高等学校教材

概率论与数理统计

辽宁民族出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

主编　　徐茂林

辽宁民族出版社
1996·沈阳

辽新登字7号

高等学校教材

概率论与数理统计

主编 徐茂林

辽宁民族出版社出版发行 （沈阳市和平区北一马路108号）
内蒙古农牧学院印刷厂印刷

字数:212,000 开本850×1168毫米 1/32 印张:8.75
印数:1—1,000册
1996年6月第1版 1996年6月第1版第1次印刷

责任编辑:朱虹 封面设计:静文 责任校对:徐茂林

ISBN7—80527—726—5
G·323 定价:6.98元

内容简介

本书根据全国高等农业院校“概率论与数理统计课程教学基本要求”介绍了该课程的基本理论与方法。全书共十章，前五章为概率论部分，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机向量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括样本及其分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析方法简介。其特点是结构紧凑、叙述直观、明了、详细。每节配有适量的习题，书末附有习题答案及几种重要数表。

本书可作为高等农林院校农科专业或工科、经济类专业的教材，也可供工程技术人员参考。

前　　言

目前，概率论和数理统计的方法已广泛应用于社会科学、自然科学，技术科学及管理科学各邻域，在理论联系实际方面，它是数学最活跃的分支之一。正因如此，各高等院校理工专业、农林专业都设置了概率论或数理统计课程，以使学生初步掌握随机现象的基本理论和方法，培养他们解决有关实际问题的能力。编写本书的目的，就在于为上述课程提供教材或教学参考书。

本书内容分两部分。前五章为概率论部分，作为基础知识，它是读者所必需的。后五章为数理统计部分，主要讲述参数估计，假设检验，方差分析，并着重介绍了一元线性回归；读者可根据专业的需要进行选用。

在编写中，我们在选材和叙述上尽量从实际问题出发，注重应用。特别在概率这一重要概念的引入上，遵循由具体到抽象的一般思维逻辑，先讲述古典概率及统计概率的诸多实例及定义；然后，在读者具备了一定的感性认识的基础上，再抽象上升为概率的公理化定义。这样做的目的，在于将概率论纳入现代数学框架之中的同时，又针对非数学类专业学生的特点，力图把概念写的清晰易懂，以便于教学。在一些重要内容上，有时反复阐述，以利读者把住概念的实质，理解理论的实际意义。本书每节后都附有习题，以帮助读者理解内容，巩固所学知识。

本书可作为高等院校农科、工科或经济类专业的教材或教学参考书。

本书承蒙内蒙古高等学校蒙文教材编审委员会安振邦编审的审阅，并提出很多宝贵的意见，在此我们表示诚挚的感谢。

由于编者水平所限，时间匆促，一定存在不少缺点与错误，恳请读者指教。

编者

1996 年 1 月

目　　录

第一章　概率引论

概率论是从数量角度研究随机现象规律性的数学学科，它与其它数学分支紧密联系，是近代数学的重要组成部分。

早在十七世纪中叶，人们便开始对随机现象的研究，当时的模型很简单，就是现在通称的古典概型。并由此建立了概率论的一些基本概念，如事件、概率、随机变量、数学期望等等。其后，由于射击理论、人寿保险、测量误差等方面提出的一些概率问题，促使人们在概率论的极限定理方面进行深入的研究，这--研究在十八世纪和十九世纪整整二百年中一直是概率论研究的中心课题。本世纪初，概率论的公理化结构的建立奠定了其严格的数学基础，新的数学方法的引入，加之生物统计，统计物理，以及工程技术的有力推动，使概率论得到了飞速发展，其思想已渗透到各个学科，是近代科学技术发展的明显特征之一。目前，概率论在近代物理，自动控制，无线电技术，产品质量监控、农业试验、公用事业等邻域都得到重要应用，它与其它学科相结合形成不少边缘学科，如信息论、控制论、可靠性理论和人工智能等等。

概率论是研究随机现象规律性的学科，那么什么是随机现象呢？在自然界和人类社会中，存在着两类不同的现象。有一类现象在一定条件下必然会发生，或在一定条件下必然不会发生。例如，异性电荷必然相互吸引，而同性电荷必不相互吸引。这种现象，我们称之为确定性现象。概率论以外的数学分支研究的是确定性现象的数量规律。我们经常也会遇到另一类现象，它与确定性现象有着本质的区别。在个别试验中其结果呈现出不确定性；而在大量的重复试验中，又具有所谓的统计规律性。我们称之为随机现象。举

个简单例子来说，在相同条件下，抛掷一枚硬币，其结果可能是花边这面朝上，也可能是数字这面朝上，无法肯定抛掷的结果是什么，但多次重复抛一枚硬币，就会发现其中具有某种规律性，比如花边这面朝上大致有半数。概率论和数理统计正是研究和揭示随机现象这种统计规律性的一门数学学科。

§1—1 随机事件

一、随机试验与样本空间

对随机现象的研究必然要联系到对客观事物进行“观察”或“试验”。我们一般把各种科学试验或对某一事物的某一特性的观察都广义地作为试验。如果一个试验，可以在相同的条件下重复进行；试验的可能结果不只一个，并且在试验前不能准确预言发生这些结果中的哪一个，就称它为随机试验，简称试验。随机试验常用字母 E 表示。为了区分不同的试验，可用符号 E_1、E_2……等表示。表 1—1—1 列举了一些随机试验的例子。

对于随机试验，我们感兴趣的是试验的结果。尽管事先无法确定哪一结果会在试验中出现，但试验所有可能的结果所构成的集合却是知道的。我们把试验 E 所有可能的结果所构成的集合，称为 E 的样本空间，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。例如表 1—1—1 中各试验的样本空间分别如下：

$$S_1=\{+,-\}$$

$$S_2=\{++,+-,-+,--\}$$

$$S_3=\{0,1,2\}$$

这些样本空间只有有限个样本点，是比较简单的样本空间。

$$S_4=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$$

表 1—1—1

试验	条　　件	观察特征	可能结果
E_1	抛掷一枚硬币。	观察正面(+)及反面(—)出现的情况。	出现：正面(+)，反面(—)，共有两种不同的简单可能结果。
E_2	将一枚硬币连抛两次。(注意：这里将抛掷两次，联成一体看成一个试验)	观察正面(+)及反面(—)出现的情况。	出现：(+，+)，(+，—)，(—，+)，(—，—)。共四种不同的简单结果。
E_3	同 E_2 条件。	观察正面出现的次数。	出现："0 次"，"1 次"，"2 次"。共三种不同结果。
E_4	电话总机接收呼叫信号。	观察一分钟内接收的呼叫次数。	出现："0 次"，"1 次"，"2 次"，……。含有可列无限个不同的简单结果。还有呼叫次数"大于等于 5"等较复杂的结果。
E_5	从一批电子元件中任取一件使用。	观察使用寿命(从开始使用到首次失效所用时间)	使用寿命：$\{t\mid t\geqslant 0\}$ 含有无限多种不同结果，例如有：$\{t\mid t\geqslant 50\}$，…，$\{t\mid 10\leqslant t\leqslant 100\}$，…

这个样本空间含有无穷多个样本点，但样本点可以按某种次序排列，一般称它的样本点数为可列个。

$$S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$$

这个样本空间含有无穷多个样本点，它们充满一个区间，不是一个可列集。

可见，随着问题的不同，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂。在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步。值得指出的是，试验 E_2 和 E_3 都是将一玫硬币连抛两次，但由于研究的目的不同，其样本空间也不一样。因此，样本空间的元素一般取决于试验研究的目的。

二、随机事件

1. 事件的定义

有了样本空间的概念，就可以定义事件。对随机试验而言，我们常常关心的是满足某种条件的那些样本点所构成的样本空间的子集。我们还是从考察一个例子开始。

例 1—1—1　某袋中装有 4 只白球，2 只黑球，考虑依次从中摸两球所可能出现的事件。若对球进行编号，4 只白球分别编为 1，2，3，4 号，2 只黑球编为 5，6 号。如用数对 (i,j) 表示第一次摸得 i 号球，第二次摸得 j 号球，则可能出现的结果为：

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)

把这 30 个结果作为样本点，则构成了样本空间。比如，我们可以研究下面的一些事件：

A：第一次摸出黑球；

B：第二次摸出黑球；

C：第一次及第二次都摸出黑球。

这三个事件，都是由若干个样本点所构成的样本空间的子集。例如，事件 $A=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$，$A$ 出现必须且只需该子集样本点之一出现。

定义 1—1—1　样本空间 S 的某个子集 E，称为随机事件。称某事件发生，当且仅当它所包含的某一样本点出现。

通常把只含有一个样本点的事件称为基本事件。例如，该摸球试验有 30 个基本事件。我们把样本空间 S 也作为一个事件，因为

在每次试验中，必然出现 S 中的某个样本点，即 S 必然发生，故称为必然事件。类似地，把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称为不可能事件。必然事件和不可能事件可以说不是随机事件，但为了以后研究的方便，一般把它们作为随机事件的两个极端情形统一处理。

2. 事件的关系及运算

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件。通过简单事件的概率计算复杂事件的概率是概率论的重要研究课题之一。因此，有必要去研究事件之间的关系及运算。

(1)包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都含于 B 中，称事件 B 包含事件 A。记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。例如，$A=\{(1,2),(1,3)\}$，$B=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$，则 $A\subset B$，显然，对任何事件 A，必有 $S\supset A\supset\varnothing$。

若事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，即 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

(2)事件的积(交)：两个事件 A 与 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与 B 的积。它是由事件 A 与 B 的所有公共点构成的集合，记为 AB 或 $A\cap B$。

(3) 事件的和(并)：两个事件 A 与 B 中至少有一个发生，这一事件称为 A 与 B 的和，它是由 A 与 B 的所有样本点构成的集合，记为 $A\cup B$。

(4) 事件的差：事件“A 发生而 B 不发生”，称为事件 A 与事件 B 的差，它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点所构成的集合，记为 $A-B$。

(5)互斥事件：如果 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互斥，或互不相容；显然基本事件是两两互斥的。

(6)对立事件：事件“非 A”称为 A 的对立事件，它是由样本空间中不含于 A 的所有样本点构成的集合，记为 $\overline{A}$。显然，若 $\overline{A}$ 是 A