数学分析的内容与解题方法

李庆春　高述春　主编

青岛海洋大学出版社

前　言

本书是为报考硕士研究生的大学生编写的数学分析复习指导书，也可作为高年级开设“数学分析”提高课的参考书。通过本书的学习，能抓住数学分析的重点，掌握解题的思路和方法，把握解题技巧，提高数学分析的素养和应试能力。

全书分十章：数列极限，函数及其极限，导数与微分，一元函数积分，中值定理，极值，不等式，多元函数积分，积分的应用，级数。

本书囊括了理工、师范等各类院校各专业历年研究生入学考试的数学分析试题。经过筛选，题目类型齐全，命题形式多样，解题方法和技巧广泛，既包括有一定难度的基本题，又包括一些难度较大、技巧性较强的综合题。

本书具有以下特点：

1．在结构上，打乱了一般数学分析教科书的顺序，按照题目的类型和解题用到的主要知识为线索划分章节，把数学分析的内容和解题方法作了高度的概括。

2．在内容上，着眼于基本概念、基本理论和基本解题方法和技巧的介绍，每节编写三部分内容：知识、例题和习题。知识包括该节解题时用到的主要知识，重点突出，概括性强，详略分明，便于掌握和应用；例题包括各种类型的题目，由浅入深，不重复无遗漏，综合性强；习题与例题相对应，供读者实践练习用。

3．在例题的解答中，解题规范，详略得当；对难题有分析或提示，追根溯源，分析解题思路；在适当的地方，对问题的类

型、解题思路和方法进行了归纳总结，探究解题规律。通过例题的选解，可以起到举一反三、触类旁通的作用。

4．书末附有习题的答案与提示。对简单题只写出答案；对较难题写出提示，指出解题思路或主要步骤；对难题写出启发性的解答。

本书难免有不妥与疏漏甚至错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

1990年9月

本书用到的一些数学符号

$\forall$	任意给定
$\exists$	存在
$\exists!$	存在且唯一
$\Rightarrow$	推出
$\not\Rightarrow$	不能推出
$\Leftrightarrow$	当且仅当
R^n	n维欧氏空间
$\operatorname{sgn} x$	符号函数
$e^x, \exp x$	指数函数
$[x]$	x的整数部分
$\|x\|$	x的范数或模
$\uparrow(\downarrow)$	单调增加（减少）趋于
$\to$	收敛于，趋于
$\not\to$	不趋于
$\rightrightarrows$	一致收敛于
$\max\limits_{x\in E} f(x)$	$f(x)$在数集E上的最大值
$\min\limits_{x\in E} f(x)$	$f(x)$在数集E上的最小值
$\sup\limits_{x\in E} f(x)$	$f(x)$在数集E上的上确界
$\inf\limits_{x\in E} f(x)$	$f(x)$在数集E上的下确界
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
$Y\sim X$	变量Y与X等价，即$\lim\dfrac{Y}{X}=1$
$Y=o(X)$	变量Y是比X高阶无穷小量，即

	$\lim \frac{Y}{X}=0$
$Y=O(X)$	$\left\|\frac{Y}{X}\right\|$是有界量
$n!$	n的阶乘，即$1\cdot 2\cdots n$
$(2n)!!$	$2n$的双阶乘，即$2\cdot 4\cdots(2n)$
$(2n+1)!!$	$2n+1$的双阶乘，即$1\cdot 3\cdots(2n+1)$
C_n^k，$\binom{n}{k}$	二项式系数，即$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
$\vec{a}$	向量（或矢量）
$\overrightarrow{AB}$	向量（始点为A，终点为B）
$\|\vec{a}\|$	向量的长度（模，绝对值）
$\vec{a}\cdot\vec{b}$（或$\vec{a}\ \vec{b}$）	内积，点积
$\vec{a}\times\vec{b}$	外积，叉积
$\mathrm{grad}\varphi$，$\nabla\varphi$	φ的梯度
$\mathrm{div}\,\vec{a}$，$\nabla\cdot\vec{a}$	$\vec{a}$的散度
$\mathrm{rot}\,\vec{a}$，$\nabla\times\vec{a}$	$\vec{a}$的旋度
$\nabla^2\varphi$	拉普拉斯算子
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$	函数行列式（雅可比式）$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$
$B[a,b]$	区间$[a,b]$上有界函数全体
$C^0[a,b]$，$C[a,b]$	区间$[a,b]$上连续函数全体
$C^k[a,b]$	区间$[a,b]$上具有k阶连续导数的函数全体
$D^k[a,b]$	区间$[a,b]$上有k阶导数的函数全体
$R[a,b]$	区间$[a,b]$上Riemann可积函数全体

目　录

第一章　数列极限

§1·1　利用极限概念和运算法则求极限

1．数列极限概念

设$\{x_n\}$是一个数列，a是一个常数。若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N，使当$n>N$时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$成立，则称数列$\{x_n\}$收敛于a，称a为它的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

如果数列$\{x_n\}$没有极限，则称它不收敛或发散。

2．数列极限的柯西准则

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N，使当$n,m>N$时，$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

3．数列极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，则有：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$。

4．几个常用的极限关系式

(1)　$\log_an\leqslant n^k\leqslant c^n\leqslant n!\leqslant n^n(a>0,k>0,c>1)$，　当$n\to\infty$时，$\dfrac{\log_an}{n^k}$，$\dfrac{n^k}{c^n}$，$\dfrac{c^n}{n!}$，$\dfrac{n!}{n^n}$都以0为极限。

(2)　当$n\to\infty$时，$\sqrt[n]{a}$，$\sqrt[n]{n}$，$\sqrt[n]{n^k}(a>0，k>0)$都以

1 为极限。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

(5) 若 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$$

(6) 设 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$.

(8) Stolz定理：若 $\{y_n\}\uparrow+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在, 则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

(9) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=c+\ln n+\varepsilon_n$, 其中 $c=0.577216\cdots$ 为欧拉常数, $\varepsilon_n\to0\ (n\to\infty)$.

例1 设 $|x|<1$, 求

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 因为

$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\cdots=(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}},$$

所以当$|x|<1$时，有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x}.$$

例 2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

注 例1和例2这类数列极限，数列的通项为n项积的形式．要利用恒等变形将通项化简为已知极限的代数式，常遇到下面几种情形：①用平方差公式逐次相乘；②用商式法，即将乘积因子化成商的形式，交叉相约得前n项的积；③用倍角三角公式来化简．

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{n-1}{n}a\right)\right]$.

解 应用等差数列求和公式，有

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{(n-1)a}{2}\right]=x+\frac{a}{2}$.

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解 根据自然数求和公式，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$$

$$=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=1+2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=2-\frac{2}{n+1}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2$.

注 例3和例4这类数列极限，数列的通项中出现n项和的形式。解法的基本思想是利用恒等变形把通项化简成易求极限的形式。常用下列一些办法：①用自然数求和公式；②用自然数的平方（或立方）求和公式；③用等比数列或等差数列求和公式；④部分分式法，即将和中的项化为部分分式，前后抵消得n项和。

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例6 求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^m$.

解 原式$=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}}\right]^{-\frac{n^2}{m^2}m}$

$$\lim_{m\to\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{m}\ln\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}}\right\}$$

$$=e^0=1.$$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解 将通项表示成欧拉数的形式：

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=(c+\ln 2n+\varepsilon_{2n})-(c+\ln n+\varepsilon_n)$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n.$$

由于 $\varepsilon_{2n}\to 0$，$\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

例 8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$.

证明 应用欧拉数，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(c+\ln n+\varepsilon_n)$$

$$=0\cdot c+1+0=1.$$

例 9 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\alpha}}$，$\alpha$为任意实数。

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}}\Big/\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

若$\alpha+1\leqslant 0$，则显然所求极限等于0。

若$\alpha+1>0$，则用Stolz定理，先计算：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}}.$$

设 $x_n=1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}$，$y_n=n^{\alpha+2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}-(n-1)^{\alpha+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}-\left[n^{\alpha+2}-(\alpha+2)n^{\alpha+1}+\dfrac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2!}n^\alpha-\cdots\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\alpha+2)-\dfrac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2!}n^{-1}+\cdots}=\frac{1}{\alpha+2}.$$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

因此，当$\alpha+1>0$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\alpha+2}}{\dfrac{1}{\alpha+1}}=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$$

注 例5—例9是利用本节4中列出的极限关系式求解的。

例10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

解 考虑以$u_n=\frac{2^n n!}{n^n}$为通项的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

根据比值判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛。因此，由级数收敛的必要条件，知$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$。

注 例10求极限的方法是级数法。用级数法求极限有两种类型：①由级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛的必要条件得$\lim_{n\to\infty}x_n=0$；②求极限$\lim_{n\to\infty}x_n$化为求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$(规定$x_0=0$)的和.

例11 已知：数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1+Ka_n(K\neq1)$。(1)求a_n；(2)若$\lim_{n\to\infty}S_n=1$，求K的取值范围。

解 (1)由$S_1=a_1=1+Ka_1$，得$a_1=\frac{1}{1-K}$。又由

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(1+Ka_n)-(1+Ka_{n-1})=Ka_n-Ka_{n-1},\end{aligned}$$

得 $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{K}{K-1}.$$

由此可见，数列$\{a_n\}$是一等比数列，首项$a_1=\frac{1}{1-K}$，公比

$q=\frac{K}{K-1}$. 因此，

$$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{1-K}\left(\frac{K}{K-1}\right)^{n-1}=-\frac{K^{n-1}}{(K-1)^n}.$$

(2) 由假设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，得

$$\lim_{n\to\infty}(1+Ka_n)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{K}{K-1}\right)^n\right]=1.$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{K}{K-1}\right)^n=0.$$

于是 $$\left|\frac{K}{1-K}\right|<1,$$

即 $$-1<\frac{K}{1-K}<1.$$

解这个不等式，得 $K<\frac{1}{2}$.

例12 判断极限 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n$ 是否存在，若存在求其值. 其中 Q_n 由以下方程定义：

$$Q_n^3+2Q_n+\frac{1}{n}=0\ (n=1,2,\cdots).$$

解 由 Q_n 的定义，有

$$|Q_n|=\left|-\frac{1}{n(Q_n^2+2)}\right|\leqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots).$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}Q_n=0.$$

注 在例11和例12中，数列的通项满足某种关系式. 要求数列的极限，首先要解出通项.

例13 证明：若 $S_n\to S(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=S.$$

并由此

(1)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$;

(2) 证明：$\beta_n>0$，且 $\beta_n\to\beta(n\to\infty)$，则

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\beta_k}\to\beta(n\to\infty);$$

(3) 证明：$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\to e(n\to\infty)$.

证明 由假设，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1=N_1(\varepsilon)$，使当$n>N_1$时，有

$$|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定N_1，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}-S\right|\\ \leqslant&\left|\frac{S_1+\cdots+S_{N_1}-N_1S}{n}\right|+\frac{|S_{N_1+1}-S|+\cdots+|S_n-S|}{n}\\ \leqslant&\left|\frac{S_1+\cdots+S_{N_1}-N_1S}{n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N_1}{n}.\end{aligned}$$

由于$S_1+\cdots+S_{N_1}-N_1S$是一个常数，故对上述ε，$\exists N_2=N_2(\varepsilon)>N_1$，使当$n>N_2$时，有

$$\left|\frac{S_1+\cdots+S_{N_1}-N_1S}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>N_1$，使当$n>N_2$时，有

$$\left|\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}-S\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{n-N_1}{n}\right)<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

依据已证明的结论，做下面的推导。

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\beta_k}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln\beta_1+\cdots+\ln\beta_n}{n}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\beta_1+\cdots+\ln\beta_n}{n}\right\}$$

$$=\exp\{\lim_{n\to\infty}\ln\beta_n\}=\exp\{\ln\beta\}=\beta.$$

(3) 设$u_0=1$，$u_k=\frac{K^k}{K!}$，$\beta_K=\frac{u_k}{u_{k-1}}$，则

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\beta_k}.$$

因为 $$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\beta_k}=\lim_{n\to\infty}\beta_n=e.$$

注 此题是关于数列极限的一个综合论证题。其结论就是本节4中的关系式(4)与(5)，可直接用于求极限。

习 题 1·1

1·1·1 求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,\mathrm{arctg}\,nx}{\sqrt{n^2+n}}$.

1·1·2 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\quad(x\neq0).$$