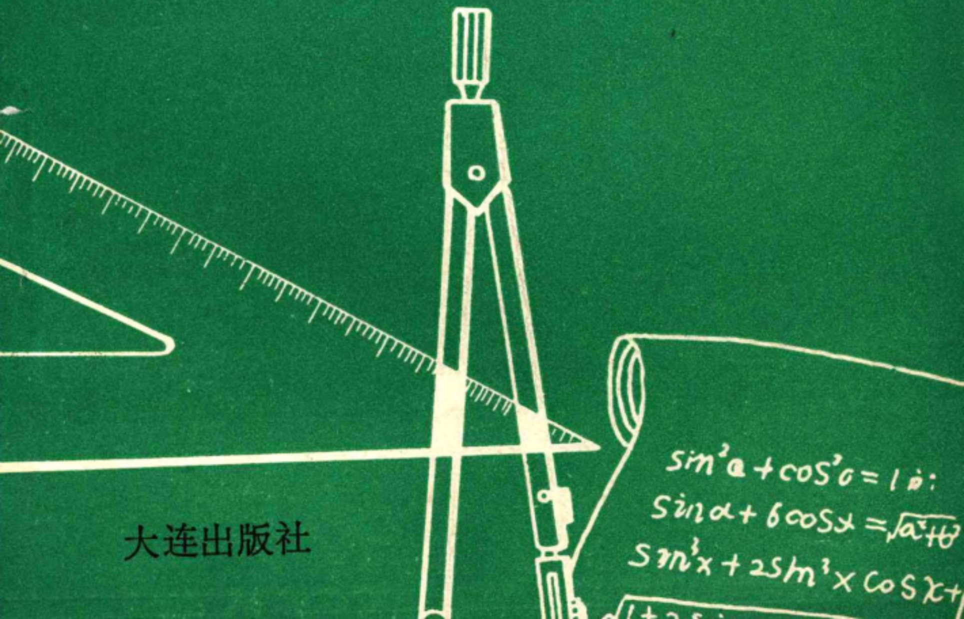
中 学 生 学 数 学

# 数和代数式的四则运算

王 良 编著



大连出版社

●青少年自学文库●

ISBN7-80555-404-8/G · 125

定价：1.90元

# 数和代数式的四则运算

玉 良 编著

大 连 出 版 社

**数和代数式的四则运算**

玉　良　编著

大连出版社出版　辽宁省新华书店发行
（大连市西岗区大公街市场南口）沈阳市第二印刷厂印刷

字数：80千　开本：787×1092　1/32　印张：5,625
印数：1—13000
1991年6月第1版　1991年6月第1次印刷

责任编辑：张洋　刘民　责任校对：王法生
封面设计：李克峻

ISBN7-80555-404/G·125

定价：1.90元

# 编者的话

从学习算术开始，到学会用字母表示数量关系，并将含有字母的式子进行各种变形，这是小学生到初中生在数学知识和能力方面的一个飞跃，这个飞跃完成得如何，对于进一步学习数学以及其他知识，都有着重要的影响。

为了帮助同学们顺利、出色地完成这个有意义的飞跃，本书的一个主要内容就是说明数与代数式从它们的概念、分类到运算规则和方法上的区别与联系。另外，我们由幂的运算将指数概念一步一步地推广，从中可以看出互逆运算的一种内在联系。

本书紧扣初中课本，但为了知识的系统性同时考虑学生的接受能力，又略高于课本。这是一本课外读物，因此在知识叙述上尽量简明而又不失全貌。

本书的例题都不是难题，主要是想通过典型例子进行学习方法的指导、思路的分析，以使同学们通过阅读它，结合个人的特点，掌握一个适合于自己学习数学的方法，并能提高分析问题能力，养成一个良好的思考习惯，形成一套较好的思维方式，为进一步学习打下良好的基础。希望同学们能学有所获。

# 目　　录

# 第一章　实数及其运算

## 一、数的家族

数是数学中的一个最主要的，也是最基本的概念。数产生于数数和测量。

在数的历史上，自然数最古老。现在自然数很容易被人们所接受、理解，然而从人类历史上看，人们把数与具体事物的集合分离出来却经历了一段很长的时期。人类形成数的概念，并引进了数字符号，反过来正是数字符号的引进，对人们认识自然数起了很重要的作用。数字符号不仅是抽象的数的具体化身，并且由于它的引进，给出了运用大数的可能性。

数的概念最先一次的扩展则是正分数的引进，它是由于测量的需要而产生的。同时，也反映出数学科学本身的需要。因为在自然数的集合里，除法运算并不是永远可以实施的。因此，正分数的引进，解决了这个矛盾，由此也提供了解决实际问题的新工具。

“0”表示“无”，它在数学里是非常重要的一个数，如108，180，一个表示十位数上没有数，一个表示个位数上没有数。而两者之间完全不同，起初人们往往空出一些地方来表明那一位上没有数，但这容易引起误会，因此采用了“0”这个记号。前面说过数字符号的引进给出了运用大数的可能性，那么“0”这个符号的引进就使得这种可能性变

成可行性。这样任何数，无论多大，均可用九个符号加上一个表示“无”的符号来记写，今天看来它如此简单，以至我们忽视了它的真正伟绩。但是从第一个数字符号开始计数到想出一个表示“无”的符号，竟占用了人类大约五千年的时间，至今还不清楚是谁成功地解决了这个问题，只知道可能是生活在不迟于9世纪的一个印度人（根据史料，最早载有零的印度人手稿是在9世纪末，其中写有370这个数）。

“0”不仅表示缺位，而且它作为数可以和自然数在一起进行比较（任何自然数都大于零），进行运算（只是零不能作为被减数、除数）。并且对于零来说，自然数加法、乘法的所有运算定律都成立。另外，从序数理论出发，零可以作为自然数1前面的一个数。

产生了零以后，又产生了负数，它是为了表示相反意义的量，如果“余钱”是正，那么“不足钱”就是负，也就是说比没有还少。因为零表示没有，所以比没有还少就是从零减去一个正数。有了负数以后，不仅大数能减小数，小数也能减大数，减法运算变得通行无阻了。

有了负数以后，正整数（自然数）、零和负整数统称为整数，正分数和负分数统称为分数。整数和分数统称为有理数。

自然数集用N表示，

整数集用Z表示，

有理数集用Q表示。

实际上，若将任一整数看成分母为1的分数，则有以下结论：任一有理数总可以表示成既约分数$\frac{m}{n}$的形式（其中

$m$为整数，$n$为自然数，$m$与$n$的最大公约数为1）．有理数写成小数的形式，一定是有限小数或者无限循环小数，如$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots$．

善于思考的同学一定会提出这样的问题，任一分数却可以表示成小数或无限循环小数，那么反过来任一小数或无限循环小数是不是都可以表示成一个精确的分数呢？回答是肯定的！

有限小数表示成分数很容易，例如：

$$0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}.$$

无限循环小数怎样表示成分数的形式呢？我们看下面的例子：$0.373737373737\cdots\cdots$

$$\because\quad 0.37=\frac{37}{100},\ 0.0037\frac{37}{10000},$$

$$0.3737=0.37+0.0037=\frac{37}{100}+\frac{37}{10000},$$

$$\therefore\quad 0.3737373737\cdots\cdots$$

$$=\frac{37}{100}+\frac{37}{10000}+\frac{37}{1000000}+\frac{37}{100000000}+\cdots$$

$$=37\times\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^8}+\cdots\right).$$

括号里的是公比为$\frac{1}{10^2}$的无穷递缩等比数列的和，上了高中就可以使用公式求出它的和为$\frac{1}{99}$，因此$0.3737373737$

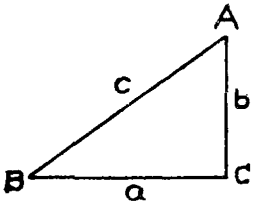
$\cdots\cdots=\frac{37}{99}$。同学们如果愿意的话，不妨把$\frac{37}{99}$再化成小数，看看得到的是什么样的小数。

当然同学们学了无穷递缩等比数列以后才能完全理解上面的内容，但这无关紧要，重要的在于能否提出问题，能否由一个命题想到它的逆命题等等。

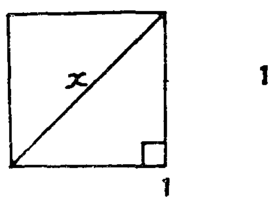
前面我们介绍了自然数、正分数、零和负数，可是不要以为最后介绍无理数就说明无理数的发现较它们都晚。事实上，无理数的发现是在公元前6世纪，比负数的产生还要早。可悲的是直到最近几百年无理数才被接受作为一个数，获得了和其它数同等的地位，像其它数一样进行各种运算和比较大小。

无理数是怎样发现的呢？

公元前6世纪，著名古希腊科学家毕达哥拉斯发现了几何学中的重要定理：在直角三角形里，两条直角边的平方和，一定等于斜边的平方。这个定理的一个直接结果是另一个新发现，“正方形的对角线是不可用整数或分数（即有理数）来表示的”。如，边长为1的正方形的对角线的长度为$\sqrt{2}$，而$\sqrt{2}$既不是整数，也不是整数的比。




$c^2=a^2+b^2$




$x^2=1^2+1^2=2$

这个发现使得毕达哥拉斯派诸人大为震惊，给这类数量

所取的名字就是最好的证据。这种数被叫做"阿洛贡"（*Alogon*），即不可说的意思。为什么"不可说"呢？因为数统治了毕达哥拉斯派的宇宙，这里所谓数，并非指这个字的现代意义，在这里占据最高统治地位的是自然数，他们认为宇宙间的一切现象都可以归结为整数或整数的比。因而企图将有理算术应用于所有几何问题，其结果便出现了数学史上的第一次危机。然而不可说的终于说出来了，毕达哥拉斯派的秘密已经成为一切有思想的人的共同财富。无理数的出现是不可避免的。

除了正方形的对角线，还有圆周，这两个相当简单的问题，揭示出数学上一种新实体的存在，这种实体在有理数范围中是没有立足之地的，因而数的概念必须进一步扩充。

无理数的引进，不仅联系着线段的度量问题而产生，也反映出数学科学自身发展的需要，因为有理数连解最简单的二次方程都不能完全胜任。例如方程$x^2=3$，在有理数范围内就没有解。

$\sqrt{2}$是人类最先认识的一个无理数，还有像$\sqrt{5}$，$\pi$，$e$，$\lg 2$，$\sin 10°$等等，它们都是无限而又不循环的小数。

虽然无理数是无限不循环的小数，但它总可以用有理数来表示它的达到任何精确度的近似值。

$\pi$是无理数，可是$\pi=\frac{c}{2R}$（$c$为圆周长，$R$为半径）这与有理数的表达形式一样吗？如果一样，$\pi$到底是不是无理数；如果不一样，请你说出为什么？

有理数和无理数统称为实数。实数集用R表示。

数的概念更进一步的扩展——虚数的引进，则与前几

次的扩展，性质上有所不同，它不是首先由于量的度量的需要，而是为了解决数学本身所提出的问题，即$x^2=-1$这个方程在实数范围内无解，为使负数开平方的运算能够进行，引进了一种新的数。但是这种数不能解释为直接计数或者测量的结果。人们把它叫做虚数。以后复数的直观的几何表示——复数表示平面上的点——出现了，虚数得到了具体的解释。在解决实际问题中得到了广泛的应用，这种新的数才被人们承认并且巩固下来。虚数这个名词，当$a+\sqrt{-b}$这种数量还没有找到具体的基础时，这样叫是有其理由的，但当这种数量一旦找到了解释，虚数这个名词就不适当了。

高斯这样说道：“这个论题被从这样一种谬误的观点来探讨，而且被这种神秘的暧昧所包围，主要是因为所用术语的不当。如果$+1$，$-1$，$\sqrt{-1}$不叫作正一，负一，虚数单位，而叫作，比如说，正向单位，反向单位，侧向单位，这种暧昧就可以避免了”。

实数和虚数统称为复数。复数集用C表示。

这样数可以有如下分类：

$$\begin{array}{c}\text{复数}\\(a+bi)\end{array}\left\{\begin{array}{l}\begin{array}{c}\text{实　数}\\(b=0)\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\left\{\begin{array}{l}\text{正整数（自然数）}\\0\\\text{负整数}\end{array}\right.\\[2ex]\text{分数（正、负）——小数或}\\\qquad\qquad\text{无限循环小数。}\end{array}\right.\\[2ex]\text{无理数（正、负）——无限不循环小数}\end{array}\right.\\[2ex]\begin{array}{c}\text{虚　数}\\(b\neq 0)\end{array}\end{array}\right.$$

注意：虚数无正负之分，也不能比较大小。这是与实数最大的不同之处。

上面的分类只是一种分类方法。另外还可以有其它的分

类方法。这里就不介绍了。

从前面简短的叙述中，我们应该注意到以下的几点：

（1）数的概念是逐步发展的。从历史发展过程来看，数的概念的发展是交错着的，但是从大体上来看，数的概念的发展过程是按照以下的逻辑顺序：

$$\text{自然数}\xrightarrow{\text{（正分数）}}\text{正有理数}\xrightarrow{\text{（零和负数）}}\text{有理数}$$

$$\xrightarrow{\text{（无理数）}}\text{实数}\xrightarrow{\text{（虚数）}}\text{复数}$$

在中小学数学课程中，关于数的概念的扩展，基本上就是按照上面的顺序（只是数零较早地引进了）。

不知同学们是否注意到：横线上括号里的数依次是由自然数开始每次进行数的概念的扩展时所产生的新数，而横线右边的数都是左边的数与横线上新产生的数的一个统称。

（2）数的概念产生于实际的需要，数集的每一次扩展，总是由于旧有的数集与解决具体问题间发生矛盾而引起的。这些问题有的是首先从实际中提出的（例如数集从自然数的集合扩展到实数的集合这一过程中，都是与量的计量问题联系着的），有些则是从数学本身首先提出的（例如虚数的引进），但即使如此，最后还必须取得实际的解释，才能被承认。

前面讲的数的分类，其中自然数还可以分为：

$$\text{自然数}\begin{cases}\text{质数（素数）——只能被 1 和本身整除的数}\\ 1\\ \text{合数}\end{cases}$$

注意：把 1 单独写说明 1 既不是质数也不是合数。

质数自古以来就是个极为有趣的问题，在各种求质数的方法中，最有趣的一种叫筛法，如图 1。

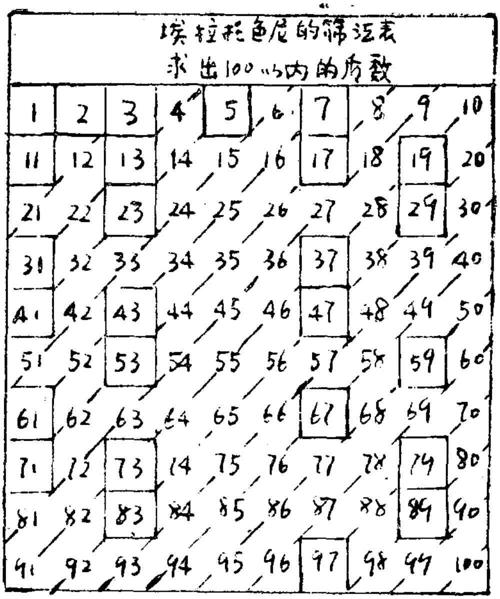



图1

把一个数写成质数的连乘积（即分解质因数）是很有用的。例如要求几个数的最大公约数和最小公倍数，都需要用到它。

例如：求84，180，264的最大公约数。

先分解质因数：$84=2^2\times3\times7$（相同的质数写成乘方的形式），$180=2^2\times3^2\times5$，$264=2^3\times3\times11$。

因此最大公约数为$2^2\times3=12$。

例如：求48，56，105的最小公倍数。

先分解质因数：$48=2^4\times3$，

$56=2^3\times7$，

$$105=3\times5\times7.$$

因此最小公倍数为：$2^4\times3\times5\times7=1680$。

如果两个数（自然数）的最大公约数是1，则称这两个数互质。

例如：求除以32、36、48都余15的最小数。

除以32，36，48都余15．设这个数为$M$，则$M=32k_1+15=36k_2+15=48k_3+15$，$k_1$、$k_2$、$k_3$为自然数，要求最小数，我们求32，36，48的最小公倍数，$32=2^5$，$36=2^2\times3^2$，$48=2^4\times3$。∴最小公倍数为$2^5\times3^2=288$（此时$k_1=9$，$k_2=8$，$k_3=6$），∴$M=288+15=303$。

整数分为正整数、负整数和中性数零，若按能否被2整除来分，则可分为：

$$整数\begin{cases}奇数（正、负）\quad 正奇数叫单数,\\ 偶数（正、0、负）正偶数叫双数。\end{cases}$$

注意：

① 0是偶数。

② 奇数和偶数是相间的，奇数$\pm1=$偶数，偶数$\pm1=$奇数，偶数可以表示为$2a$的形式，其中$n$为整数，那么奇数应该表示成什么形式呢？

③ 偶数是整数的一部分，但它们的个数却同样多，下面是它们的搭配方法：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}\cdots-n\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ -2n\cdots & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 2n & \cdots\end{array}$$

那么你能不能把奇数和整数一一搭配起来呢？请你试一试。

常用的奇数与偶数的运算性质有：

1. 偶数±偶数＝偶数；

   奇数±奇数＝偶数；

   偶数±奇数＝奇数；

   奇数个奇数的和是奇数；

   偶数个奇数的和是偶数。

2. 奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；

   偶数×偶数＝偶数。

请同学们思考下面的说法对不对？

1）质数一定为单数，单数一定为质数；

2）合数一定为双数，双数一定为合数；

3）最小的质数为1；

4）最小的质数为3；

5）质数中有唯一的一个偶数；

6）零是自然数中最小的一个偶数；

要紧扣定义来进行判断。

1）不对。因为2为质数又是双数，9为单数又是合数。

2）不对。9是合数又是单数，2为双数又为质数。

3）不对。1不是质数。

4）不对。最小的质数为2。

5）对。

6）不对。零不是自然数。

下面哪个数集有最小的数？并指出最小数。

1）自然数集；2）整数集；3）质数集；

4）合数集；5）有理数集；6）实数集；

7）单数集；8）双数集。

| 有最小数的数集 | 最小数 |
| --- | --- |
| 自然数集 | 1 |
| 单数集 | 1 |
| 质数集 | 2 |
| 双数集 | 2 |
| 合数集 | 4 |

在数学中，“0”和“1”是两个非常重要的数，请同学们总结归纳出几条性质。

在本书中，基本上是在实数范围里讨论问题，很少涉及复数。

## 二、数轴及其它

### 1. 数轴

在日常生活中，我们常常用直尺上的刻度表示长度，用温度计上的刻度表示温度（如图2），如果把直尺、温度计等看成一条直线，那么直尺或温度计上的刻度就缩为直线上一个点。

这实际上就是把实数直观地用直线上的点表示出来。

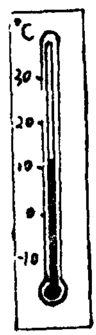


图2

同学们知道温度计上有的刻度表示0℃，有的刻度表示零上5℃，有的刻度表示零下5℃，那么我们的直线上也该有原点表示数0，这个点两边分别表示正和负，一般规定从左向右为正方向（用箭头表示），从右向左为负，再取一个度量单位，这样规定了原点、方向和度量单位的直线，叫做数轴（如图3）。