和规律之间的联系，有什么用途。

掌握：一般地说，是在理解的基础上，通过练习，形成技能，能够（或会）运用它去解决一些问题。

灵活运用：是指能够综合运用知识并达到了迅速、灵活的程度，从而形成了能力。

转体的直观图，并会运用展开图和面积公式计算它们的侧面积和全面积。

④使学生能够用直接证法进行简单的推理，初步培养观察、分析、综合、抽象、概括等能力以及分类、类比等思想方法，了解反证法，从而提高学生的逻辑思维能力。

⑤通过对空间图形（包括平面图形）的辨认、画图的训练，以及对图形论证与计算的教学，进一步培养学生的空间观念，并使学生了解如何从实际中抽象出几何图形。

⑥通过揭示几何知识来源于实践又应用于实践的关系，对学生进行唯物论的认识论的教育。通过揭示几何概念、性质之间的联系，以及图形的运动、变化，对学生进行辩证唯物主义观点的教育。通过有关的几何史料（如勾股定理、圆周率）的介绍，对学生进行爱国主义教育。通过论证与画图的教学，逐步培养学生严谨的科学态度，并使学生获得美的感受。

新大纲中的这六条几何教学要求，正是体现了上述介绍的几何教学任务。

因此，根据几何的教学任务和要求，无可怀疑的作为初中教学科目的几何，应该以几何学的第二个发展阶段为基本内容，也就是欧几里得几何为它研究的基本对象，基本上保持欧氏公理系统，但是几何内容要进行删繁就简，使学生切实掌握现代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必须的几何的基础知识和基本技能，包括直观的空间图形的初步知识，发展逻辑思维能力和空间观念，并能运用所学知识解决简单的实际问题。

2. 初中几何教学改革

欧几里得的几何原本是很古老的，尽管它在科学性上，从现代的观点来看，有不少缺点，从教学的要求上来看，也不完全适合于初中几何教学的要求，但是几百年来它仍然是初中几何课本的主要依据。怎样重新建立初中几何课本的体系，使初中的几何教学更有成效地达到自己的教学目的和要求，这是古今中外数学教育工作者们力图解决的问题。

事实上，作为初中教学科目的几何，既要考虑到中学生的实际接受能力，不能一下子就要求教学内容具有逻辑严谨性，以公理化的几何来要求学生；又要考虑到现代科学技术的迅速发展，教学内容必须更新，使它有利于学生掌握几何的基础知识和基本技能；有利于学生能力的发展。

基于上述原因，六十年代我国的数学教学改革中，尖锐地提出了“中学几何必须要改革”的问题。它主要是指初中平面几何教学的改革。虽然，当时的通用课本，在几何教材内容的选择上和处理方法上都作了一些改进，注意了科学性的要求和学生的实际接受能力，也注意了几何教学内容适当地联系实际应用，但是，教材在几何证明和几何作图等方面，内容仍然陈旧和繁琐，不利于提高学生的能力。七十年代我国从改革几何教学内容来着手改革中学数学教学。当时曾提出了一些改革方案。有的方案是几何不再独立设科，而把初等代数、初等几何、平面三角等内容综合在一起，成为一门学科，使数形的研究紧密结合起来；有的方案是几何仍作为一门独立学科，但是把平面三角中解三角形的内容合并到几何中去；有的方案不考虑几何与平面三角是否合并设科的问题，而是着重精简几何教学内容，在逻辑推理方面的要求，比较多地运用直观性，特别在初学几何的阶段，把许多

几何事实，通过直观的方法来加以说明，使学生能正确地理解和运用，不要求理论上的严谨性，然后，在以后的学习阶段再着重培养学生逻辑推理的能力，达到这门学科的教学所应达到的目的要求。

关于作为初中教学科目的几何体系的改革问题，虽然目前还不可能作出最后的结论，但是从国内外几十年的实践，已可得到一些初步的结论：

①初等几何的教学，在培养学生逻辑推理的能力方面是整个中学数学教学中极为重要的组成部分。一味削弱与降低初等几何的知识、方法和要求是不行的。

②把初等几何、初等代数和平面三角的内容结合起来，综合成一门学科，这样做存在的问题较多。例如，既要解决数方面知识的内在联系，又要解决形方面知识的内在联系，同时还要解决数形知识之间的有机结合的问题，这是很困难的。从实践的情况来看，一般地说，仍然采用分科的方法比较适当。

③在几何独立设科的前提下，这门课程的内容和处理方法也必须改革，使学生能够以较短的时间，较早地学好初等几何方面的知识和技能、达到教学大纲规定的教学要求。初中几何，其内容体系是采取了不完全公理化的方法建立起来的，也就是运用扩大公理化的办法，使几何教学内容仍然坚持较为严谨的公理化演绎思想。这样，仍能使学生会到公理化的思想，发展逻辑思维能力，受到几何所特有的极为重要的训练。在内容编排上采取了直观因素和逻辑因素相结合的办法。也就是把实验几何和推理几何有机地结合起来，且以实验几何为基础，推理几何为主体的演绎体系，从作为初