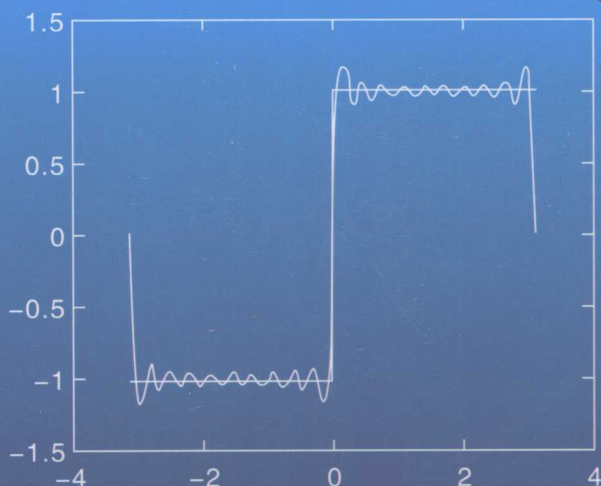


基于 MATLAB 和 LINGO 的数学实验



肖华勇 编著



西北工业大学出版社

基于 MATLAB 和 LINGO 的 数学实验

肖华勇 编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书介绍了 MATLAB 和 LINGO 的常用编程方法。书中设计的数学实验既有趣味数学问题实验,高等数学的微积分实验,线性代数的矩阵运算和求解方程组实验,概率中的模拟实验和中心极限定理实验,也有微分方程实验和应用广泛且有实用价值的神经网络实验,还有充满趣味的数字水印实验、数独实验。所有这些实验都是简单介绍原理,然后强调应用,并有完整的程序实现,便于读者直接上机实验。本书内容广泛,但并不追求高深理论,程序简洁易懂,让使用者容易掌握,做到学有所获。

本书可作为高等学校本科数学实验教材,也适合于读者自学。学习本书可为数学建模的学习打下一个良好的基础。

图书在版编目(CIP)数据

基于 MATLAB 和 LINGO 的数学实验/肖华勇编著. —西安:西北工业大学出版社,2009.3
ISBN 978 - 7 - 5612 - 2535 - 6

I. 基… II. 肖… III. 高等数学—实验—算法语言—应用软件, MATLAB、LINGO
IV. O13 - 33 O245

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 034827 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpu.com

印刷者:陕西向阳印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:9.375

字 数:223 千字

版 次:2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

定 价:17.00 元

前 言

大学生进入大学,通过一年多的时间学习了高等数学、线性代数和概率。然而这些知识都过分偏重理论和计算,缺乏自己动手进行计算机实验的实践内容,难以获得许多直观的效果。用笔进行的计算通常比较繁杂,不如在计算机上采用功能强大的软件计算来的简捷、便利、范围广。要对这些知识获得更加全方面的体会,就需要通过计算机上的数学实验达到这个效果。

比如,高等数学中关于一个方波的傅里叶展开只给出函数,难以获得直观的效果,然而通过计算机作图得到不同阶下的逼近效果,就可以获得直观的感受。又如,概率中的中心极限定理,书中一般是直接给出了定理。那么对定理中所述的在不同分布情形下多个随机变量的和的分布图形究竟是什么样的,难以理解,若用计算机作出不同个数随机变量的和的分布图形,就让人对中心极限定理有一个直观清晰的概念。这样,通过计算机实验,可以达到理论和直观的完美结合。对概率中的许多复杂的计算,其结果到底对否,怎么验证,或者不知道理论计算时怎么做,等等问题,通过随机模拟实验就会给出一个相当满意的回答。它既可以与理论计算相互印证,同时还可以解决许多理论上很难计算的问题,显示出计算机模拟的优越性。

因此,数学实验是通过学习、利用数学以获得对复杂数学问题直观感受的一个很好的途径(当然并非每一个数学问题都可以如此),而且再借助相应软件的使用,可以大大增强计算和公式推导的能力。

另一方面,许多大学生都渴望学习数学建模,并积极参加数学竞赛。而学好数学实验,掌握相应数学软件的使用,提高自己利用计算机计算的能力,无疑为学习数学建模,提高自己数学建模能力,打下了一个很好的基础。

在笔者看来,数学实验的地位起着一个承上启下的作用。承上,就是承接高等数学、线性代数和概率,使这些知识得到实验和应用;启下,就是为数学建模解决许多实际问题打下良好的基础。

本书选取的许多实验都十分有趣,其中的数学理论不复杂,编程也不难,十分便于学生学习和实验。通过本书学习,可以使学生对数学获得一种新的认识,增强自己的动手能力,同时在编程和数学软件的应用方面得到相当大的提高。

肖华勇

2008年9月

目 录

第一部分 MATLAB 使用简介	1
第一节 常用函数介绍	1
第二节 矩阵常见计算	2
第三节 函数作图	7
第四节 基本语句	11
第五节 M 文件	12
第二部分 基于 MATLAB 的数学实验	14
实验一 棋子游戏颜色变化实验	14
实验二 追逐问题实验	16
实验三 傅里叶级数实验	21
实验四 函数幂级数展开实验	23
实验五 数值积分与函数极值实验	25
实验六 样条插值实验	27
实验七 人口发展模型实验	36
实验八 线性方程组实验	44
实验九 动物繁殖问题实验	48
实验十 Markov 实验	50
实验十一 基于时间步长的仿真实验	57
实验十二 基于事件步长的仿真实验	62
实验十三 穷举法计算机实验	72
实验十四 概率问题随机模拟实验	84
实验十五 山羊与轿车选择的实验	89
实验十六 中心极限定理实验	91
实验十七 线性回归实验	94
实验十八 数字水印实验	104
实验十九 神经网络实验	108
第三部分 LINGO 软件使用简介及技巧	113
第一节 LINGO 使用介绍	113

第二节 LINGO 求解优化模型实验	115
第三节 LINGO 调用 VC 编写的函数动态库实验	119
第四部分 问题扩展实验	123
实验二十 LINGO 求解 TSP 实验	123
实验二十一 LINGO 求解数独实验	132
参考文献	143

第一部分 MATLAB 使用简介

MATLAB 是美国 Math Works 公司在 20 世纪 80 年代中期推出的数值计算软件,优秀的数值计算能力和卓越的数据可视化能力使其很快在数学软件中脱颖而出。到目前为止,已经推出 MATLAB 7.0。

MATLAB 的主要特点:

- (1) 有高性能数值计算的高级算法,特别适合矩阵代数领域;
- (2) 有大量事先定义的数学函数,并且有很强的用户自定义函数的能力;
- (3) 有强大的绘图功能以及具有教育、科学的图解和可视化的二维、三维图;
- (4) 有基于 HTML 的完整的帮助功能;
- (5) 采用适合个人应用的强有力的面向矩阵(向量)的高级程序设计语言;
- (6) 有与其他语言编写的程序结合和输入输出格式化数据的能力;
- (7) 有在多个应用领域解决难题的工具箱。

由于 MATLAB 编程方便,有大量内部函数和工具箱可以使用,作图也十分方便,因此在数学实验和数学建模竞赛中,就常使用 MATLAB 作为编程工具。

根据数学实验的需要,下面对 MATLAB 作简单介绍。

第一节 常用函数介绍

在 MATLAB 中常用函数的名称及其符号如下。

1. 三角函数

sin——正弦

sinh——双曲正弦

asin——反正弦

asinh——反双曲正弦

cos——余弦

cosh——双曲余弦

acos——反余弦

acosh——反双曲余弦

tan——正切

tanh——双曲正切

atan——反正切

atanh——反双曲正切

2. 指数函数与对数函数

exp —— 指数

log —— 以 e 为底的对数

log10 —— 常用对数

sqrt —— 平方根

3. 与复数有关的函数

abs —— 模或绝对值

angle —— 幅角

conj —— 复共轭

imag —— 虚部

real —— 实部

4. 舍入函数及其他数值函数

fix —— 向 0 舍入

floor —— 向负无穷舍入

ceil —— 向正无穷舍入

round —— 四舍五入

rem(a,b) —— 计算 a/b 的余数

sign(x) —— 符号函数

5. 有关向量的函数

min(x) —— 向量 x 的元素的最小值

max(x) —— 向量 x 元素的最大值

mean(x) —— 向量 x 的元素平均值

median(x) —— 向量 x 元素的中位数

std(x) —— 向量 x 元素的标准差

diff(x) —— 向量 x 的相邻元素的差

sort(x) —— 对向量 x 的元素进行排序

length(x) —— 向量 x 的元素个数

norm(x) —— 向量 x 的 Euclidean 长度

sum(x) —— 向量 x 的元素总和

prod(x) —— 向量 x 的元素连乘积

cumsum(x) —— 向量 x 的累计元素总和

cumprod(x) —— 向量 x 的累计元素总乘积

dot(x, y) —— 向量 x 和 y 的内积

cross(x, y) —— 向量 x 和 y 的外积

第二节 矩阵常见计算

1. 矩阵的输入

矩阵的输入最简单的方法是把矩阵的元素直接排列在方括号中, 每行内的元素间用空格

或逗号隔开,行与行之间用分号隔开。例如:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

输入为

$$\mathbf{A} = [1,4,7;3,6,9;6,7,4]$$

或

$$\mathbf{A} = [1,4,7; \\ 3,6,9; \\ 6,7,4]$$

输出结果为

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 4 \end{matrix}$$

2. 矩阵的转置

矩阵的转置用符号“ $'$ ”来表示,例如:

$$\mathbf{A} = [1,4,7;3,6,9;6,7,4];$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}'$$

则显示为

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 4 \end{matrix}$$

也可直接转置, $\mathbf{B} = [1,4,7;3,6,9;6,7,4]'$ 。

3. 矩阵的加减

矩阵的加减使用的是“ $+$ ”和“ $-$ ”运算符。进行矩阵加减运算必须是同型矩阵。例如:

$$\mathbf{A} = [1,3,6;4,5,7;7,8,9]$$

$$\mathbf{B} = [3,5,7;2,4,6;1,3,9]$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

则显示结果为

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} 4 & 8 & 13 \\ 6 & 9 & 13 \\ 8 & 11 & 18 \end{matrix}$$

令矩阵可以与一个数进行加减运算,运算法则是对应每个元素加减同一个数,如 $\mathbf{Z} = \mathbf{C} - 1$,则结果为

$$\mathbf{Z} = \begin{matrix} 3 & 7 & 12 \\ 5 & 8 & 12 \\ 7 & 10 & 17 \end{matrix}$$

4. 矩阵的乘法

矩阵的乘法用符号“ $*$ ”表示,要求前一矩阵的列数与后一矩阵的行数相同。例如:

$$\mathbf{A} = [1,4,7;2,5,8]$$

$$\mathbf{B} = [4,5,9;1,7,8;3,2,1]$$

$$C = A * B$$

则结果为

$$C = \begin{bmatrix} 29 & 47 & 48 \\ 37 & 61 & 66 \end{bmatrix}$$

另外, MATLAB 中还可以进行矩阵与数的乘法, 其规则是矩阵每个元素与该数相乘。例如:

$$A = [1, 5, 8; 2, 6, 9] \\ B = 3 * A$$

则结果为

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 24 \\ 6 & 18 & 27 \end{bmatrix}$$

5. 矩阵的行列式

求方阵 A 的行列式, 用 $\det(A)$ 表示。例如:

$$A = [1, 3, 6; 2, 5, 8; 3, 9, 11] \\ Z = \det(A)$$

则结果为

$$Z = 7$$

6. 矩阵求逆

非奇异矩阵 A 求逆用 $\text{inv}(A)$ 表示。例如:

$$A = [1, 3, 6; 2, 5, 8; 3, 9, 11] \\ Z = \text{inv}(A)$$

则结果为

$$Z = \begin{bmatrix} -2.4286 & 3.0000 & -0.8571 \\ 0.2857 & -1.0000 & 0.5714 \\ 0.4286 & 0 & -0.1429 \end{bmatrix}$$

如要验证, 可计算 $C = A * Z$, 结果为

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

利用逆矩阵可以解方程组。例如:

$$AX = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6; \\ 2 & 5 & 8; \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix} \\ b = [3 \quad 6 \quad 7]'$$

计算表达式为 $X = \text{inv}(A) * b$, 则结果为

$$X = \begin{bmatrix} 4.7143 \\ -1.1429 \\ 0.2857 \end{bmatrix}$$

或用 $X = A \backslash b$ 也可求解, 而且 $X = A \backslash b$ 还可以求解矛盾方程组。

下面进行函数拟合。

因变量 y 与自变量 x 之间存在如下关系:

$$y = a + be^{-x}$$

观测数据对为

$$\begin{array}{cccccc} x & 0.0 & 0.3 & 0.8 & 1.1 & 1.6 & 2.3 \\ y & 0.82 & 0.72 & 0.63 & 0.60 & 0.55 & 0.5 \end{array}$$

由此可建立矛盾方程组

$$AX = y$$

其中

$$X = [a, b]'$$

可建立如下 M 文件:

```
t = [0.0 0.3 0.8 1.1 1.6 2.3]';
y = [0.82 0.72 0.63 0.60 0.55 0.5]';
A = [ones(size(t)), exp(-t)];
X = inv(A' * A) * A' * y
```

或

$$X = A \backslash y$$

可得结果为

$$X = \begin{array}{c} 0.476 \ 0 \\ 0.341 \ 3 \end{array}$$

即

$$a = 0.476 \ 0, \quad b = 0.341 \ 3$$

函数拟合为

$$y = 0.476 + 0.341 \ 3 e^{-x}$$

结果如图 1.1 所示, M 文件如下:

```
t = [0.0 0.3 0.8 1.1 1.6 2.3]';
y = [0.82 0.72 0.63 0.60 0.55 0.5]';
A = [ones(size(t)), exp(-t)];
x = inv(A' * A) * A' * y
n = 500
tt = zeros(n,1);
yy = zeros(n,1);
dt = 2.3/n;
for i = 1:n
    tt(i) = i * dt;
    yy(i) = x(1) + x(2) * exp(-tt(i));
end
plot(t,y,'b',tt,yy,'r')
```

b——表示蓝色,代表原数据。

r——表示红色,代表拟合曲线。

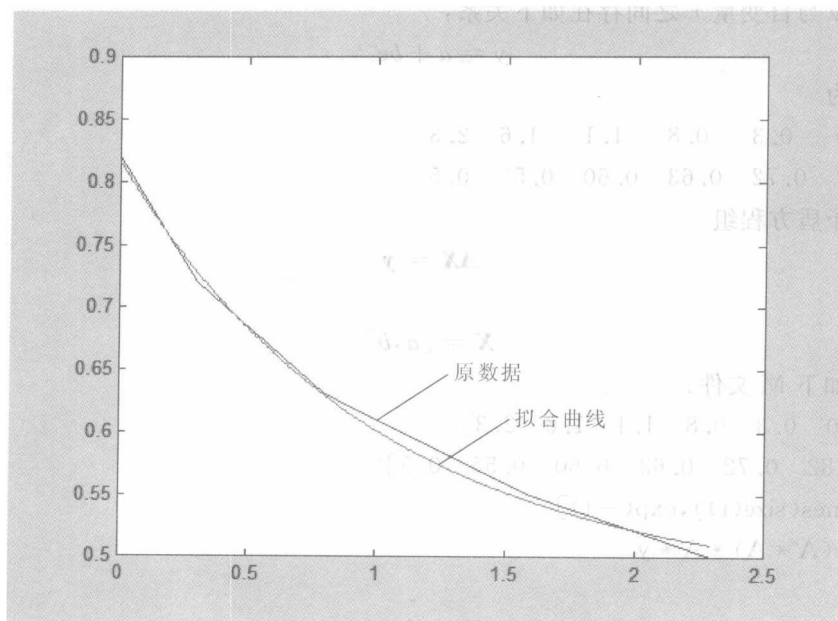


图 1.1 拟合曲线图

7. 矩阵的特征值

如果 A 为方阵,满足 $AX = \lambda X$ 的 λ 称为 A 的特征值, X 称为 A 的特征向量。

计算 A 的特征值用 $\text{eig}(A)$ 表示。例如:

$$A = [1, 3, 6; 2, 5, 8; 3, 6, 8]$$

$$Z = \text{eig}(A)$$

则结果为

$$Z = \begin{matrix} 15.2382 \\ -1.3365 \\ 0.0982 \end{matrix}$$

如要同时求出特征向量,采用表达式 $[X, V] = \text{eig}(A)$, 则结果为

$$X = \begin{matrix} -0.4135 & -0.7851 & 0.7318 \\ -0.6094 & -0.3748 & -0.6472 \\ -0.6765 & 0.4931 & 0.2136 \end{matrix}$$

$$V = \begin{matrix} 15.2382 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3365 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0982 \end{matrix}$$

其中, X 各列为特征向量, V 主对角元素为特征值。

第三节 函数作图

1. 二维平面曲线作图函数

`plot(x,y,'s')`

其中, x 和 y 是长度相同的向量, s 表示线型和颜色, 可以不选, 则采用默认方式。

如果作多条曲线在同一图上, 则用函数

`plot(x1,y1,'s1',x2,y2,'s2',...,xn,yn,'sn')`

若将 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 同时作在一张图上(见图 1.2), 区间取 $[0, \pi]$, 程序如下:

```
x = 0:0.1:2 * pi;
y1 = sin(x);
y2 = cos(x);
plot(x,y1,'r',x,y2,'b');
```

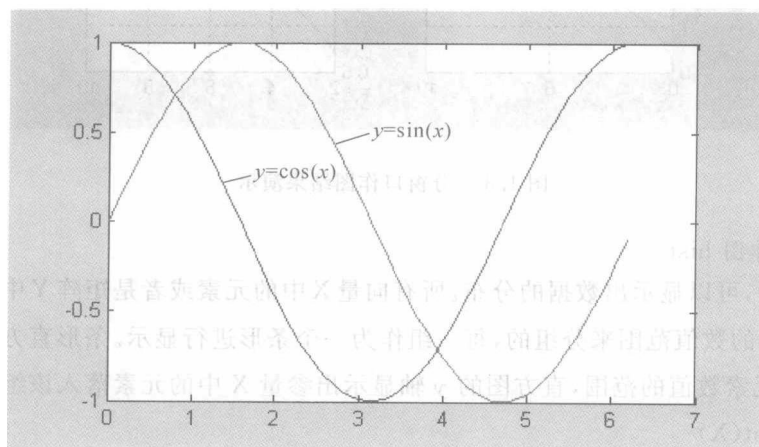


图 1.2 $y = \sin(x)$ 和 $y = \cos(x)$ 图形

2. 多窗口作图

如果将屏幕分为几个窗口分别作图, 采用函数:

`subplot(m,n,k)`

表示将窗口分为 $m \times n$ 个子窗口, 当前图在第 k 个窗口完成。

若要在第一个窗口作 $y = \sin(x)$, 第二个窗口作 $y = \cos(x)$, 第三个窗口作 $y = \sqrt{x}$, 第四个窗口作 $y = \ln(x)$, 程序如下:

```
x1 = 0:0.1:2 * pi; y1 = sin(x1);
x2 = -pi:0.1:pi; y2 = cos(x2);
x3 = 0:0.1:10; y3 = sqrt(x3);
x4 = 2:0.2:10; y4 = log(x4);
subplot(2,2,1); plot(x,y1); title('y = sin(x)'); grid on
subplot(2,2,2); plot(x2,y2); title('y = cos(x)'); grid on
```

subplot(2,2,3); plot(x3,y3); title('y = sqrt(x)'); grid on
 subplot(2,2,4); plot(x4,y4); title('y = ln(x)'); grid on
 图形如图 1.3 所示。

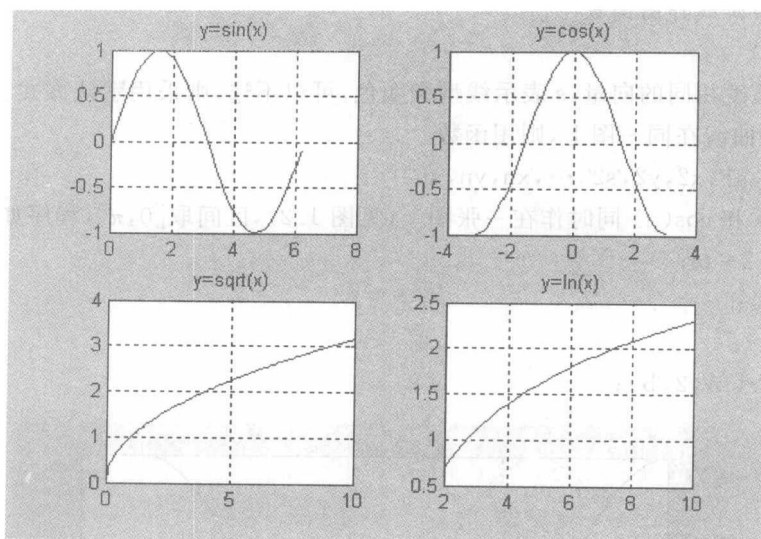


图 1.3 分窗口作图结果演示

3. 直方图作图 hist

二维直方图,可以显示出数据的分布。所有向量 X 中的元素或者是矩阵 Y 中的列向量中的元素是根据它们的数值范围来分组的,每一组作为一个条形进行显示。条形直方图中的 x 轴反映了数据 X 中元素数值的范围,直方图的 y 轴显示出参量 X 中的元素落入该组的数目。

```
count = hist(X)
```

该式表示把向量 X 中的元素放入等距的 10 个条形中,且返回每一个条形中的元素个数。若 X 为矩阵,则该命令按列对 X 进行处理。

```
count = hist(X,center)
```

参量 X 为向量,把 X 中元素放到 m ($m = \text{length}(\text{center})$) 个由 center 中元素指定的位置为中心的直方图中。

```
count = hist(X,number)
```

参量 number 为标量,用于指定条形的数目。

```
[count,center] = hist(X)
```

返回向量 X 中包含频率计数的 count 与条形的位置向量 center ,可以用命令 `bar(center, count)` 画出条形直方图。

例如,作 1 000 个服从正态分布 $N(10,5)$ 的数据的直方图,程序如下:

```
X = normrnd(10,5,1000,1);
```

```
z = hist(X);
```

结果图形如图 1.4 所示。采用下面的程序也可以：

```
X = normrnd(10,5,1000,1);  
[count,center] = hist(X);  
bar(center,count);
```

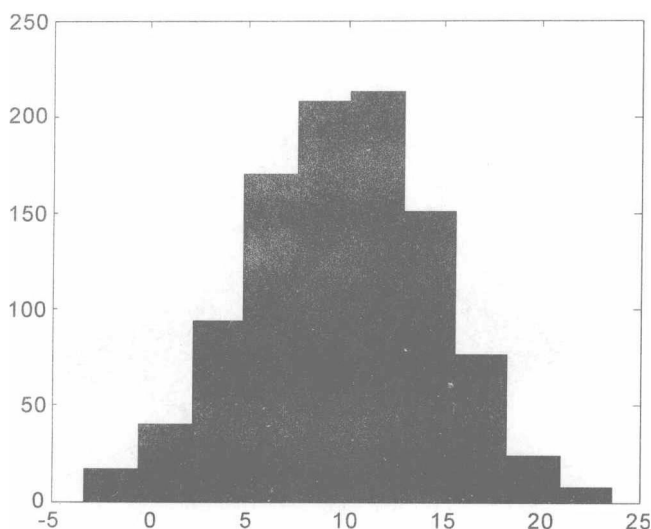


图 1.4 直方图

4. 二维图形注释命令 grid

功能:给图形的坐标面增加分隔线。该命令会对当前坐标轴的属性有影响。

用法:grid on 给当前的坐标轴增加分隔线。

grid off 从当前的坐标轴中去掉分隔线。

grid 转换分隔线的显示与否的状态。

grid(axes_handle,on | off) 对指定的坐标轴 axes_handle 是否显示分隔线。

5. 三维曲面作图

命令 1 mesh

功能:生成由 X,Y 和 Z 指定的网线面。

用法:mesh(X,Y,Z) 画出三维网格图,和曲面的高度相匹配。

(1) 若 X 与 Y 均为向量,则 $\text{length}(X) = n, \text{length}(Y) = m$, 而 $[m,n] = \text{size}(Z)$, 空间中的点 $(X(i), Y(j), Z(i,j))$ 为所画曲面网线的交点, 分别地, X 对应于 Z 的列, Y 对应于 Z 的行。

(2) 若 X 与 Y 均为矩阵, 则空间中的点 $(X(i,j), Y(i,j), Z(i,j))$ 为所画曲面的网线的交点。

mesh(Z) 由 $[n,m] = \text{size}(Z)$ 得, $X = 1:n$ 与 $Y = 1:m$, 其中 Z 为定义在矩形划分区域上的单值函数。

MATLAB 程序如下:

```
[X,Y] = meshgrid(-3:1/8:3);
```

```
Z = peaks(X,Y);
```

```
mesh(X,Y,Z);
```

结果图形如图 1.5 所示。

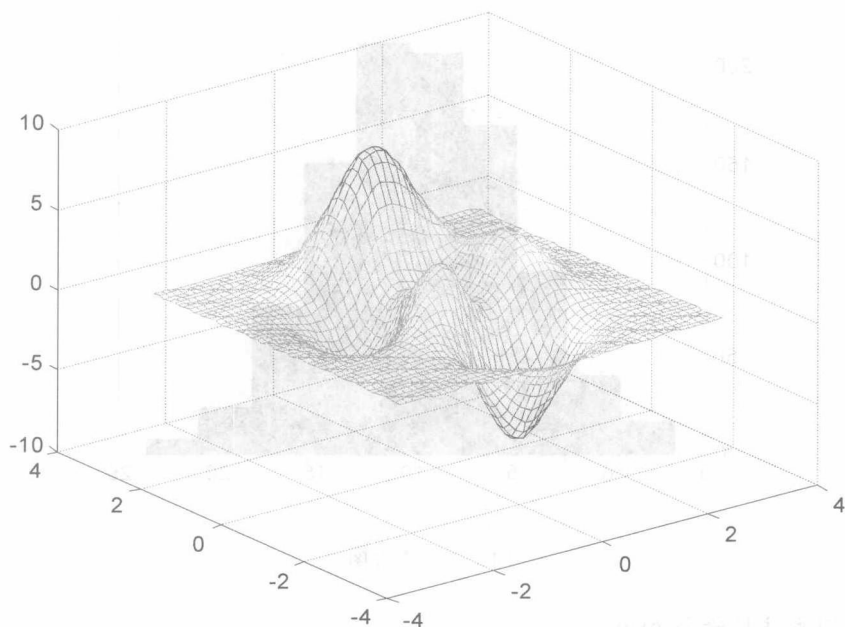


图 1.5 mesh 作图实例

命令 2 surf

功能:在矩形区域内显示三维带阴影曲面图。

用法:surf(Z) 生成一个由矩阵 Z 确定的三维带阴影的曲面图,其中, $[m,n] = \text{size}(Z)$,而 $X = 1:n, Y = 1:m$ 。高度 Z 为定义在一个几何矩形区域内的单值函数,Z 同时指定曲面高度数据的颜色,所以颜色对于曲面高度是恰当的。

surf(X,Y,Z) 中,数据 Z 同时为曲面高度,也是颜色数据;X 和 Y 为定义 x 坐标轴和 y 坐标轴的曲面数据。若 X 与 Y 均为向量,则 $\text{length}(X) = n, \text{length}(Y) = m$,而 $[m,n] = \text{size}(Z)$,在这种情况下,空间曲面上的节点为 $(X(i), Y(j), Z(i,j))$ 。

程序如下:

```
[X,Y] = meshgrid(-3:1/8:3);
```

```
Z = peaks(X,Y);
```

```
surf(X,Y,Z);
```

结果图形如图 1.6 所示。

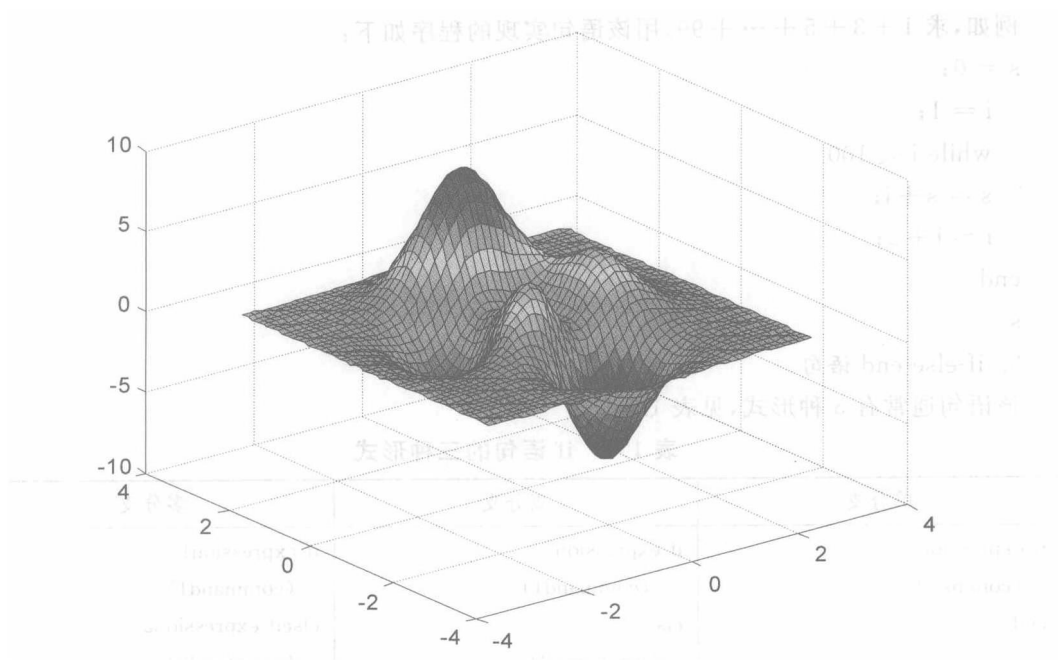


图 1.6 surf 作图实例

第四节 基本语句

1. for 语句

```
for x = a:d:b
```

```
    (command)
```

```
end
```

a 为起始点, b 为终止点, d 为区间间隔。循环体内为执行语句。

例如, 求 $1 + 3 + 5 + \dots + 99$ 。程序如下:

```
s = 0;
```

```
for i = 1:2:99
```

```
    s = s + i;
```

```
end
```

```
s
```

结果为 2500。

2. while 语句

```
while expression
```

```
    (command)
```

```
end
```

当 MATLAB 碰到 while 指令时, 首先检测 expression 的值。当为真时执行循环体中的语句, 并循环执行, 直到 expression 值为假才结束循环。