丘成桐中学数学奖
推荐参考书

著名几何问题及其解法：
尺规作图的历史

Famous Problems of Geometry and How to Solve Them

B. 波尔德 著
郑元禄 译

高等教育出版社
Higher Education Press

丘成桐中学数学奖

推荐参考书

著名几何问题及其解法：

尺规作图的历史

Famous Problems of Geometry and How to Solve Them

■ B. 波尔德 著

■ 郑元禄 译

高等教育出版社

Higher Education Press

图书在版编目 (CIP) 数据

著名几何问题及其解法: 尺规作图的历史 / (美) 波尔德 (Bold, B.)著; 郑元禄译. —北京: 高等教育出版社, 2008.10

书名原文: Famous Problems of Geometry and How to Solve Them

ISBN 978-7-04-025382-5

I. 著··· II.①波··· ②郑··· III. 几何学—普及读物 IV. 018–49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 143179 号

Translation from the English language edition:
Famous Problems of Geometry and How to Solve them by Benjamin Bold.

策划编辑 王丽萍 **责任编辑** 王丽萍 **封面设计** 王凌波
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800–810–0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京七色印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	889×1194　1/32	**版　　次**	2008 年 10 月第 1 版
印　　张	3.75	**印　　次**	2008 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	72 000	**定　　价**	15.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号　25382-00

丛书序

任何科技发展都不能缺乏数学作为根基,数学在科技年代,地位日益重要.而教育的目的不仅要学生懂得书本上介绍的基本知识,也需要培养学生应变、创新和领导的能力.学习基本知识可以在不断的考试中磨炼出来,我想这方面中国的学生在考试里面磨炼不少了,至于应变、创新和领导能力,恐怕单从考试是不够的.为激发全球华人青少年对数学的兴趣,提升他们的学术水平,并及早发掘与培养全世界的华人数学英才,由我和泰康人寿保险股份有限公司共同主办的“丘成桐中学数学奖”竞赛于 2008 年在北京正式启动.第一届“丘成桐中学数学奖”颁奖仪式定于 2008 年 10 月 24 日在北京举行,届时,美国哈佛大学、布朗大学、斯坦福大学等名校的本科招生主任将会出席仪式,并面试部分

获奖学生.

为了配合这项活动, 我们精心挑选了国外一批著名的数学科普读物, 由高等教育出版社组织翻译并以丛书的形式出版. 这套丛书作为 “丘成桐中学数学奖” 的重要参考材料, 涵盖了数学的各个分支学科, 集知识性、趣味性于一体, 对促进中学生的思维和创新能力都有很大的帮助. 希望同学们能从中汲取知识, 开阔视野, 在比赛中取得优异的成绩.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
2008 年 8 月

献给我的妻子: Claire

是她的帮助和鼓励, 使本书最终成稿

序言

1963 年 6 月, 美国政治与社会科学研究院主办了一次关于数学与社会科学的讨论会. 会上提交论文的作者之一奥斯卡 · 摩尔根特恩 (Oscar Morgenstern) 曾与约翰 · 冯 · 诺依曼 (John Von Neumann) 一起撰写了《博弈论与经济行为》(*Theory of Games and Economic Behavior*) 一书. 该书促进了数学在解决经济学问题中的应用, 导致了数学 “博弈论” 的发展. 摩尔根特恩博士在这次讨论会上发表的论文被称为 “数学在经济学

中应用的极限”. 我援引这篇论文的第一段:

> 虽然人类智慧得出的一些深刻见解以否定的形式得以最好的陈述, 但是以绝对的方式来讨论应用的极限是极危险的. 这些见解包括不可能存在永动机, 光速不能被超过, 只用直尺与圆规不能化圆为方、不能三等分角等等. 这些命题中的每一个都是大量脑力劳动的成果. 所有的命题都是基于几百年的研究工作, 或者依据大量的经验证据, 或者依据新数学的发展, 或者二者兼而有之. 虽然是以否定的形式表述的, 但是这些命题和其它的发现都是真正的成就, 并且是对人类知识的巨大贡献. 所有这些都涉及数学推理, 某些知识实际上属于纯粹数学范围, 纯粹数学富有大量禁令性的与不可能性的命题.

以上引文明确而有力地说明了本书的宗旨. 为什么数学有大量禁令性与不可能性的命题? 为什么像“化圆为方”与“三等分角”这样的问题的求解, 被认为是“深刻的见解”与“对人类知识的巨大贡献”? 为什么为了解答这些看上去十分简单的问题, 需要几百年大量的脑力劳动? 最后, 为了解答这些问题, 必须发展怎样的新的数学? 我希望当你读完本书后, 将找到这些问题的答案.

希腊数学家们的杰出成就是建立了公设系统. 尽管古代希腊人想出的欧几里得 (Euclid) 几何学有瑕疵, 有

缺点, 但是他们的工作直到今天都还是应遵循的样板.

在公设系统中, 人们从一组未被证明的命题 (公设) 出发, 推导出 (用逻辑方法) 其它命题 (定理). 欧氏平面几何学的两个公设是:

1) 已知任意两个不同点, 存在一条经过这两点的唯一直线.

2) 已知一点与一个长度, 可作以此已知点为圆心及以已知长度为半径的一个圆.

这两个公设构成了欧氏作图 (只用无刻度的直尺与圆规的作图) 的基础. 利用这两种工具, 古代希腊数学家能够完成很多作图, 但是他们在很多情况下失败了例如他们能平分任意一角, 但不能三等分一般角. 他们能作一个正方形使面积等于已知正方形面积的 2 倍, 但不能作 " 立方倍积". 他们能作一个正方形使面积等于已知多边形的面积, 但不能作 "化圆为方". 他们能作正 3,4,5,6,8,10 边形, 但不能作正 7,9 边形. 在 19 世纪末以前, 数学家们提供了所有这些古代数学问题的答案. 本书的目的是说明这些问题最后怎样被解答了.

为什么古代希腊数学家不能解答这些问题呢? 为什么事隔将近两千年后这些问题才得到解答呢?

希腊人的数学研究工作沿着几何路线进行. 他们专注于几何学而忽视代数学, 是由于下列原因:

毕达哥拉斯定理 (勾股定理) 告诉我们, 如果正方形的边长为 1 单位, 那么对角线长为 $\sqrt{2}$ 单位. $\sqrt{2}$ 是什么类型的数? 直到那个时候, 希腊数学家只能把所有解答用整数表示. 分数或有理数是一对有序整数, 即形如

a/b 的数, 其中 a 与 b 是整数, $b \neq 0$. 无论如何尝试, 希腊人不能用整数表示 $\sqrt{2}$. 我们现在已经知道, 可以证明 $\sqrt{2}$ 是无理数. 但是直到 19 世纪, 还没有出现令人满意的无理数理论.

由于没有这样的理论, 所以希腊数学只沿着几何方向发展. 例如希腊人想展开 $(a+b)^2$, 他们在几何上是按以下方法进行的:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

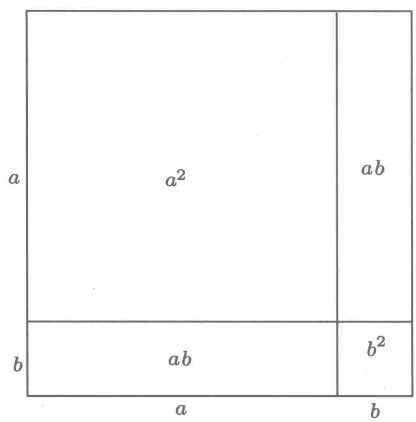

图 1

正如我们以后将指出的那样, 作图问题的解决涉及发展良好的代数技巧. 事实上, 一直到 17 世纪韦达 (Vieta)、笛卡儿 (Descartes) 与费马 (Fermat) 等人发展了代数学与解析几何学, 才得到能够成功解决一些作图问题的方法.

目　录

丛书序

序言

第 I 章　古希腊的成就 1

第 II 章　可作图性的解析准则 5

第 III 章　复数 17

第 IV 章　提洛问题 26

第 V 章　三等分角的问题 29

第 VI 章　化圆为方问题 34

第 VII 章　正多边形的作图问题 44

第 VIII 章　最后的评述 69

建议进一步阅读的图书 77

更高深的图书 79

问题解答 80

第 I 章　古希腊的成就

利用几何学定理, 希腊数学家们能作出任何要求的几何元素, 这些元素是由已知元素作有限次有理运算与求实数平方根得出的. 例如: 假设我们已知元素 a, b 与单位元素. 希腊人能作出 $a+b, a-b, a\cdot b, a/b, a^2$ 与 $\sqrt{a}$.

问题　I–A 组

利用已知线段作 $a+b$ 与 $a-b$. 图 2 说明怎样作 $a\cdot b$. 如果作 $EG//DF$, 那么 $x=a\cdot b$.

问题　I–B 组

1. 证明 $x=a\cdot b$.
2. 利用类似的方法作 $a^2, a/b, a^2/b$.

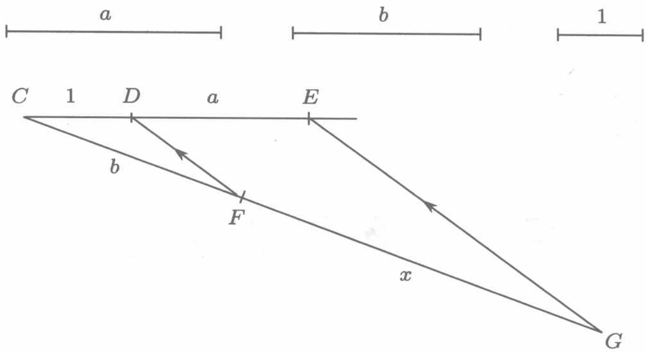

图 2

图 3 说明怎样作 $\sqrt{a}$.

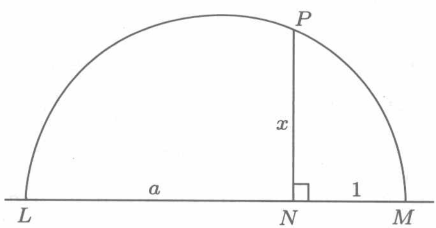

图 3

以 LM 为直径作半圆. $NP \perp LM$ (P 是垂线与半圆的交点). 于是 $x = \sqrt{a}$.

问题　I–C 组

1. 利用上图, 证明 $x = \sqrt{a}$.

2. 利用类似的方法, 作

$$\sqrt{ab}, \quad \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt[8]{a}.$$

3. 利用勾股定理, 作线段分别等于

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{17}.$$

利用这些作图, 如果将方程的系数作为已知线段的长度, 那么希腊人能作出一次方程与二次方程的各个根.

问题　I–D 组

作方程 $ax+b=c$ 的根, 其中 a,b,c 是已知线段.

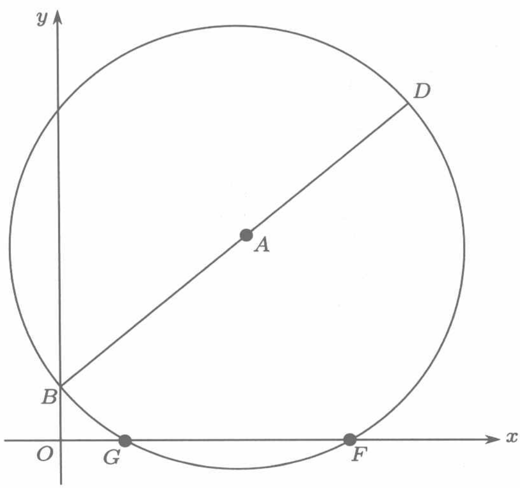

图 4

为作出二次方程 $x^2 - ax + b = 0\,(a^2 > 4b)$ 的根, 可以进行如下: 连接点 $B(0,1)$ 与 $D(a,b)$ 成线段 BD, 以 BD 为直径作圆. 于是 G 与 F (圆与 x 轴的交点) 的横坐标是二次方程的根 (如图 4).

问题　I–E 组

1. 我们为什么利用限制条件 $a^2 > 4b$?

2. 证明 G 与 F 的横坐标是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的根. 提示: 证明圆的方程是

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

正如序言中所指出, 希腊人利用本章所述的基本作图, 在作图题方面获得了相当大的成就. 但是他们仍旧留下若干未解决的问题, 让后代数学家们为之努力. 本书的其余部分将介绍企图解决这些问题与 19 世纪最后解决这些问题的简要历史.

问题　I–F 组

已知单位长度, 作方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正根.

第 II 章　可作图性的解析准则

为了回答"用无刻度的直尺与圆规能作怎样的图形?"的问题必须建立可作图性的解析准则. 每个作图题都提出一些已知元素 $a, b, c, \cdots$, 并要求我们求出另一些元素 $x, y, z, \cdots$. 问题的各个条件能使我们建立一个或者一些方程, 使其系数是表示已知元素 $a, b, c, \cdots$ 的数. 方程的解容许我们用已知元素表示未知元素. 举一个简单的例子, 假设我们要作一个正方形, 使面积等于边长为 a 的已知正方形面积的 2 倍. 在代数上, 我们把这个问题用下列方程表示:

$$x^2 = 2a^2.$$

当然另一些问题将得出较高次的方程.

我们已经看出, 怎样能作一次方程或二次方程的