Jisuan
Fangfa

计算方法

◎ 任雪娟 房佳蓓 马开玉 王晓如 编著

气象出版社
China Meteorological Press

计 算 方 法

任雪娟　房佳蓓　马开玉　王晓如　编著

气象出版社
China Meteorological Press

内容简介

本书集中介绍了常用的各种数值计算方法，共分八章，内容包括误差知识，插值方法，函数拟合，数值微分与积分，矩阵特征值与特征向量的计算，线性方程组与非线性方程解法和差分概论。本书选材适中，例题丰富，推演过程详细。为方便学习，每章均配有适量习题并附有答案与提示。

本书可作为高等院校相关理科和应用型学科教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/任雪娟，房佳蓓，马开玉，王晓如编著. —北京：气象出版社，2009.2

ISBN 978-7-5029-4687-6

Ⅰ.计…　Ⅱ.①任…②房…③马…④王…　Ⅲ.计算方法　Ⅳ.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 012048 号

Jisuan Fangfa

计算方法

任雪娟　房佳蓓　马开玉　王晓如　编著

出版发行：	气象出版社		
地　　址：	北京市海淀区中关村南大街 46 号	**邮政编码：**	100081
总 编 室：	010-68407112	**发 行 部：**	010-68409198
网　　址：	http://www.cmp.cma.gov.cn	**E-mail：**	qxcbs@263.net
策划编辑：	李太宇	**终　　审：**	纪乃晋
责任编辑：	林雨晨	**责任技编：**	都　平
封面设计：	博雅思企划	**印　　刷：**	北京昌平环球印刷厂
开　　本：	720 mm× 960 mm　1/16	**印　　张：**	15.75
字　　数：	308 千字		
版　　次：	2009 年 3 月第 1 版	**印　　次：**	2009 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：	1～3000	**定　　价：**	35.00 元

前　言

随着经济建设的发展和各项工程建设的需要，提出了大量的数学计算问题，《计算方法》就是研究计算这些问题的方法。由于计算机的普及和发展，为计算方法的实际应用提供了方便快捷的计算工具。掌握了各类问题的计算方法，也就能更好地使用计算机解决科学实验和工程建设中提出的各种计算问题。

本书编写中力求基本概念清晰、条理分明、通俗易懂、简洁实用，淡化有关数学定理的严格论证，强化数值方法和计算技术应用能力训练。书中各类问题的计算方法都有相对的独立性，可以根据不同要求选择其中的某些章节。

本书集中介绍了常用的各种数值计算方法，共分八章，内容包括误差知识，插值方法，函数拟合，数值微分与积分，矩阵特征值与特征向量的计算，线性方程组与非线性方程解法和差分概论。选材适中，例题丰富，每章末尾配有适量习题并附有答案。本书可作为高等院校相关理科和应用型学科教材，也可供有关工程技术人员参考。

本书在多年讲授计算方法课程和实际应用的基础上由任雪娟、房佳蓓、马开玉和王晓如执笔初写，最后由任雪娟作了全书的统稿工作。

本书由南京大学继续教育学院“985”教改项目资助出版。在本书的编写过程中，得到了南京大学大气科学系的关心和支持，在本书出版之际，对李明老师表示诚挚的谢意。

我们希望通过这本书的出版，有益于读者掌握数值计算的基本思想和方法，培养独立解决常规数值计算问题的能力。书中的不妥之处请读者批评指正。

编著者
2009 年 1 月

目　　录

第一章 误　　差

在科学研究和工程技术问题中都要用各种计算方法进行数值计算，计算中不可避免地会出现各种各样的误差，估计计算结果的精度是非常重要的，因此在介绍计算方法之前，了解误差的来源、误差的度量、误差的估计以及如何抑制误差等是非常必要的。

1.1 误差的来源

当今计算机已成为数值计算的主要工具，我们先来考察一下用计算机解决实际问题的主要过程：

实际问题→数学模型→数值计算方法→程序设计→计算机计算→结果

在以上过程中可以产生下列 4 种误差：

1.1.1 模型误差

用数值计算方法解决科学技术中的具体问题，首先必须建立这个具体问题的数学模型。数学模型总是简化了的，是近似的。这种数学模型与实际问题之间的误差，称为模型误差，也称描述误差。

1.1.2 观测误差

数学模型中所包含的某些参数，往往是通过观测得到的，观测的结果是不可能绝对准确的，观测得到的数据与实际数据之间的误差，称为观测误差。

模型误差和观测误差常统称为原始误差。

1.1.3 截断误差

在计算过程中，我们常常用有限过程去逼近无限过程，用收敛无穷级数的前有限项代替无穷级数，抛弃了无穷级数的后面部分。这种截取函数部分项产生的误差称为截断误差。例如函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

在计算时用

$$\sin x \approx \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

作近似计算，略去了 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

又如函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

在计算中用

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}$$

作近似计算，略去了 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。

1.1.4 舍入误差

在数值计算中，通常都按有限位进行运算。例如按照四舍五入的原则，在 10 位十进制数的限制下，会得到

$$2/3 = 0.6666666667$$

$$1.000003^2 - 1.000006 = 0$$

这两个结果都是不准确的，后者的准确结果应为 0.9×10^{-11}。这种由舍入产生的误差，称为舍入误差。

在实际计算中的数据通常是近似值，这些数在计算机上表示和再计算后还会带来进一步误差，即误差的积累和传播。这方面的讨论已超出本书的范围。至于模型误差和观测误差往往不是计算工作者能独立解决的。因此，本书主要讨论截断误差和舍入误差对计算结果的影响。

1.2 误差和误差限

1.2.1 误差

定义：设 x 为精确值（或准确值），x^* 是 x 的一个近似值，则称

$$e = x - x^* \tag{1.2.1}$$

为近似值 x^* 的误差或绝对误差。误差 e 可正可负，因此绝对误差不是误差的绝对值。

通常准确值是不知道的，所以误差的准确值也不可能求出。但常根据问题的需要，或根据测量与计算情况，可以事先估计出误差的绝对值不能超过某个正数 ε，即用限制误差绝对值的范围来描述和控制误差的大小。

1.2.2 误差限

定义：如果精确值 x 与其近似值 x^* 的误差的绝对值不超过某个正数 ε，即

$$|e| = |x - x^*| \leqslant \varepsilon \tag{1.2.2}$$

则称 ε 为误差限，也称绝对误差限或精度。ε 越小，表示近似数 x^* 的精度越高。显然有

$$x^* - \varepsilon \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon \tag{1.2.3}$$

有时也用

$$x = x^* \pm \varepsilon$$

来表示近似值 x^* 的精度或准确值 x 所在的范围。

在实际计算中，通常在误差允许的范围内，将近似值 x^* 作为精确值，从而中止计算，这是计算的一种手段。

例如，经四舍五入得到 $x^* = 3.26$，则对于 3.261，3.262，3.263，3.264 和 3.255，3.256，3.257，3.258，3.259 的近似值都是 $x^* = 3.26$，即第 3 位小数等于和大于 5，必然进到第 2 位小数；第 3 位小数小于 5 时，必然舍去。它的误差限是

$$|e| = |x - x^*| \leqslant 0.5 \times 10^{-2}$$

若 $x^* = 0.00326$，则它的误差限是

$$|e| = |x - x^*| \leqslant 0.5 \times 10^{-5}$$

1.3 相对误差和相对误差限

在很多情况下绝对误差并不能全面地反映近似的程度和精度。例如，设

$$x^* = 100 \pm 1$$

$$y^* = 1000 \pm 5$$

近似值 $y^* = 1000$ 的误差限比近似值 x^* 的误差限大 4 倍，不过在 1000 之内差 5 和在 100 之内差 1 比较，前者比后者精确。可见决定一个量的近似值的精度除了要看绝对误差的大小之外，还必须考虑该量本身的大小，这就有必要引入相对误差的概念。

定义：设 x 为精确值，x^* 是 x 的一个近似值，称

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x - x^*}{x} \tag{1.3.1}$$

为相对误差。在实际计算中，由于准确值 x 是不知道的，当 e 较小时用近似值 x^* 代替，即

$$e_r = \frac{e}{x^*} \tag{1.3.2}$$

相对误差也可正可负，与绝对误差一样不易计算，常用相对误差限控制相对误差的范围。

定义：如果有正数 ε_r，使得

$$e_r = \left| \frac{e}{x} \right| \leqslant \varepsilon_r \tag{1.3.3}$$

则称 ε_r 为 x 的相对误差限。

在实际计算中，相对误差限表示为

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|x^*|} \tag{1.3.4}$$

其中 ε 是 x^* 的误差限。

可以看出相对误差和相对误差限是没有量纲的。

例如，真空中光传播的速度 $c = (2.99790 \pm 0.000009) \times 10^5$ km/s，$c^* = 2.997902 \times 10^5$ km/s 的相对误差限是

$$\varepsilon_r = \frac{0.000009}{2.997902} = 0.000003$$

所以 c^* 是 c 很好的近似值。如果取 $c^{**} = 3 \times 10^5$ km/s 作为光速的近似值，则有

$$\varepsilon_r^* = \frac{0.0021}{3} = 0.0007$$

相对误差不到 1000 分之 1，c^{**} 是从 c 用四舍五入法取前三位数的近似值。

1.4 有效数字和可靠数字

为了能给出一种数的表示方法,使之既能表示其大小,又能表示其精确程度,下面引进有效数字和可靠数字的概念。

定义:如果近似值 x^* 的误差限是某一位上的半个单位,该位到 x^* 的第一位非零数字一共有 n 位,则称 n 为 x^* 的有效位数,x^* 有“n 位有效数字”。

在实际计算中,常按四舍五入的原则得到近似数 x^* 的前几位,例如设

$$x = \pi = 3.1415926535\cdots$$

若取 3 位,得

$$x^* = 3.14, \qquad \varepsilon = 0.002 < 0.5 \times 10^{-2}$$

若取 5 位,得

$$x^* = 3.1416, \qquad \varepsilon = 0.000007 < 0.5 \times 10^{-4}$$

它们的误差都不超过末位数的半个单位。

定义:如果近似值 x^* 的误差限是它保留的最后位上的一个单位,则称 x^* 的首位非零数字到保留的最后一位都是“可靠数字”。

例如,以 3.15 作 π 的近似值有 3 位可靠数字。又如下列函数的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = x$$

这个数是无理数,它的值是

$$x = 2.718281828459\cdots$$

如果用 $x^* = 2.718281828$ 作为它的近似值,有 10 位有效数字;若用 $x^* = 2.718281829$ 作为它的近似值,则 x 有 10 位可靠数字。

注意,在有效数字的记法中,0.258×10^{-3} 和 0.2580×10^{-3} 是有区别的,前者有 3 位有效数字,后者有 4 位有效数字。同样,如果已知道 $x^* = 45000$ 的绝对误差限不超过 $50 = 0.5\times10^2$,则应将它写成 450×10^2 或 4.50×10^4。如果记为 45000,则表示它的误差不超过 0.5。

还需指出的是,一个准确数字的有效位数,应当说是无穷多位,例如 $1/8 = 0.125$ 不能说只有 3 位有效数字。

1.5 有效数字与相对误差的关系

一般说来,若 x^* 有 n 位有效数字,则可写成标准形式

$$\begin{aligned} x^* &= \pm 10^m (a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \cdots + a_n \times 10^{-n}) \\ &= \pm 10^m \times 0.a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

其中 a_1 是 1 到 9 中的一个数字,$a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为 0 到 9 中的数字,m 为整数,n 为正整数,且误差限

$$|x - x^*| \leqslant \varepsilon = 0.5 \times 10^{m-n} \tag{1.5.2}$$

根据有效数字的定义可知当 m 一定时,有效数字位数越多,其绝对误差越小。关于有效数字与相对误差的关系,有如下定理。

定理 1.1 用式(1.5.1)表示的近似数 x^*,如果它具有 n 位有效数字,则其相对误差限为

$$|e_r| \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} \tag{1.5.3}$$

反之,若 x^* 的相对误差限满足

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)} \tag{1.5.4}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字。

证明:由式(1.5.1)知

$$a_1 \times 10^{m-1} \leqslant x^* \leqslant (a_1 + 1) \times 10^{m-1}$$

所以

$$|e_r| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leqslant \frac{0.5 \times 10^{m-n}}{a_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

反之,由

$$|x - x^*| = |x^*| \cdot |e_r| \leqslant (a_1 + 1) \times 10^{m-1} \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

知,x^* 具有 n 位有效数字。

根据这一定理,可以由相对误差限和近似数的首位非零数字确定该近似数应取几位有效数字。

例 1.1 为使$\sqrt{40}$的近似值的相对误差小于 0.1,问至少应取几位有效数字?

解:$\sqrt{40}$的近似值的首位非零数字是 $a_1=6$,由式(1.5.3)有

$$|e_r| \leqslant \frac{1}{2\times 6}\times 10^{-(n-1)} < 0.1$$

解得 $n>2$,取 $n=3$ 即可,即 $\sqrt{40}\approx 6.32$。

当然,也可以根据相对误差限的定义,通过直接计算确定该近似数应取几位有效数字。

1.6 运算误差的估计

在实际计算中,常常同时对多个量进行数值计算,需要做大量的加减和乘除运算,这时误差如何估计呢?我们将暂分为误差的直接估计和概率估计两种方法来讨论。

1.6.1 误差的直接估计

先讨论和、差、积、商的误差和相对误差。

根据误差的定义,可以得到任意两个数之和的误差等于两个数的误差之和,任意多个数之和的误差也等于各数的误差之和,任意多个之和的误差限等于各数的误差限之和。由于两个数 x_1 和 x_2 之差 x_1-x_2,可以看作是 x_1 和$(-x_2)$之和 $x_1+(-x_2)$。因此上述结论也适用于差的运算。

若将近似值 x^* 的误差 $e=x-x^*$ 看作是在 x^* 的微分,即

$$\mathrm{d}x = x - x^* = e \tag{1.6.1}$$

则 x^* 的相对误差为

$$e_r = \frac{x-x^*}{x^*} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\ \ln x \tag{1.6.2}$$

它是对数函数的微分。

设 $y=x_1x_2$ 则

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$$

$$\mathrm{d}\ \ln y = \mathrm{d}\ \ln x_1 + \mathrm{d}\ \ln x_2 \tag{1.6.3}$$

这就是说,乘积的相对误差是各乘数的相对误差之和。同样可得商的相对误差是被除数相对误差和除数相对误差之差,即

$$\mathrm{d}\ln\frac{x_1}{x_2}=\mathrm{d}\ln x_1-\mathrm{d}\ln x_2 \tag{1.6.4}$$

设 $y=\frac{x_1x_2}{x_3x_4}$，则

$$\ln y=\ln x_1+\ln x_2-\ln x_3-\ln x_4$$

$$\mathrm{d}\ln y=\mathrm{d}\ln x_1+\mathrm{d}\ln x_2-\mathrm{d}\ln x_3-\mathrm{d}\ln x_4$$

所以

$$|\mathrm{d}\ln y|\leqslant|\mathrm{d}\ln x_1|+|\mathrm{d}\ln x_2|+|\mathrm{d}\ln x_3|+|\mathrm{d}\ln x_4| \tag{1.6.5}$$

这就是任意多次连乘连除所得结果的相对误差限等于各乘数和除数的相对误差限之和。

例如 $y=x^n$，则 $\ln y=n\ln x$，$\mathrm{d}\ln y=n\mathrm{d}\ln x$，即 x^n 的相对误差是 x 的相对误差的 n 倍。同样可得 $x^{\frac{1}{n}}$ 的相对误差是 x 的相对误差的$\frac{1}{n}$。

需要注意的是，两个正数之差 $y=x_1-x_2$ 的相对误差是

$$\mathrm{d}\ln y=\frac{\mathrm{d}x_1-\mathrm{d}x_2}{x_1-x_2}$$

如果两个数 x_1 和 x_2 很接近，它们的差的相对误差就很大，这是由于 x_1^* 和 x_2^* 的前几位相同的有效数字在它们的差（$x_1^*-x_2^*$）内被减掉了。所以遇到这种情形，在 x_1^* 和 x_2^* 中应当多保留几位有效数字，或变换计算公式防止这种情形的发生。

对一般函数运算误差的问题，我们设 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值，则 y 关于 x_i^* 的近似值为 $y_i^*=f(x_1,x_2,\cdots,x_i^*,\cdots,x_n)$。$y_i^*$ 的误差可用泰勒展开式得到，即

$$\begin{aligned}e(y_i^*)&=y-y_i^*=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_i^*,\cdots,x_n)\\&\approx\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=x_i^*}\cdot(x_i-x_i^*)\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

记

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=x_i^*}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=x_i^*},\quad x_i-x_i^*=e_i$$

$$e(y_i^*)\approx\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=x_i^*}\cdot e_i \tag{1.6.7}$$

计算时，准确值 x_j，$j\neq i$，往往也是不知道的，这时用它们相应的近似值代替。而函数 y 关于 x_i^* 的近似值 y_i^* 的相对误差为

$$e_r(y_i^*) = \frac{e(y_i^*)}{y_i^*} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*} \cdot \frac{e_i}{y_i^*} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*} \cdot \frac{x_i^* \cdot e_{r\cdot i}}{y_i^*} \tag{1.6.8}$$

其中 $e_{r\cdot i}=\frac{e_i}{x_i^*}$。

而 y 关于近似值 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，近似值 $y^*=f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 的误差可写成

$$\begin{aligned} e(y^*) &= y - y^* = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*} \cdot (x_i - x_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*} \cdot e_i \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

相对误差为

$$e_r(y^*) = \frac{e(y^*)}{y^*} \approx \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^*} \cdot \frac{x_i^* e_{r\cdot i}}{y^*} \tag{1.6.10}$$

利用式(1.6.7)—(1.6.10)，可以得到任一形式的和、差、积、商的误差估计。

例 1.2 在建筑设计中，某建筑面积长 a 的近似值 $a^*=60$ m，宽 b 的近似值 $b^*=20$ m，若已知 $|a-a^*|\leqslant 0.2$ m，$|b-b^*|\leqslant 0.1$ m，求近似面积 $S^*=a^*b^*$ 绝对误差限和相对误差限。

解：因为 $S=ab$，$\frac{\partial S}{\partial a}=b$，$\frac{\partial S}{\partial b}=a$，由(1.6.9)知

$$\begin{aligned} e(S^*) &\approx \left.\frac{\partial S}{\partial a}\right|_{a=a^*, b=b^*} \cdot e_a + \left.\frac{\partial S}{\partial b}\right|_{a=a^*, b=b^*} \cdot e_b \\ &= b^* e_a + a^* e_b \end{aligned}$$

所以绝对误差限为 $|e(S^*)|\leqslant|20\times 0.2|+|60\times 0.1|=10\ \mathrm{m}^2$

相对误差限为

$$|e_r(S^*)| = \left|\frac{e(S^*)}{S^*}\right| = \left|\frac{e(S^*)}{a^* b^*}\right| \leqslant \frac{10}{60\times 20} \approx 0.83\%$$

若用式(1.6.5)和(1.6.2)，得面积 S^* 的相对误差限为

$$\begin{aligned} |e_r(S^*)| &= |\mathrm{d}\ln S| \leqslant |\mathrm{d}\ln a| + |\mathrm{d}\ln b| = |e_r(a^*)| + |e_r(b^*)| \\ &= \left|\frac{0.2}{60}\right| + \left|\frac{0.1}{20}\right| \approx 0.0033 + 0.0050 = 0.83\% \end{aligned}$$

计算结果是相同的。

1.6.2 误差的概率估计

从上面的介绍，我们知道和的误差限是各加数的误差限之和，乘积的相对误差限是各乘数的相对误差限之和。这些结论虽然正确，其结果是按最坏情况得出的，因而据此得出的结论通常是很保守的。保守地估计误差限，会引起在计算中保留过多的数字，甚至会造成工程建设中的浪费。

例如，设有 100 个正整数，它们都是以$\frac{1}{2}$为误差限的近似数，这 100 个数和的误差限是$\frac{1}{2}\times 100=50$，因此和数的最后两位数字可能没有意义。事实上，把和的误差限估计为 50 是十分保守的。假设各数的可正可负的误差比较均匀地分布在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$区间内，则大部分误差相互抵消，因此和数的误差限，在通常情况下，比 50 小得很多。为比较深入地研究这个问题，必须作出合理的假设，并且借助一些概率和统计知识。

根据上述例子，假设近似数的误差 e 落在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$区间内各部分的机会均等，也就是说，$e$ 的概率密度是

$$f(e)=1,\qquad -\frac{1}{2}\leqslant e\leqslant \frac{1}{2}$$

则这个概率分布的平均值是 $\bar{e}=0$，方差为

$$\sigma^2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^2\cdot 1\cdot \mathrm{d}e=\frac{1}{3}e^3\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}$$

标准差
$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{12}}$$

假设根据随机抽样抽取一个容量为 n 的样本

$$e_1,\ e_2,\cdots,e_n$$

则其和
$$s_n=e_1+e_2+\cdots+e_n=\sum_{i=1}^{n}e_i$$

的概率分布，当 n 很大时(一般 $n\geqslant 30$)，其极限分布为正态分布，其平均值仍为零，标准差为 $\sigma_n=\sqrt{n\sigma^2}=\sqrt{n}\sigma=\sqrt{\frac{n}{12}}$。