

经济数学基础

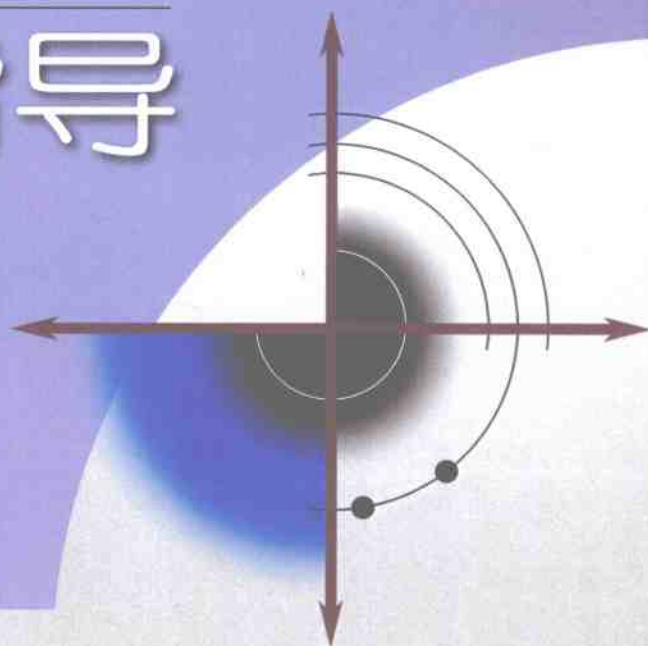
JINGJI SHUXUE JICHU



(二)

线性代数 学习指导

杨桂元◎主编



a_1 a_2 a_3

电子科技大学出版社

经济数学基础(二)

JINGJI SHUXUE JICHU

线性代数 学习指导

$a_1 a_2 a_3$

◎ 责任编辑 / 唐雅邻

◎ Design / 何东琳设计工作室

ISBN 978-7-81114-838-1



9 787811 148381 >

定价: 19.00 元

经济数学基础(二)

线性代数学习指导

杨桂元 主 编

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/杨桂元主编. —成都:电子科技大学出版社, 2008.9

(经济数学基础:2)

ISBN 978-7-81114-838-1

I. 线… II. 杨… III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 152300 号

经济数学基础(二)
线性代数学习指导
杨桂元 主编

出版: 电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编:610051)

策划编辑: 陈松明

责任编辑: 唐雅邻

主页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发行: 新华书店经销

印刷: 安徽省天歌印刷厂

成品尺寸: 170mm×228mm 印张 13 字数 241 千字

版次: 2008 年 9 月第一版

印次: 2008 年 9 月第一次印刷

书号: ISBN 978-7-81114-838-1

定价: 19.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 发行部电话: 028-83202463, 邮购部电话: 028-83208003。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

◆ 课件下载在我社主页“下载专区”。

前 言

《经济数学基础》系列教材(包括《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》)是安徽省高等学校精品课程《经济数学基础》的建设成果和配套使用教材,其中《线性代数》在2007年被确定为安徽省高等学校“十一五”规划教材。

为了进一步完善精品课程建设,满足广大师生教学和学习的需要,我们又组织课程组的教师编写了这套学习指导丛书,它既是与教材配套的辅导用书,也可以独立作为广大读者自学经济数学基础的参考。

本书各章内容与原教材相对应,每章由三个部分组成:

一、本章要点.对基本概念、基本方法、基本结论的概括以及相关内容之间联系的阐述,归纳精练、逻辑性强,便于学习时的理解和把握。

二、典型例题选讲.重点选择能体现所在章节基本方法和基本理论的例题,还包括贯穿该章内容的综合例题.通过求解和点评,向读者分析解题思路和解题步骤,让读者逐步学会解题方法,提高解题能力。

三、习题详解.给出了教材全部习题的正确解法和科学规范的书写格式,可供读者借鉴或模仿.特别是教材中的少量难题和近几年与硕士研究生数学入学考试相关的习题,都有一个较明确的解答.读者可以在自己动手做题的基础上阅读本部分并与之比对,以加深对教材中基本内容的理解和基本方法的掌握,达到增强解题能力、掌握解题技巧、提高应试成绩的效果。

《线性代数学习指导》是这套丛书的第二部分,由杨桂元教授主编,第一章和第六章由杨凌副教授编写,第二章和第四章由李勇副教授编写,第三章和第五章由唐晓静副教授编写.习题详解由杨桂元和冉翠玲老师编演.全书由主编统一修改定稿.在本书的出版过程中得到安徽财经大学统计与应用数学学院各位同行的大力支持,对此表示衷心的感谢!

由于水平有限,错误和疏漏之处在所难免,如有不当之处,敬请广大读者和同行批评指正,以便再版时及时修订。

编 者

2008年2月

目 录

第一章 行列式	1
一、本章要点	1
二、典型例题选讲	3
三、习题详解	9
第二章 矩阵	38
一、本章要点	38
二、典型例题选讲	40
三、习题详解	50
第三章 线性方程组	87
一、本章要点	87
二、典型例题选讲	90
三、习题详解	98
第四章 向量空间	129
一、本章要点	129
二、典型例题选讲	130
三、习题详解	136
第五章 矩阵的特征值与特征向量	152
一、本章要点	152
二、典型例题选讲	154
三、习题详解	162
第六章 二次型	177
一、本章要点	177
二、典型例题选讲	179
三、习题详解	183

第一章 行列式

一、本章要点

1. 行列式定义

n 阶行列式的定义是本章的一个难点,对此,可以从二阶、三阶行列式的展开式中各项的结构特点来理解 n 阶行列式的定义,重点应掌握 n 阶行列式 D_n 展开式的以下两个特点:

(1) D_n 等于它的所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,这里的“所有”是指对所有的 n 阶排列求和,而 n 阶排列共有 $n!$ 个,所以 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项;

(2) 展开式中每一项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前面所带符号为 $(-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)}$, 即当该项的行下标成自然序排列时,该项的符号由列下标所成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性来决定,因此展开式中的一项为 $(-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 故有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

用定义计算行列式需要做 $n!(n-1)$ 次乘法运算,当 n 很大时,计算量太大,而且还要确定每一项前面所带的符号,因此,行列式的定义一般用来计算含零元素比较多的行列式,或者确定行列式中指定的某些项.

2. 余子式、代数余子式和行列式按行(列)展开定理

掌握余子式和代数余子式的概念是运用行列式按行(列)展开定理的关键,也是计算高阶行列式的重要环节.

3. 行列式的性质与行列式的计算

由于用定义计算行列式的运算量太大,所以掌握行列式的基本计算方法是本章的重点,尤其是高阶行列式的计算,具有方法灵活、技巧性强等特点. 高阶行列式的计算也是本章的难点.

常用的计算方法如下:

(1) 二阶、三阶行列式可以直接用“对角线法则”计算,但高阶(四阶和四阶以

上)行列式绝对不能用“对角线法则”计算;

(2)化上(下)三角形行列式法 即利用行列式的性质,将行列式化为三角形行列式,然后利用三角形行列式的值直接计算;一般来说是化成上三角形行列式来计算,要求熟练掌握,因为这种处理方法是学习线性代数的“基本功”;

(3)降阶法 具体做法是利用行列式的性质,将行列式某行(列)元素尽可能地化为零,然后再按该行(列)展开,化为低一阶的行列式来计算;

(4)递推法 对于 n 阶行列式 D_n 利用降阶法或其他方法可以得到 n 阶行列式 D_n 与 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1} 的递推关系,即“递推公式”,由此递推公式,再用回代的方法或数学归纳法就可以计算 D_n 的值,我们将此种方法称为“递推法”。

高阶行列式的计算方法较多,可以通过适量的练习克服这一难点。

4. 特殊结构的行列式

(1)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

(2)范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

(3)奇数阶反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n-1} & -a_{2n-1} & -a_{3n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & -a_{n-1n} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5. 克莱姆法则

n 阶行列式的一个重要应用就是克莱姆法则,它是求解具有 n 个方程 n 个未知量且系数行列式不等于零的线性方程组的一个重要结论.即:含有 n 个方程 n 个未知量的线性方程组如果系数行列式不等于零,则有惟一的解,并且其解可以用公式给出.这个结论对以后讨论一般线性方程组解的情况具有重要意义.

含有 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充要条件是方程组的系数行列式 $D=0$.

二、典型例题选讲

例 1 利用行列式定义证明 $D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

证明 D_5 的展开式中一般项为 $(-1)^{r(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$, 其中 j_3, j_4, j_5 中至少有一个数取到 3, 4, 5 中的某一个, 即 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少有一个数为 0, 因此乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} = 0$. 故行列式展开式中任一项都为 0, 因此 $D_5 = 0$.

点评 本题要求用行列式定义证明, 关键在于说明展开式的任何一项中至少有一元素取自后三行的后三列, 即展开式中任何一项都含零元素, 因此展开式中任一项都为 0.

本题也可以用拉普拉斯定理证明.

例 2 多项式 $p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -x & 1 \\ 1 & 4 & x & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^4, x^3 的系数和常数项分别为().

A. $-6, 2, -6$ B. $-6, -2, 6$ C. $-6, 2, 6$ D. $-6, -2, -6$

解 由行列式的定义知, x^4 只能由主对角线上的 4 个元素乘积得到, 且此项前的符号为正号, 故 x^4 的系数为 -6 ; x^3 只能由对角线上的前两个元素和 $(4, 3)$ 位上元素与 $(3, 4)$ 位上元素的乘积得到, 且此项前为负号, 故 x^3 的系数为 -2 ; 而常数项是由所有不含 x 的项算得, 故令 $p(x)$ 中的 x 取 0, 算得其值 $p(0)$ 即是常数项, 易知其为 -6 . 故选 D.

点评 本题不需要展开行列式, 而是用行列式定义确定行列式中指定的某些

项,因此要求熟悉行列式展开式中一般项的特点.

例 3 若一个 n 阶行列式中所有元素均为 ± 1 , 试问该行列式的值是否必为偶数? 证明你的结论.

解 该行列式的值必为偶数.

首先因为以整数为元素的行列式其值必为整数, 所以 ± 1 为元素的 n 阶行列式必为整数. 再由行列式性质, 将第 2 行加到第 1 行后其值不变, 这时第 1 行的元素只能是 ± 2 或 0, 从而第 1 行有公因子 2, 提取第 1 行的公因子 2 后, 得到的行列式中的元素仍为整数. 故原行列式可以写成 2 与一个元素全为整数的行列式的乘积, 因此行列式的值必为偶数.

点评 证明本题应用了行列式的性质. 关键是利用结论“以整数为元素的行列式其值必为整数”, 这是个显然成立的结论, 但往往被忽视.

例 4 计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 首先注意到该行列式具有“每行元素之和都等于 $x + \sum_{i=1}^n a_i$ ”的特征, 将第 2, 3, $\cdots$, $n+1$ 列加到第 1 列后, 第 1 列出现公因子 $x + \sum_{i=1}^n a_i$, 提取公因子, 得

$$D_{n+1} = \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第 1 列的 $(-a_i)$ 倍加到第 $i+1$ 列 ($i=1, 2, \cdots, n$), 就可以把行列式化为下三角形行列式

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} \\ &= \left(x + \sum_{i=1}^n a_i\right) \prod_{i=1}^n (x-a_i) \end{aligned}$$

点评 观察行列式中的元素可发现,这个行列式各行(列)元素之和均为 $x + \sum_{i=1}^n a_i$,我们将具有这个特点的行列式称为行(列)和相等的行列式.计算这类行列式的第一步,是将第 $2, 3, \dots, n$ 列(行)加到第 1 列(行),并提取第 1 列(行)的公因子,将第 1 列(行)的元素都化成 1,然后再利用行列式的性质,就可以进一步简化行列式.

例 5 设 $|A|$ 为三阶行列式, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $|A|$ 的三列,则下列行列式中与 $|A|$ 等值的是().

A. $|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1|$

B. $|\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3|$

C. $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3|$

D. $|2\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2|$

解 由行列式性质,知

将 A 中行列式第一列加到第二列得 $|\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1|$,二、三两列对应元素成比例,其值等于 0.

将 B 中行列式第一列的 (-1) 倍加到第二列得, $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3|$;然后再将第一列和第二列的 (-1) 倍都加到第三列,得 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = |A|$.

将 C 中行列式第二列加到第一列,得到 $|2\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3|$;然后再将第一列的 $(-1/2)$ 倍加到第二列,得 $|2\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3| = -2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$.

D 中行列式的第一列是第二列的 (-3) 倍与第三列的 2 倍之和,其值等于 0. 故选 B.

点评 由行列式性质 4 知,如果行列式某行(列)的每一个元素都是两项的和,则可拆成两个行列式的和;如果行列式中有 m 个行(列)的每一个元素都是两项的和,则可拆成 2^m 个行列式的和,其中有些行列式中某些行(列)对应元素成比例,其值为 0,排除这些值为 0 的行列式,即可计算出原行列式的值.但直接应用行列式的性质 5“将行列式某一行(列)的倍数加到另一行(列)上去其值不变”更加简捷.

例 6 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式,计算 $A_{41} +$

$A_{42} + A_{43} + A_{44}$.

解 由于 A_{ij} 与元素 a_{ij} 及其所在行、列的元素取值无关,因此将 D 中第四行的元素 $-1, 2, 3, 4$ 换成任意数 $a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$, 第四行元素的代数余子式仍然是 $A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$. 所以可以构造新行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

该行列式按第四行展开即为 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$, 从而有

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

点评 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 即为 D 的第四行元素的代数余子式之和. 解决这类问题的关键是利用行列式按一行(列)展开定理, 构造一个新的行列式, 新行列式的值即为所求问题的解. 如上例中, 若要计算第二列元素的余子式之和 $M_{12} + M_{22} + M_{32} + M_{42}$, 那么

$$M_{12} + M_{22} + M_{32} + M_{42} = -A_{12} + A_{22} - A_{32} + A_{42}$$

可将原行列式第二列元素换为 $-1, 1, -1, 1$, 构造新的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

这个行列式一、二两列对应元素成比例, 则

$$M_{12} + M_{22} + M_{32} + M_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

读者还可以思考, 如果需要计算一个行列式某行(列)部分元素的代数余子式之和或者部分元素的余子式之和, 应该如何计算.

例 7 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解 将 D_n 按第一行展开, 得 $D_n = 9D_{n-1} - 20D_{n-2}$, 从而有

$$\begin{aligned}
D_n - 5D_{n-1} &= 4D_{n-1} - 20D_{n-2} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2}) \\
&= 4^2(D_{n-2} - 5D_{n-3}) = \cdots = 4^{n-2}(D_2 - 5D_1) \\
D_n - 4D_{n-1} &= 5D_{n-1} - 20D_{n-2} = 5(D_{n-1} - 4D_{n-2}) \\
&= 5^2(D_{n-2} - 4D_{n-3}) = \cdots = 5^{n-2}(D_2 - 4D_1)
\end{aligned}$$

其中, $D_1=9, D_2=61$, 代入上面两式, 得

$$\begin{cases} D_n - 5D_{n-1} = 4^n \\ D_n - 4D_{n-1} = 5^n \end{cases}$$

解得 $D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$.

点评 本题行列式含零元素比较多, 非零元素呈带状分布在主对角线上下方. 计算这类带状的高阶行列式一般都采用递推法, 其关键是找出 D_n 与 D_{n-1} 之间的递推公式. 本例找出了 D_n, D_{n-1} 与 D_{n-2} 的关系, 不易计算, 重新整理公式后, 得到两个递推公式

$$\begin{cases} D_n - 5D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2}) \\ D_n - 4D_{n-1} = 5(D_{n-1} - 4D_{n-2}) \end{cases}$$

由这两个关系式, 可以比较简捷地计算出 D_n .

例 8 证明一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可由其图像上三个横坐标互不相同的点所惟一确定.

证明 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 是横坐标互不相同且在 $y=ax^2+bx+c$ 上的任意三点, 则有

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

它的系数行列式为

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \\
&= -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0
\end{aligned}$$

由克莱姆法则知, 方程组有惟一解. 因此 $y=ax^2+bx+c$ 由点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 惟一确定, 由 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的任意性, 结论得证.

点评 证明本题应用了克莱姆法则和范德蒙行列式的结论, 要求熟悉这两个概念. 所列方程组的系数行列式不是标准的范德蒙行列式, 交换该行列式的第 1 列与第 3 列后再转置, 即为范德蒙行列式.

$$\text{例 9 设 } D = \begin{vmatrix} 0 & a & -1 & 2 & -b \\ -a & 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ b & -5 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ 当 } a, b \text{ 为何值时, } D=0.$$

解 将行列式 D 中每行提取公因子 (-1) , 得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & -1 & 2 & -b \\ -a & 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ b & -5 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -a & 1 & -2 & b \\ a & 0 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 & 0 & 0 \\ -b & 5 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^5 D^T = -D^T = -D$$

所以 $D=0$.

这是五阶的反对称行列式 ($a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, 3, 4, 5$), 其值等于零. 根据算法可以推得, 奇数阶的反对称行列式其值为零, 即不论 a, b 为何值, 均有 $D=0$.

点评 本题推出了一个重要结论: 奇数阶反对称行列式的值等于零. 这也属于特殊行列式的结果. 掌握一些特殊行列式的计算方法和结果, 可以简化计算, 有助于提高解题速度和能力.

$$\text{例 10 证明 } V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i).$$

$$\text{证明 作范德蒙行列式 } V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & y^3 \end{vmatrix}$$

一方面, V_3 就是 V_4 中 y 的余子式 M_{24} , 也就是 y 的代数余子式 $A_{24} = M_{24}$; 另一方面, 将 V_4 按最后一列展开将 y 按升幂排列, 得

$$V_4 = A_{14} + yA_{24} + y^2A_{34} + y^3A_{44}$$

因此, 所求 V_3 恰好是 V_4 中的 y 的一次项的系数. 根据范德蒙行列式的结论

$$V_4 = (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i)$$

$(y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)$ 中 y 的一次项的系数为 $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$.

$$\text{所以, } V_3 = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i).$$

点评 本题利用范德蒙行列式的结论计算与范德蒙行列式结构相近的行列式,通过本题的分析,读者应该能够计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

并推广到 n 阶的情况.

三、习题详解

练习 1-1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix} = \log_a b \log_b a - 1 = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^3 & a^2-a+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^3 & a^2-a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-a+1) - a^3 = 1$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 12 + 3 - 2 + 0 = 12$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 32 + 27 - 8 - 36 - 15 = 5$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + abc - abc + b^2 + a^2 + c^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

2. 解线性方程组:

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, 所以方程组有惟一

解, 再计算:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -46 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -69$$

$$\text{故} \quad x = \frac{D_1}{D} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = 3.$$

$$(2) \quad \begin{cases} x + ay = a^2 \\ x + by = b^2 \end{cases} \quad (a \neq b)$$

解 因为方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0$, 所以方程组有惟一解,

再计算:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ b^2 & b \end{vmatrix} = ab(a - b) \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} = b^2 - a^2$$

$$\text{故} \quad x = \frac{D_1}{D} = -ab, \quad y = \frac{D_2}{D} = a + b.$$

$$(3) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, 所以方程组有惟一

一解,再计算:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 45 - 15 - 27 - 25 + 5 = -12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -5 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 100 + 81 - 60 + 90 - 15 = 6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 20 - 15 - 20 + 10 + 27 = 0$$

故 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = -1, x_3 = \frac{D_3}{D} = 0.$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$, 所以方程组有惟

一解,再计算:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -81 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -135$$

故 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, x_2 = \frac{D_2}{D} = 4, x_3 = \frac{D_3}{D} = 5.$

3. 求下列排列的逆序数:

(1) 6312547

解 $\tau(6312547) = 5 + 2 + 1 = 8$

(2) 134782695

解 $\tau(134782695) = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 1 = 10$

(3) $135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)$