

 新世纪高等学校教材

大学公共课系列教材

高等数学 B 上册

(第2版)

GAODENG SHUXUE B

北京师范大学数学科学学院 主编
蔡俊亮 李天林 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

大学公共课系列教材

(第2版)

高等数学 B 上册

GAODENG SHUXUE B

北京师范大学数学科学学院 主编
蔡俊亮 李天林 编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.B上册(第2版)/蔡俊亮,李天林编著.一北京:北京师范大学出版社,2009.4
(新世纪高等学校教材)
ISBN 978-7-303-09832-3

I. 高… II. ①蔡…②李… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第023910号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码:100875

印 刷:唐山市润丰印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:170 mm × 230 mm
印 张:23.75
字 数:410千字
版 次:2009年4月第2版
印 次:2009年4月第1次印刷
定 价:36.00元

策划编辑:岳昌庆 王松浦 责任编辑:岳昌庆 方 亮
美术编辑:高 霞 装帧设计:高 霞
责任校对:李 菡 责任印制:李 丽

· 版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-58800697
北京读者服务部电话:010-58808104
外埠邮购电话:010-58808083

本书如有印装质量问题,请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话:010-58800825

内容简介

本教材根据编者多年来的教学改革实践,并按照新世纪高等数学课程教程基本要求,在李天林先生 1988 年编写的《高等数学》教材的基础上全面修订而成.我们在修订中不仅保留了原教材结构严谨、逻辑清晰、论证详细、通俗易懂的优点,同时注意选取并吸纳当前教材改革中的一些成功模式或案例,使新版教材具有更广泛的适应性.本教材分上、下两册出版:上册内容为函数、极限与连续,导数与微分,不定积分,定积分,简易微分方程等共五章;下册内容为空间解析几何与向量,多元函数微积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,线性代数初步等共五章.每节配有适量的习题,每章配有本章内容小结和复习题,书末还附有各种相关图表及习题解答或提示.本教材本着简明、易学、实用的原则,选材恰当,观点新颖,结构严谨,叙述详细,通俗易懂.本教材配有较多例题,便于自学,适应性广,伸缩性强,可作为高等院校非数学各专业的学生使用,也可作为大专院校的专科教材或函授教材.

第 2 版前言

1915 年,北京师范大学的前身——北京高等师范学校成立数理部,1922 年成立数学系,2004 年成立北京师范大学数学科学学院.经过 90 多年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1958 年以前,我校主要在物理系和化学系开设高等数学课,1958 年开始,由于扩大招生和进行教学改革的需要,于 1959 年开始成立公共数学教研室.针对各系专业课对数学的要求,进行课程内容的改革和教学进度的调整,并要求讲课教师树立对外系专业课“服务”的教学思想.当时,物理系和天文系开设 4 学期的高等数学课,内容有解析几何、高等代数、一元和多元微积分及场论;化学系开设 3 学期的高等数学课,主要内容是一元微积分;生物系和地理系开设 2 学期的简明微积分.

1981 年 3 月后,我校除中文系、历史系和外语系外,其余的系都开设高等数学课.因此,高等数学教学任务日渐增加.1999 年高校扩大招生规模后,我校每年有约 2500 名本科生学习高等数学.从 1999 年秋季开始,在学校教务处的大力支持下,按照不同专业分层次进行教学的原则,我系制定并统一安排了全校非数学专业大学数学教学改革工作,根据各专业对数学知识和数学能力的要求,分为大学数学 A(每周 6 学时,共 3 学期),B(每周 6 学时,共 2 学期),C(上学期周 6 学时,下学期周 3 学时),D(1 学期周 4 学时)四个层次.各专业根据需要选择本专业数学课的教学内容.在 20 世纪 80 年代,部分教师充分利用在外系讲课的便利条件,合作进行科学研究,或撰写高

等数学教学研究论文,或编写教材,编写的教材有物理类用的《高等数学》,化学、生物学和地理学用的《高等数学》,生物系用的《生物统计》.2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由李仲来教授任主编,准备对北京师范大学出版社出版的5部数学教材修订后再版,再用几年时间,出版大学数学A,B,C课程三个层次的系列教材(考虑到2009年全国硕士研究生入学统一考试的数学教学大纲中将数学三、数学四合并为新数学三,我们也相应地将大学数学C、大学数学D合并为新大学数学C).

经过多年的教学实践,高等数学的教学内容已经比较固定,国内外教材已经有多种版本,国内对几何、物理类联系实际的教材内容比较好,对其他方向联系实际的教材内容还需要大力加强.在这种情况下,本套系列教材力图在与专业的结合上写出特色.当然,这对作者提出了很高的要求.我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校非数学专业本/专科生、函授生和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2008-11-26

第 2 版作者的话

本教材根据编者多年来的教学改革实践,并按照新世纪高等数学课程教程基本要求,在李天林先生 1988 年编写的《高等数学》教材的基础上全面修订而成.我们在修订中不仅保留了原教材结构严谨、逻辑清晰、论证详细、通俗易懂的优点,同时注意选取并吸纳当前教材改革中的一些成功模式或案例,使新版教材具有更广泛的适应性和独特的优势,主要表现在以下几个方面:

一、注重内容的系统性与科学性.在教材内容的结构上,一些地方打破了传统教材内容的框架,增、删或调整了一些概念、结论和例子,甚至改进了一些传统的证明和表述方法,使整体结构更加系统、科学.最大可能地修改、纠正或补充在第一版中出现的笔误、失误和错误,使整个内容,包括一些术语、记号和图表,均能与国际接轨.

二、注重内容的连续性与适应性.本教材内容安排充分考虑到与中学内容的衔接问题,尽量减少与中学内容的重复,重点讲解或补充一些相关的新概念和新内容.妥善处理微积分与线性代数内容的重叠和衔接部分,使前后内容有机结合,融为一体,以适应不同专业和层次的需求.

三、注重内容的基础性与实用性.对于基本概念和理论,尽量从实际背景出发引出并进行理论概括和讨论.将高等数学的理论和实际问题有效地结合起来,使读者明白数学理论发展的源动力来自于实际问题,发展了的数学理论又反过来指导实际问题的解决.

四、注重内容的知识性与可读性.本教材内容不仅注意传授高等数学内容的知识,更注意强调必要的数学思维训练.在

例题和习题的选择上,既要符合理论的需要,也要兼顾实际问题的需求.语言表达力求由浅入深、通俗易懂、逻辑清晰、循序渐进,以增强可读性.

在这次修订中,我院教师提出了许多宝贵的意见和建议,特别是李仲来教授提供了许多具体的修改意见和建议,在此表示诚挚的谢意!

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持,在此表示衷心感谢!

本版由蔡俊亮修订.不当之处在所难免,一切责任作者自负.欢迎广大读者、同行和专家批评指正.

蔡俊亮

2008-11-22

第 1 版前言

北京师范大学是一所具有 80 多年历史的老学校,在学科建设和教学实践中积累了一定的经验,将它贯彻到教材中去无疑是有益的.为了加强教材建设,加强与兄弟院校的交流,我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会,编写出版一套教材.编委会在研究当前教学改革发展的新情况和过去的教学经验的基础上,同时参照原教育部 1984 年颁发的中学教师进修大纲,对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论.组织数学系有教学经验的教师进行编写,并且由编委等分工负责对书稿进行审订.

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学(物理、天文、无线电等专业用)等.

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进,便于自学,科学系统性较强.每章有小结,每节(或几节)后配有习题.每章有总复习题.习题安排由易而难,层次清楚.书后附有习题答案或提示,以利于读者自学时检查自己的作业.

为了适应不同层次学校和人员的需要,书中有些内容加了“*”号,它相对独立,如因学时较少,可以删去.

这套教材可供高等师范院校本科(或专科)、教育学院数学系、函授(数学专业)、在职中学教师进修等使用.

第1版作者的话

本书是编者在我校物理系多年教学实践的基础上,参照1984年原教育部颁发的中学教师进修高等师范物理专业的《高等数学教学大纲》的要求,编写而成.全书共有11章,分为上、下两册,上册内容包括:函数与极限;导数与微分;不定积分;定积分及其应用;微分方程五章.下册内容包括:空间解析几何与向量;多元函数微分学及应用;重积分;曲线积分、曲面积分与场论初步;无穷级数;行列式与矩阵六章.用210学时讲完全书的内容是完全可以的,如果用作函授教材,面授时适当减少一些例题,用120学时精讲主要内容也不会有什么困难.

为了便于自学,本书在讲解基本概念时,本着理论联系实际的原则,大都由实际问题引入.论述尽可能深入浅出、通俗易懂、推理详尽.在例题的选择上,联系物理概念的问题较多,充分体现了大纲“应把重点放在培养学员正确地理解和运用基本概念和基本方法上”的要求,及“着重培养分析问题和解决问题的能力.使学员认识到数学来源于实践又服务于实践,从而有助于树立辩证唯物主义观点”.

在文字上,基本做到口语化,使阅读本书内容时感到自然和轻松.书中每一节都配有足够数量的习题,对其中较难的习题都有提示.每一章内容结束时都有小结,概述本章的基本概念和基本方法.每册书末还附有习题解答,全书末附有索引,为读者学习时提供方便.

书中带*号的内容,专科可以不作要求.

本书在教材处理上,有些内容与一般写法不同.其中最主要的有二阶常系数线性微分方程,书中给出的“二阶常系数线性微分方程的积分解法”不仅比通常的待定系数法计算简单.

还省去了各种不同情况的讨论与证明,而且适用范围也广泛得多.从而使这部分教材内容大大精简.这一方法原则上也能推广到高阶常系数线性微分方程.限于大纲要求,本书只举了几个例题作为说明,而没有作更详细的讨论.对空间解析几何中特殊二次曲面的讨论,没有按通常的几何方法进行,而是以旋转曲面为中心,采用较为直观的方法加以介绍.这样做可以减少学时,增强直观的效果,从编者的教学实践看,在后续内容中,特别在三重积分中,运用这些曲面时,都没有遇到什么问题.此外,对其他不少命题的证明方法和基本概念、基本方法的论述,也有不少是编者独立的做法和观点.这些内容,对于已经学过微积分的读者来说尤其会感到新鲜.

薛宗慈副教授审阅了本书全部内容,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中一定有不妥或谬误之处,恳请读者和使用本书的同行和同志不惜赐教.

编 者

1987年7月于北京师大

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 / 1

1.1 函数	1
1.1.1 变量与区间	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的特性	7
1.1.4 复合函数与反函数	9
1.1.5 初等函数	11
习题 1.1	16
1.2 数列的极限	19
1.2.1 数列极限的概念	19
1.2.2 无穷大与无穷小	25
1.2.3 极限的四则运算	28
1.2.4 极限存在准则	32
习题 1.2	38
1.3 函数的极限	40
1.3.1 当自变量趋于无穷大时函数的极限	40
1.3.2 当自变量趋于有限值时函数的极限	44
1.3.3 函数极限的性质与运算法则	49
1.3.4 两个重要极限	50
1.3.5 无穷小的比较	55
习题 1.3	59
1.4 连续函数	61
1.4.1 连续函数的概念	61
1.4.2 函数的间断点	62
1.4.3 闭区间上连续函数的性质	65
1.4.4 初等函数的连续性	67
1.4.5 双曲函数	69

习题 1.4	71
本章小结	73
综合练习 1	74

第 2 章 导数与微分 /77

2.1 导数	77
2.1.1 导数的概念	77
2.1.2 求导的法则	83
2.1.3 由参数方程确定的函数的导数	93
2.1.4 高阶导数	96
习题 2.1	99
2.2 微分	103
2.2.1 微分的概念	103
2.2.2 微分的运算	105
* 2.2.3 微分在近似计算中的应用	109
习题 2.2	114
2.3 微分中值定理及其应用	115
2.3.1 微分中值定理	115
2.3.2 洛必达法则	121
2.3.3 泰勒公式	126
习题 2.3	134
2.4 导数的应用	136
2.4.1 函数单调性的判别法	136
2.4.2 曲线的凹凸性及其判别法	139
2.4.3 函数的极值及求法	142
2.4.4 曲线的渐近线	147
2.4.5 函数图形的描绘	150
习题 2.4	152
本章小结	155
综合练习 2	157

第 3 章 不定积分 /159

3.1 不定积分的概念	159
3.1.1 原函数	159
3.1.2 不定积分	160
3.1.3 不定积分的几何意义	161
3.1.4 不定积分的性质	162

习题 3.1	169
3.2 不定积分法	171
3.2.1 换元积分法	171
3.2.2 分部积分法	180
习题 3.2	186
3.3 几类特殊函数的积分法	188
3.3.1 有理函数的积分法	188
3.3.2 三角有理式的积分法	194
3.3.3 简单无理函数的积分法	197
* 3.3.4 积分表的使用	200
习题 3.3	202
本章小结	204
综合练习 3	205

第 4 章 定积分及其应用 / 207

4.1 定积分的概念	207
4.1.1 两个典型问题	207
4.1.2 定积分的定义	210
4.1.3 定积分的几何意义	212
4.1.4 定积分的性质	214
习题 4.1	220
4.2 微积分基本定理	222
4.2.1 原函数存在定理	222
4.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	224
4.2.3 定积分法	226
* 4.2.4 定积分的近似算法	232
习题 4.2	238
4.3 定积分的应用	240
4.3.1 定积分的几何应用	240
4.3.2 定积分的物理应用	251
习题 4.3	256
4.4 广义积分	259
4.4.1 积分区间无限的广义积分	259
4.4.2 被积函数无界的广义积分	264
习题 4.4	267
本章小结	268

综合练习 4	270
--------------	-----

第 5 章 简易微分方程 / 273

5.1 微分方程的基本概念	273
5.1.1 微分方程的定义	273
5.1.2 微分方程的解	274
5.1.3 建立微分方程	275
习题 5.1	277
5.2 一阶微分方程	278
5.2.1 变量可分离的微分方程	278
5.2.2 齐次微分方程	280
5.2.3 一阶线性微分方程	283
5.2.4 一阶微分方程	286
习题 5.2	290
5.3 二阶微分方程	292
5.3.1 可降阶的二阶微分方程	292
5.3.2 二阶线性微分方程	296
5.3.3 二阶常系数线性齐次微分方程	301
5.3.4 二阶常系数线性非齐次微分方程	304
习题 5.3	310
* 5.4 高阶微分方程	312
5.4.1 可降阶的高阶微分方程	312
5.4.2 高阶线性微分方程	312
5.4.3 欧拉方程	317
习题 5.4	319
* 5.5 常微分方程组	320
习题 5.5	324
本章小结	325
综合练习 5	327

部分习题解答与提示 / 330

附录 I 几种常见的特殊曲线 / 348

附录 II 不定积分公式表 / 351

附录 III 常用恒等式 / 364

名词索引 / 365

第1章 函数、极限与连续

1.1 函数

函数的概念虽然在中学数学课本中已经讲过,并且讨论了它的一些简单性质,由于函数也是高等数学研究的主要对象,因此,简要地将有关内容复习一下,同时作一点必要的补充还是需要的.

1.1.1 变量与区间

在我们的日常生活、工作和学习中,经常会观察到各种不同的量,如长度、质量、速度等等.而我们所遇到的这些量又经常呈现出不同的状态,其中有些量在所观察的过程中没有变化,即保持某一固定的值.如我们观察任何一个三角形时,不论它的各个边长如何,它的三个内角之和总是保持一个固定的值,即 2π .这种量称为**常量**.而另外一些量总是时而变大时而变小,也就是说它们在所观察的过程中可以取不同的值.这种量称为**变量**.如将一个密闭容器内的气体加热时,气体的温度和压力都是变量,而气体的体积和分子数则是常量.

在这里作两点说明.其一,我们所说的量都是具体的量,如 2 kg 油、 3 m 布、 $5\ \Omega$ 的电阻、 120 V 的电压等.而数是抽象的,即数与量是有区别的.但数学分析中所讨论的量,常常是抽去它的实际意义,而只观察其数值,到应用于实际问题时,再赋予其具体意义,因此也就把常量和变量分别称为**常数**和**变数**.习惯上量和数在不讨论具体问题时就不加区别了.一般地,常数用字母 a, b, c 等表示,变数用字母 x, y, z 等表示.在几何上,用数轴上的定点表示常数,用动点表示变数.其二,在观察某一实际问题时,一个量是常量还是变量,又要根据具体问题具体分析,要辩证地看待.如重力加速度 g ,严格说来,在离地心距离不同的地点它是不同的,因而 g 是变量,但当精确度要求不太高时,在地面附近的重力加速度可以当作常量($g=9.8\text{ m/s}^2$).又如直流电压 U 我们也是看成常量的,但实际上它也是随时间变化而变化的,只是变化相对很小,可以忽略不计而已.在我们观察和研究许多实际问题时,都是这样处理的,这样做常使我们对问题的研究得到简化.

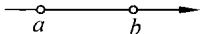
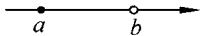
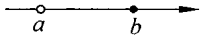
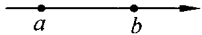
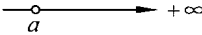
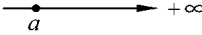
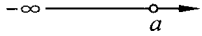
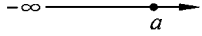
对于某一过程中的变量,还要观察这个变量的取值范围或说变量的变化范围.设变量是 x ,它所取的一切数值的集合是 D ,这个数的集合 D 就称为变量 x

的变化域. 特别地, 当 x 的变化域是全体实数组成的集合时, 称为实数集, 用 \mathbf{R} 表示. 为叙述方便, 本书中所讨论的数集都是实数集的子集.

变量的变化域既可用集合表示, 又可用区间表示, 如实数集可表示如下:

$$\text{区间 } (-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.$$

有关集合的初步知识及各类区间的定义、符号、几何表示等, 在中学课本中都已讲过, 现在集中在一起, 列表如下(a, b 为实数, $a < b$, 几何表示中, 数轴上的原点未标出):

定义	名称	符号	几何表示
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a < x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid a \leq x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x < a\}$	无限区间	$(-\infty, a)$	
$\{x \mid x \leq a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$	

除表中所列出的各类区间外, 我们后面还经常用到开区间 $(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta, \delta > 0\}$, 称为 a 的 δ 邻域, 简称 a 的邻域. 它是一个以 a 为中心, δ 为半径的开区间(图 1.1), 记为 $U_\delta(a)$, 即 $U_\delta(a) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$.

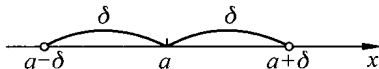


图 1.1

1.1.2 函数的概念

当我们观察某一物体运动过程或某一自然现象时, 其中只有一个量变化的情况是很少的, 常常是有几个量同时变化, 而且它们的变化还是互相联系和互相依赖的, 并且按照一定规律变化着.