

逻辑析理与 数学思维研究

LUOJI XILI YU SHUXUE SIWEI YANJIU

朱晓鸽 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

逻辑析理与数学思维研究

朱晓鸽 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书运用逻辑学原理对数学概念、命题、定理进行了分析与研究,旨在阐明在数学教学研究中数学思想、数学思维以及数学方法有着极其深刻的逻辑性,在进行数学教学时要有目的地渗透这种关系,提高数学教学质量,加强数学思维训练。本书共有十九章,在较系统地介绍逻辑基本原理的同时,紧密联系数学知识以及数学教学实际,对逻辑基本原理的阐述力求深入浅出、重点突出、例证通俗。

图书在版编目(CIP)数据

逻辑析理与数学思维研究/朱晓鸽著. —北京:北京大学出版社, 2009.3

ISBN 978-7-301-14977-5

I. 逻… II. 朱… III. ①数学课—教学研究—专业学校②数学教学—教学研究—高等学校:技术学校 IV. O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 024131 号

书 名: 逻辑析理与数学思维研究

著作责任者: 朱晓鸽 著

责任编辑: 黄庆生 胡 林

标准书号: ISBN 978-7-301-14977-5/O · 0775

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765013 出版部 62754962

网 址: <http://www.pup.cn>

电子信箱: xxjs@pup.pku.edu.cn, hwy@pup.pku.edu.cn

印刷者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×980 毫米 16 开本 14.25 印张 300 千字

2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 30.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024; 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

我国的教育体系基本上受前苏联凯洛夫教育学的影响建立起来的。这一体系虽然有它的历史功绩，但是也明显地存在弊病，过分强调了基础知识而忽略了能力培养，强调了形式逻辑思维而忽略了发现创造思维。在凯洛夫教育学的影响下我们的教材重知识，轻方法；重演绎，轻归纳……这样的教育培养出来的学生往往是高分低能。

随着新课标的出台，我国教育界专家也充分意识到智能教育的重要性，认为认知心理的教育体系对个体发展的作用远远大于刺激反应心理的教育体系对人的影响，更有人强调，知识与智能相比，智能更重要。

那么，什么是智能呢？国内外教育学家、心理学家对此众说纷纭，见解甚多。我国学者朱智贤先生曾经说过：“智力是人的一种心理特点或个性特点，是偏于认识方面的特点。智力是一种综合的认识方面的心理特征，它主要包括以下几个方面，（1）感知记忆能力，特别是观察力；（2）逻辑思维能力，它是智力的核心部分；（3）创造能力，它是智力的高级表现。”至于人们常说的探究能力、运算能力等不过是在智力的基础上经过后天努力和培养的更高一层的能力，我们把智力和上述各种能力统称为智力。

要培养能力、开发智力，只凭以上概念是不行的。笔者认为要培养能力、开发智力，就应该抓住智力的核心部分和高级表现：逻辑思维能力和创造能力，就应该掌握这两个层次的思维结构，或者说掌握这些思维的方法。

数学是与思维联系密切的科学。加里宁说：“数学是思维的体操。”通过数学学习可以锻炼思维能力，反过来思维能力的提高，又可以促进数学的学习。由于历史原因，人们对数学的思维方法产生了偏见，以为欧几里得的演绎法就是数学思维的全部。诚然，数学家的论文、教科书的内容都是从定理到定理，逻辑严密形成了一个完美的演绎体系，但是，我们也知道从定理的发现到证明过程的探索，其间是花费了多少心血，绞尽了多少脑汁，使用了多少丰富的思维方法！只不过

人们没有把它们记入史册罢了。著名的数学家、教育学家波利亚正确地指出了这点：“数学家的创造性工作的成果是论证推理，即证明，但是这个证明是通过合理推理（包括归纳、类比等），通过猜想而发现的。为了取得真正的成就，还必须学习合理推理，这是创造性工作赖以进行的那种推理。”不重视合理推理，恰是传统教育的弊端。如果人们只会从演绎到演绎，从大前提到小前提，他们就永远不会发现超越大前提的新真理。

我国从 20 世纪 50 年代引入凯洛夫教育思想后，培养了一大批工匠式的知识分子，对人类生产力起推进作用的创造发明远远落后于西方国家。我国教育界的精英深感忧虑：长此以往，我们必将在科学的各个领域面临被动局面！

从 21 世纪起，国家颁发的新课程教学大纲就是要从根本上改变重知识轻能力的传统教育的理念，就是要加强思维训练，提高人的创造能力。

而人的思维能力与创造能力在整个学生阶段是最重要的，从小进行良好的思维逻辑能力培养对他们的成长可以起到事半功倍的效果，对学生进行数学思维能力培养，提高他们观察事物、分析问题、综合实践等能力将对传统的基础教育进行有力的改革。

正是鉴于这种情况，笔者根据多年来的教学经验与体会，编写了此书。本书一共分为十九章，各自相对独立，着重分析了各种思维的特性、特点等。

朱晓鸽

2008 年 5 月

目 录

第 1 章 思维方法概述	1
1.1 思维概念及功能	1
1.1.1 思维概念	1
1.1.2 思维结构	1
1.1.3 思维功能	2
1.2 思维特征	2
1.2.1 思维的目的性和问题性	2
1.2.2 思维的概括性	3
1.2.3 思维的间接性	3
1.2.4 思维的逻辑性	3
1.3 思维过程及分类	3
1.3.1 思维过程	3
1.3.2 思维分类	4
1.4 研究思维方法的意义	6
1.4.1 思维科学的兴起	6
1.4.1 变革传统教学观, 认识思维训练的重要意义	9
第 2 章 概念	14
2.1 概念概述及种类	14
2.1.1 概念介绍	14
2.1.2 概念的内涵与外延	15
2.1.3 概念的作用	16
2.1.4 概念的种类	16
2.2 概念定义及关系	18
2.2.1 概念的定义	18
2.2.2 概念定义方法	19

2.2.3	概念定义规则	21
2.2.4	概念间的关系	22
2.3	概念分类	27
2.3.1	分类简介	27
2.3.2	分类种类	28
2.3.3	分类规则	29
2.4	概念限制及概括	30
2.4.1	概念限制与概括根据	30
2.4.2	概念的限制	30
2.4.3	概念的概括	31
2.4.4	限制与概括的作用	32
第3章	判断	33
3.1	判断概述及种类	33
3.1.1	判断概述	33
3.1.2	判断种类	35
3.2	命题	39
3.2.1	命题及分类	39
3.2.2	命题的四种形式及它们的关系	39
3.2.3	命题的充要条件	40
3.3	判断题命题原则及方法	41
3.3.1	判断题命题原则	42
3.3.2	判断题命题常用方法	42
第4章	推理	44
4.1	推理概述及结构	44
4.1.1	推理概述	44
4.1.2	推理结构	44
4.2	推理结论的真假性	45
4.3	推理作用及分类	47
4.3.1	推理作用	47

4.3.2 推理分类	48
第 5 章 证明	50
5.1 证明	50
5.1.1 证明概述	50
5.1.2 证明分类	52
5.1.3 证明规则	52
5.2 反证法概述及实例	53
5.3 同一法概述及实例	55
第 6 章 反驳	57
6.1 反驳概述	57
6.2 反驳种类	57
6.2.1 直接反驳和间接反驳	57
6.2.2 演绎反驳和归纳反驳	58
6.3 反驳举例	59
第 7 章 逻辑	61
7.1 逻辑思维概述	61
7.2 逻辑思维种类	61
7.2.1 同一律	62
7.2.2 不矛盾律	63
7.2.3 排中律	63
7.2.4 充足理由律	64
7.2.5 逻辑思维基本规律之间的关系	65
7.3 违反逻辑思维基本规律的错误	65
7.3.1 违反同一律的逻辑错误	65
7.3.2 违反矛盾律的逻辑错误	66
7.3.3 违反排中律的逻辑错误	67
7.3.4 违反充足理由律的逻辑错误	67
7.3.5 逻辑思维教学的作用	68
7.3.6 逻辑思维教学的注意事项	70

第 8 章	化归	74
8.1	化归概述	74
8.1.1	化归定义	74
8.1.2	化归举例	75
8.2	化归方法的基本原则	76
8.2.1	简单化原则	76
8.2.2	熟悉化原则	77
8.2.3	和谐化原则	77
8.3	化归的途径	78
8.3.1	分解与组合	78
8.3.2	恒等变形	80
8.3.3	化归方法的教学功能	81
第 9 章	猜想	84
9.1	猜想概述	84
9.1.1	猜想的定义与特征	84
9.1.2	猜想的分类与作用	86
9.2	比较型猜想	87
9.3	类比型猜想	88
9.4	归纳型猜想	90
9.5	数学归纳法	91
第 10 章	比较与类比	94
10.1	比较概述与类型	94
10.1.1	比较概述	94
10.1.2	比较类型	94
10.1.3	比较方法举例	96
10.2	类比概述与条件	100
10.2.1	类比概述	100
10.2.2	类比条件	100
10.2.3	类比方法应用举例	102

第 11 章 分析与综合	106
11.1 分析与综合概述	106
11.1.1 分析的意义及其作用	106
11.1.2 综合的意义及其作用	106
11.1.3 分析与综合的辩证关系	107
11.1.4 分析与综合应用举例	108
11.2 数学中的分析法与综合法	113
11.2.1 分析法与综合法的概述	113
11.2.2 推理思路图	114
11.2.3 逐步逼近法在解题中的应用	115
第 12 章 抽象与概括	117
12.1 抽象概述与过程	117
12.1.1 抽象概述	117
12.1.2 抽象过程	117
12.2 数学抽象的特征	119
12.3 抽象类型	120
12.4 概括概述与过程	121
12.4.1 概括概述	121
12.4.2 概括过程	122
12.4.3 概括与抽象的关系	123
12.5 抽象与概括应用举例	124
12.5.1 抽象分析方法及数学模型的基本思想	124
12.5.2 实际问题转化为数学模型	124
12.5.3 概括方法应用	127
12.5.4 培养学生抽象概括能力	128
第 13 章 归纳与演绎	132
13.1 归纳与演绎方法概述	132
13.2 归纳方法	133
13.2.1 归纳推理及其分类	133

13.2.2	不完全归纳法	135
13.2.3	完全归纳法	137
13.2.4	完全归纳法的作用	138
13.2.5	在数学教学中注意培养学生的归纳能力	139
13.3	演绎方法	140
13.3.1	演绎推理及其分类	140
13.3.2	三段论	141
13.3.3	在数学教学中培养学生的演绎推理能力	143
第 14 章	计算与算法	145
14.1	计算概述	145
14.2	算法概述	146
14.3	算法特点	147
14.4	算法举例	149
第 15 章	应用与建模	151
15.1	数学模型方法概述	151
15.1.1	数学模型	151
15.1.2	数学模型方法	152
15.2	数学模型建立	153
15.3	数学模型方法举例	159
第 16 章	形象思维	163
16.1	形象思维概述	163
16.2	形象思维材料特征及应用	164
16.2.1	形象思维材料特征	164
16.2.2	形象思维材料应用	167
16.3	激发学生形象思维的途径	173
16.3.1	注重开展课堂学具的直观操作	174
16.3.2	注意启发学生对数与形进行相互转换的机智	175
16.3.3	注重培养学生的空间想象能力	175
第 17 章	灵感思维	178

17.1 灵感思维概述	178
17.1.1 灵感思维的定义与特征	178
17.1.2 灵感的作用与价值	180
17.1.3 灵感思维与逻辑思维的关系	180
17.2 灵感产生因素	181
17.3 诱发灵感	186
第 18 章 创造性思维	188
18.1 创造性思维概述	188
18.2 创造性思维特征	189
18.3 创造性思维主导成分——发散思维	192
18.4 影响创造性思维的智能因素与非智能因素	193
18.4.1 影响创造性思维的智能因素	193
18.4.2 影响创造性思维的非智能因素	195
18.5 创造性思维的培养	196
18.5.1 注意新旧知识的联系	197
18.5.2 注重学习兴趣的启发	197
18.5.3 注意思路的开拓	197
18.5.4 注重转换机智的培养	199
18.5.5 注重多向思维的启发	201
18.5.6 注重好奇心的培养	202
18.5.7 注重学具的作用	203
18.5.8 注重编题训练	204
第 19 章 数学思维与数学方法培养	207
19.1 数学教学中强调思维与方法的意义	207
19.2 数学方法的培养	208
19.3 数学思维培养	210
主要参考书目	213
专家评论	214

第 1 章 思维方法概述

1.1 思维概念及功能

思维科学与数学的关系极为密切。数学教学的主要任务之一就是培养学生的逻辑思维能力和直觉思维能力。所以，作为本书的开头，本章首先对思维与科学思维方法作简要介绍。

1.1.1 思维概念

科学的发展史，也是一部思维的发展史。特别是近代以来，随着各种科学知识爆炸现象的出现，人们的思想文化交流日趋频繁，人的思维也愈来愈复杂，人的认识客观世界的能力不断提高，于是，思维科学便应运而生。当今，对思维的研究已渗透到心理学、哲学、逻辑学、控制论、信息论等学科。那么，什么是思维呢？从心理学的角度来说，思维就是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律性的概括与间接反映。

1.1.2 思维结构

心理学对思维的研究包含两个层次，其一，是从大脑反映现实的本质和内在联系的过程方面揭示认识的高级形式，这属于人脑内交换信息的微观过程，亦称它为理性认识过程；其二，是研究外界的变化和发展何以成为意识事实，这可看作人脑与外界环境交换信息的宏观过程，亦称它为感性认识向理性认识的转化过程。其中感性认识包括感觉、知觉、表象，它们都是思维的基础，表象是感性认识向理性认识过渡的中介或桥梁。理性认识又包括概念、判断、推理，概念是思维的细胞和主要形式。

据此并依系统方法论的整体性原理，思维的物质性结构（区别于功能性结构）就是由感觉、知觉、表象、概念、判断、推理、思维基本规律和方法等要素及其

相互联系所构成的整体框架。它的框图见图 1.1。

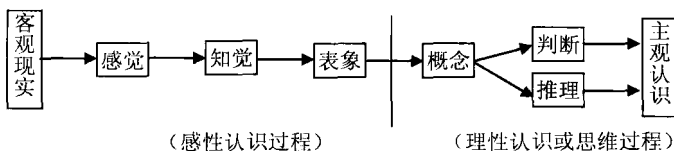


图 1.1

以上框架是人脑有目的地对客观事物运动规律性反映而来的，亦即由物质运动规律性转化为思维活动的过程。但是，一般来说人脑对客观事物运动变化规律的反映，不可能做到“镜面”反射，只能反映其重要的本质因素及其规律。用数学的观点来讲，由物质运动到思维活动一般来说不是一个同构映射而是一个同态映射。

思维结构是人们在现实客观世界中形成的，由最基本的要素构成的开放性系统，因而它在不断的演变、进化和发展。

1.1.3 思维功能

思维结构是指思维的物质性结构，然而诸要素各有其特定功能，于是产生了思维的功能性结构。所谓思维的功能是指思维结构的各个层次有目的的运动。当然，此处的功能是指整体功能，并非是要素功能的简单相加。在对思维功能进行具体陈述时，一个明显的事实是，没有有关的信息就无法进行思维。可见依信息论的观点看，思维的主要功能应该是接收信息、选择信息、过滤信息、加工信息、转化信息、储存信息、输出信息等。

1.2 思维特征

思维有哪些特征呢？从思维的特殊矛盾出发，我们认为它的特征主要有目的性和问题性、概括性、间接性，逻辑性等。

1.2.1 思维的目的性和问题性

有目的地认识、理解和解决问题是人类思维独特的本能。如果没有问题就

不会导致思维的产生。因此，我们必须通过发现问题、解决问题的过程，分析、研究思维的产生、发展过程和特点。

有意识地 and 能动地改造自然、改造社会、自控自己，只有人类思维才具有这种目的性。正像马克思所说，蜜蜂建造蜂房，不管怎样精巧，它和人类建筑师最大不同的特点是，人类建筑师在建筑一座房子之前，这座房子已在他的观念中完成了。所以，目的性是人们思维的根本特征。

1.2.2 思维的概括性

思维之所以能揭示客观事物的本质及其内在联系的规律性，即不仅能认识个别事物的本质属性，而且能从这些个别事物的本质属性推广到同类事物的本质属性，主要靠思维的概括性本领。

1.2.3 思维的间接性

思维是凭借已有知识和经验对客观事物进行的间接反映。首先，思维借助已有知识和经验，能对没有直接眼见耳闻的事物及其属性作出正确的判断。如人们早晨起来，发现大地是湿的，虽然晚间没有看见和听见下雨，但仍可作出昨晚下了雨的正确判断；其次，思维可以突破和超越已有知识和直感的界限。如在数学中将有限推广到无限以及科学假设的提出都是如此。

1.2.4 思维的逻辑性

思维的逻辑性是人的一种珍贵的品质。这种品质表现在考察问题遵循严格的逻辑顺序，在推理中有充足的逻辑依据。思维的逻辑性本源于客观事物的规律性，是人与动物本质区别的一个重要标志。

1.3 思维过程及分类

1.3.1 思维过程

思维是一种很复杂的心理现象，有直线性的过程，也有非直线性的过程，有

正向过程，也有逆向过程等。不论是哪种过程，大体都要经过分析与综合、抽象与概括、比较与类比、系统化与具体化等阶段。其中分析与综合是基础，抽象与概括是关键。

1.3.2 思维分类

思维活动是一种极为复杂且应变能力很强的心理现象，因此，对思维的分类就不可能有一个统一的模式。在此，我们只能大体上分为逻辑思维与非逻辑思维两大类。

逻辑思维主要有形式逻辑、数理逻辑和辩证逻辑。

形式逻辑是以思维形式、思维形式规律及思维方法为其研究对象的一门科学。其中主要的思维形式是概念、判断、推理，主要思维形式规律是同一律、矛盾律、排中律，主要思维方法是分析与综合、抽象与概括、归纳与演绎、比较与类比等。

形式逻辑的三个基本规律要求人们的思想（思维结果）有确定性、无矛盾性与一贯性。然而人们的认识是客观事物在人脑中的反映，况且客观事物在发展过程中充满着内在矛盾，因此，形式逻辑的基本规律只能从一个侧面反映客观事物在质、量及其属性方面的确定性，不可能全面揭示客观事物的矛盾转化和连续变化的规律性。从这个意义上讲，形式逻辑有它的片面性和局限性，但另一方面，任何事物不管其形式是简单的还是复杂的、连续的还是离散的、微观的还是宏观的、是相对静止状态还是运动发展变化状态，它们可能千变万化彼此相差很远，但它们毫无例外的都具有相对静止或相对稳定的一面，即都具有确定性的一面。所以又必须遵守和服从形式逻辑的基本规律。可见，从形式逻辑的适用范围来看，它的基本规律又是普遍有效的。

为了避免形式逻辑中日常语言的歧义性和其他的不确定因素，从 17 世纪起以莱布尼兹为首的数学家和逻辑学家，尝试用数学的方法来研究形式逻辑的有关问题，从而导致了数理逻辑的诞生。数理逻辑是在形式逻辑的基础上应用形式语言来构造的逻辑系统，其具体作法是，先将形式逻辑中涉及到的概念与判断、判断与判断之间的关系符号化。例如，用符号“ $\forall$ ”，“ $\exists$ ”分别表示全称量词和存在量词，用符号“ $\wedge$ ”，“ $\vee$ ”，“ $\neg$ ”分别表示逻辑连接词“和”，“或者”，“非”等，然后再将形式逻辑中所用的直观方法，用形式化的数学方法来代替。

由于数理逻辑运用了数学方法,到了19世纪末,数理逻辑研究的对象就转移到数学证明和数学公理方法等方面。到了本世纪40年代被广泛地运用于自动控制系统和电子计算机领域。

为了克服形式逻辑的片面性和局限性,使人们能够全面地揭示和描述客观事物在发展变化过程中的内部矛盾及其转化的规律性,就导致了辩证逻辑的诞生。

辩证逻辑研究的是思维形式如何正确反映客观事物的运动变化、事物的内部矛盾、事物的有机联系和转化问题。辩证逻辑研究对象的这种特殊矛盾的解决,一般都是以辩证思维方法为依据的。例如微积分极限概念中“ $\varepsilon-N$ ”定义的产生和形成过程,就带有辩证思维方法的色彩。它的主要特点是用有限量来描述和刻画无限过程以及有限与无限的矛盾转化。在这个定义的形式结构中,就是利用 ε 的可变与确定的二重性来反映有限与无限的矛盾转化的规律性。很明显,正是这个科学定义的产生,才使数学分析这座大厦得以在一个牢靠的基石上建立起来。当然,考虑到 ε 的二重性,我们说数学分析固然以变量作为它的研究对象,但却毫无例外地要遵守形式逻辑的一切规律。

辩证逻辑是一门比较新的学科,它是建立在形式逻辑基础上,是形式逻辑的延伸和发展。关于它的一般特征、规律及具体内容,人们还尚未取得一般的定论。

非逻辑思维主要有想象、直觉与灵感。

想象是人脑在原有表象的基础上加工改造形成新形象的心理过程。然而想象必须参与到思维过程中去,人如果没有同思维内容相联系的想象,思考就有困难,反之,思维活动如果没有想象参加,那就没有科学假说可言,更不会有科学的发明创造。想象在某种程度上似乎有些“超脱”现实,例如代数中的虚数。但记住下面的话是有益的:“纵使人们可以插上想象的翅膀自由飞翔,可也要有一双脚留在地上。”想象思维的主要特点是它的形象化与概括性,然而更重要的一点是具有创造性的认识功能。

直觉与灵感也是人类的基本思维形式。所谓“众里寻他千百度,蓦然回首,那人正在灯火阑珊处”,即指灵感。直觉与灵感的主要特点是它的直接性、突发性和创造性。

以上我们对思维的结构、特征、过程及其分类仅作了概括性的综述。