高等学校教学用書

微積分学教程

第一卷 第一分册

Γ. M. 菲赫金哥爾茨著

商务印書館

高等學校教學用書

微積分學教程

第一卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
楊弢亮 葉彦謙譯
樊映川校訂

商務印書館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的菲赫金哥爾茨(Г. М. Фихтенгольц)著"微積分學教程"(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第一卷1951年第三版(修訂版)譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立綜合大學數學系教學參考書。

本書(第一卷)第二分册出版。第一分册內容爲實數、極限論、一元函數、導數及微分、利用導數研究函數。第二分册內容爲多元函數、函數行列式及其應用、微分學在幾何上的應用。

本書(第一卷)由同濟大學楊彂亮、南京大學葉彥謙合譯，並由樊映川校訂。

微 積 分 學 教 程

第一卷 第一分册

楊彂亮 葉彥謙譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

北 京 市 印 刷 二 厂 印 刷

(13017·19)

1954年1月初版　　版面字數283.000

1956年8月3版　　9,001—11,000

印張 $10^{5}/_{16}$　　定價(8)￥1.20

第一分册目次

緒論　實數

§1. 有理數域

§2. 無理數的導入　實數域的順序

§3. 實數的算術運算

§4. 實數的其他性質及應用

第一章 極限論

§1. 整序變量及其極限

§2. 極限的定理 若干容易求得的極限

§3. 單調整序變量

§4. 收歛原理 部分極限

第二章 一元函數

§1. 函數概念

§2. 函數的極限

§3. 無窮小及無窮大的分級

§4. 函數的連續性及間斷

§5. 連續函數的性質

第三章 導數及微分

§1. 導數及其求法

§2. 微分

§2. 函數的作圖

§3. 不定式的定值法

§4. 方程式的近似解

緒論 實數

§1 有理數域

1. **前言** 讀者對於有理數及其性質，從中學的教材內便很熟悉了。在那時，初等數學的要求，已趨向於必需擴大數的領域。的確，在有理數中卽使是正整數(自然數)的根，例如$\sqrt{2}$，也常常並不存在。就是說並沒有這樣的有理數$\frac{p}{q}$(式中p及q—自然數)，其平方能等於2。

爲了證明，試假定其反面：設有分數$\frac{p}{q}$，其平方爲$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$。我們可以假設$\frac{p}{q}$是旣約分數，卽$p$和$q$是沒有公約數的。因$p^2=2q^2$，故$p$爲偶數；$p=2r$($r$—整數)，於是$q$爲奇數。用$p$的式子代入，得：$q^2=2r^2$，由此推得$q$爲偶數。所得的矛盾便證明了我們的命題。

同時，若我們僅停留在有理數的範圍內，那末在幾何學上便已知道，顯然並非一切的線段都能有一個長度。例如考察邊長爲單位長度的正方形。其對角線就不可能有有理長度$\frac{p}{q}$，因若不然，依畢達哥拉(Пифагора)定理，這長度的平方應等於2，而我們已看到這是不可能的。

在本緒論內，我們面臨着一個課題：在有理數域中添加上新的性質的數——無理數以擴大有理數域的範圍。同時，我們將指出，在對有理數施以算術的運算及用等號、不等號結合他們這兩方面的一切固有性質，在擴大的領域內仍然是眞實的。爲着要對擴大後的數域的上述性質眞能予以校正，則選出最小數目的基本性質，使其餘的一切性質都能

作爲形式邏輯的結果而從之推出，是一件很重要的事。因爲這樣一來，校正的工作，便僅限於對這些基本性質了。

因此，我們列舉下列一些有理數域的基本性質。在一列的例子內我們將順便證明，他們的另一些衆所週知的性質完全可以從基本性質推導出來。我們這裏說及"數"，總是指的有理數，字母 a,b 等卽表示這些有理數。

2. 有理數域的順序 首先讓我們約定：所謂相等的數就是同一數的各種不同形式。換言之，"相等"（$=$）的概念卽指"恆等"。因此，我們不再列舉相等的數的性質。

有理數域的順序得自"大於"（$>$）的概念，與之有關的是第一組性質

I 1° **每一對數 a 與 b 之間必有且僅有下列關係之一，**

$$a=b,\ a>b,\ a<b;$$

I 2° **由 $a>b$ 及 $b>c$ 推得 $a>c$（$>$的轉移性）；**

I 3° **若 $a>b$，則必能求得一數 c，使**

$$a>c,\ \text{且}\ c>b\text{❶}$$

（稠密性）。

"小於"（$<$）的概念作爲派生的而引入。說 $a<b$，當且僅當 $b>a$ 的情形。顯而易見，由 $a<b$ 及 $b<c$，卽得 $a<c$（$<$的轉移性）。實則，由假設，不等式 $a<b$ 及 $b<c$，相當於不等式 $b>a$ 及 $c>b$；由此推得 $c>a$（I 2°），或卽 $a<c$。

在對有理數施行算術運算時所要牽涉到的"大於"這一概念的其他性質，將在以後隨時指出之。

3. 有理數的加法及減法 第二組性質是關於加法的，卽關於求兩數之和的運算的。對於每一對數 a 及 b，存在着一個（唯一的）數，被稱爲 a 及 b 的和（記成 $a+b$）。這概念具有下列的性質：

❶ 在這條件下亦說成：數 c 位於數 a 與 b 之間；顯然，這樣的數有無限個之多。

II 1°　$a+b=b+a$（**加法的易位性**）；

II 2°　$(a+b)+c=a+(b+c)$（**加法的結合性**）。

特殊角色零具有特性；

II 3°　$a+0=a$；

此外，

II 4°　**對每一數** a **存在着（與他對稱的）數** $-a$，**使** $a+(-a)=0$。

在這些性質的基礎上，首先解決了加法的逆運算，減法的問題。通常稱使 $c+b=a$❶ 的數 c 為數 a 及 b 的差，假若如此，便發生這樣的數的存在及其唯一性的問題。

設 $c=a+(-b)$，則得 [II 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

如此，這 c 滿足於差的定義。

反之，令 c' 為數 a 及 b 的差，則有 $c'+b=a$。在這等式兩端各加 $(-b)$，並變換其左端 [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

結果得 $c'=a+(-b)=c$。

這樣，已證明數 a 及 b 的差的存在及單值性；把他記成 $a-b$。

由差的單值性推得一列的推論。首先，由 II 3° 推得 $0=a-a$，且得結論為：除去數 0 以外，具有相似於 II 3° 的性質的數並不存在。更由此推得與所給數對稱的數的唯一性：$-a=0-a$。最後，因由 $a+(-a)=0$ 可推得 $(-a)+a=0$ [II 1°]，所以 $a=-(-a)$，即數 a 及 $-a$ 為互相對稱的數。

我們再來證明對稱數滿足下述性質：

$$-(a+b)=(-a)+(-b):$$

為此，祇須證明 $(a+b)+[(-a)+(-b)]=0$，

而這由 II 1°, 2°, 4°, 3°，便可推得。

❶ 依 II 1°，這個差的定義式亦可寫成 $b+c=a$。

最後，再引進聯繫$>$與加號的一個性質，

II 5° 由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$。

它使我們得以在不等式的兩端各加上一個等量；用他又可證明兩不等式

$$a>b,\text{ 與 } a-b>0 \text{ 的相當性。}$$

其次，由 $a>b$ 推得 $-a<-b$。實則，由 $a>b$ 引致 $a-b>0$；但 $a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=(-b)-(-a)$，因此這不等式可改寫成：$(-b)-(-a)>0$，由此 $-b>-a$ 或 $-a<-b$。

特例，由 $a>0$ 推得 $-a<0$，由 $a<0$ 推得 $-a>0$。若 $a\neq 0$，則在兩個互相對稱的數 a 及 $-a$ 中，必有一個（且僅一個）將大於 0；他即稱爲數 a 或數 $-a$ 的絕對值，記成

$$|a|=|-a|.$$

零的絕對值假定就等於零：$|0|=0$.

根據 II 5° 的性質，可以逐項地合併不等式：由 $a>b$ 及 $c>d$ 推得 $a+c>b+d$。實因，由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$；仿此，由 $c>d$ 推得 $c+b>$ $>d+b$，或 [II 1°] $b+c>b+d$，然後由 I 2°，最後即得 $a+c>b+d$。

4. 有理數的乘法及除法 第三組性質是關於乘法的，即關於求兩數之乘積的運算的。對於每一對數 a 及 b 存在着一個（唯一的）數，被稱爲 a 及 b 的乘積（記成 $a\cdot b$ 或 ab）。這概念具有下列性質：

III 1° $ab=ba$（**乘法的易位性**）；

III 2° $(ab)c=a(bc)$（**乘法的結合性**）。

特殊角色壹具有特性

III 3° $a\cdot 1=a$；

此外，

III 4° **對於每一異於 0 的數 a，必有數 $\frac{1}{a}$（其倒數），使 $a\cdot\frac{1}{a}=1$。**

關於除法的問題，作爲乘法的逆運算，亦可基於乘法的性質來解決，正如前面所述，基於加法的性質來解決關於減法的問題一樣。倒數

在這裏所担任的角色正如對稱數在那裏所担任的一樣。

如果一數 c 滿足關係

$$c \cdot b = a\text{❶},$$

其中 b 常預先假定異於 0, 則 c 稱爲 a 及 b 的商。

令 $c = a \cdot \frac{1}{b}$, 就可以滿足這定義。因 [III 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

反之,若數 c' 滿足數 a 及 b 的商的定義，於是$c' \cdot b = a$, 在這等式兩端乘以$\frac{1}{b}$, 並變換左端 [III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

從而 $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$。

這樣，**數 a 及 b (設 $b \neq 0$) 的商的存在及單值性已得證明**；把它記成 $a:b$ 或$\frac{a}{b}$。

由商的單值性可知,除了 1 以外,再沒有什麼數能具有類似於III3°的性質。由此，如前所述，推得倒數（看成 1 及 a 的商）的唯一性；此外容易證明數 a 及$\frac{1}{a}$係互爲倒數。

下列性質於算術的基本運算——加法及乘法雙方都有關係：

III 5°　$(a+b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (**和的乘法分配性**)。

由此很易導出關於差的乘法分配性:

$$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

依差的定義,這可以直接由下式推出

$$(a-b) \cdot c + b \cdot c = [(a-b)+b] \cdot c = a \cdot c.$$

再應用性質 III 5°, 可證

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

實因 [II 3°]

$$a+0=a, \ (a+0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

❶ 依 III 1°, 這個商的定義式亦可寫成: $b \cdot c = a$。

由此推得 $0\cdot b=0$，再由 [III 1°] 得 $b\cdot 0=0$。

反之，若 $a\cdot b=0$ 又 $b\neq 0$，則必須 $a=0$。實因，$a=\frac{0}{b}$，但同時又有 $0=\frac{0}{b}$（因 $b\cdot 0=0$），因爲商是唯一的，故 $a=0$。

最後引進聯繫 $>$ 與乘號的一個性質：

III 6° **由 $a>b$ 及 $c>0$ 推得 $a\cdot c>b\cdot c$。**

據此可以用正數乘不等式的兩邊。由此可知，當 $a>0$ 及 $b>0$ 時，亦必有 $a\cdot b>0$。

注意 $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$；這由下面推得

$$a\cdot b+(-a)\cdot b=[a+(-a)]\cdot b=0\cdot b=0.$$

現在不難看出，若 $a<0$, $b>0$，於是 $a=-|a|$, $b=|b|$，則

$$a\cdot b=(-|a|)\cdot|b|=-(|a|\cdot|b|)<0;$$

當 $a>0$, $b<0$ 時亦如此，又若 $a<0$, $b<0$，則

$$a\cdot b=(-|a|)(-|b|)=-[|a|\cdot(-|b|)]=$$
$$=-[-(|a|\cdot|b|)]=|a|\cdot|b|>0.$$

這樣，我們已完全重新建立了關於乘法的符號規則，這些符號規則現在已成爲有理數的上列性質的邏輯推論了。換言之，**如果有理數要滿足上述諸性質，就必定要遵守這些符號規則。關於乘以 0 的規則，亦有同樣的話可以說**（如上所述）。

在處理了加法和乘法的性質以後，我們現在能夠證明在前面數的基本性質 [I 3°] 中已述及的有理數域的稠密性了。就是，可以用他們證明，例如，由 $a>b$ 推得 $a>\frac{a+b}{2}>b$。

5. **阿基米德公理** 我們用下列的簡單而重要的論證來結束我們的有理數基本性質一覽表。這一性質是不能由上述的諸性質裏推得的。

IV 1° **不論 $c>0$ 是怎樣的數，總有大於 c 的自然數 n 存在着。**（**《阿基米德公理》**）。

實際上，阿基米德曾說明一個幾何的命題，即爲衆所週知的《阿基米德公理》：

若在直線上給定任意兩線段 A 及 B，則 A 重複相加若干次後，其和總可以大於 B：

$$\underbrace{A+A+\cdots\cdots+A}_{n\text{ 次}}=A\cdot n>B.$$

若將這論證轉而敍述正數 a 及 b，它便肯定有這樣的自然數 n 存在使

$$\underbrace{a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{ 次}}=a\cdot n>b.$$

若應用已研究過的有理數的性質，則這不等式相當於 $n>\frac{b}{a}$；把商 $\frac{b}{a}$ 記成 c，我們便得出上面所敍述的 IV 1°。

§ 2　無理數的導入　實數域的順序

6. 無理數的定義　有理數集及其在第一節內列舉的一切性質，作爲是已給的。

我們仿效狄特金 (Дедекин, R. Dedekind) 來敍述無理數的理論。有理數域內的分劃的概念是這理論的基礎。若將有理數全體所成的集合分拆爲兩個集 A, A'。A 及 A' 均非空集（即至少包含一個數），並且滿足下列的條件，那末我們稱這樣的分拆爲分劃：

1°　**任一有理數，必在，且僅在**❶**，A 及 A' 二集之一中出現，**

2°　**集 A 內的任一數 a，必小於集 A' 內的任一數 a'。**

集 A 稱爲分劃的下組，集 A' 爲上組。分劃記成 $A|A'$。

由分劃的定義推得，小於下組內的數 a 的一切有理數亦都屬於下組。仿此，大於上組內的數 a' 的一切有理數亦都屬於上組。

例 1.　一切有理數 a，滿足不等式 $a<1$ 的，定爲集 A，一切 a'，滿足 $a'\geqslant 1$ 的，都算入集 A'。

---

❶ “任一有理數僅在二集之一中出現”這一事實亦可由 2° 推得。

很易驗證,這樣,我們實際上已得出分劃了。數 1 屬於 A' 組,且顯然成為其中最小的數。由另一方面看,在 A 組內並無最大數,因不論我們在 A 內取怎樣的數 a, 恆能在 a 與 1 之間指出有理數 a_1 來,因而它必大於 a 並且屬於 A 組。

例 2. 取小於或等於 1 的一切有理數 a;$a\leqslant 1$, 歸入下組 A; 取大於 1 的一切有理數 a'; $a'>1$, 歸入上組。

則亦得一分劃, 且其中在上組無最小數, 而在下組有最大數(即 1)。

例 3. 取使 $a^2<2$ 的一切正有理數 a, 數 0 及一切負有理數歸入 A 組,使 $a'^2>2$ 的一切正有理數 a' 歸入 A' 組。

很易證明, 我們亦已得出分劃。此處, 在 A 組內既無最大數, 在 A' 組內亦無最小數。我們將證明, 例如,這論斷的第一點(第二點同樣可以證明)。設 a 為 A 組內的任意正數,則 $a^2<2$。再證,必能得這樣的正整數 n, 使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

於是 $a+\frac{1}{n}$ 亦屬於 A。

這不等式相當於:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2,$$

若 n 滿足不等式 $\frac{2a+1}{n}<2-a^2$, 則上面第二個不等式也自然能滿足了。為此,只須取

$$n>\frac{2a+1}{2-a^2},$$

而這是恆為可能的。[依《阿基米德公理》IV 1°], 因此,不論 a 為 A 組內的怎樣的正數, 在這 A 組內終能求得大於他的數;又因為當 $a\leqslant 0$ 時這論證顯也成立,故在 A 組內沒有任何數能成為最大的。

很易明瞭, 不可能有這樣的分劃存在,在它的下組內有最大數 a_0,