高等学校教材

线性代数（经管类）

主　编　肖马成
副主编　蔡德祺　曲文萍

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数（经管类）

主　编　肖马成
副主编　蔡德祺　曲文萍

高等教育出版社

内容提要

本书是南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状，结合多年在独立学院的教学经验联合编写而成。主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章末配有A、B两类习题，并附有习题答案。书中带"*"号的内容，可由任课教师根据具体情况选讲。

本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院的办学特色及教学需求，适当降低理论深度，突出数学知识应用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧，突出基本训练的题目，兼顾学习知识与能力培养，有利于学生的可持续发展，并体现新的教学理念。

本系列教材可作为独立学院经济管理类各专业的线性代数课程教材，也可供有关人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数．经管类／肖马成主编．—北京：高等教育出版社，2009.1
ISBN 978-7-04-024906-4

Ⅰ．线… Ⅱ．肖… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第191880号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 黄建英
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年1月第1版
印　　张	14	印　　次	2009年1月第1次印刷
字　　数	260 000	定　　价	18.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24906-00

前 言

本书是为培养应用型人才的独立学院编写的教材。

目前我国高等教育中独立学院的发展已具有相当规模。许多独立学院在教学实践的基础上,相继开展了深化教育改革的研究。将独立学院办学定位于培养应用型人才已成为多数院校的共识。确立相应的课程体系、教学内容与教学方法已成为各独立学院的共同任务。

许多独立学院为促进独立学院教学改革、课程建设与教材建设,不仅在校内展开深入的讨论,而且广泛进行校与校之间的交流。从教育理念、教学思想到教学内容进行广泛探讨。经高等教育出版社组织、协调,召开了"独立学院数学基础课程教学改革及优质教学资源建设研讨会",总结教学经验与教训,统一认识。并由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院、天津商业大学宝德学院、北京工业大学耿丹学院、北京化工大学北方学院、吉林建筑工程学院城建学院、长春大学光华学院、沈阳理工大学应用技术学院等独立学院的数学教学负责人与教师代表认真讨论,制定了独立学院理工类、经管类数学课程教学基本要求(包括微积分、线性代数、概率论与数理统计),并决定编写教材。教材以有利于应用型人才的培养为目标,以深化教学改革、提高独立学院教学质量为前提,以独立学院课程教学基本要求为指导,总结独立学院数学教学的经验与教训。从课程特点出发,分析培养研究型人才与培养应用型人才的需求差异,研究解决课程体系、系统性、严密性与应用型人才需求的关系。在教材中体现出教学改革与教学内容的优化,使教材适用于培养应用型人才,并体现学习知识与能力培养的特点,有利于学生的可持续发展,尽力体现新的教学理念。

本系列教材包括理工类、经管类两套教材,每套教材都分为主、辅两部分。主教材分别针对高等数学、线性代数、概率论与数理统计 3 门课程编写,经管类主教材由《微积分(上册)》、《微积分(下册)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》四册组成。辅教材为上述主教材的同步辅导书,为学生释疑解惑,帮助学生

理解概念与性质,归纳总结计算方法,并给出主教材中习题的解答。此外,还为教师配备了电子教案。辅教材在主教材出版后将陆续出版。在教材编写中,有意识地注意了解决系统性与适应性、逻辑性与简洁性、传统与“潮流”等关系,以及课程语言与通俗表述的关系。教材编写中有意地强化了概念实例与经济管理解释的引入,以及解决问题的思路和方法;同时注意弱化技巧、构造性证明及纯数学定义。力求做到基本概念、基本理论表述准确,内容深入浅出,既便于教师教,也便于学生学。

本系列教材中《高等数学(理工类)》、《微积分(经管类)》两书由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院徐兵教授主编。《线性代数(理工类)》、《线性代数(经管类)》两书由南开大学滨海学院肖马成教授主编。《概率论与数理统计(理工类)》、《概率论与数理统计(经管类)》两书由南开大学滨海学院周概容教授主编。

参加本书编写的有:肖马成、蔡德祺、曲文萍、白晓棠、高桂英、王秀玉、杨恩孝。两年多来,自本书的初步构想到编写始终得到高等教育出版社的热情支持与帮助,特别是责任编辑李华英老师对本书认真编辑,提出了许多良好建议,为本书提供了良好的质量保证。作者在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免有欠妥之处,衷心希望读者指正。

作　者

2008 年 8 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式的概念源于解线性方程组，它表示 n^2 个数按指定规则计算得到的一个数值. 作为一个数学工具，行列式不仅用于后面各章的讨论，而且在数学的其他分支也得到广泛的应用.

本章在二阶、三阶行列式的基础上给出了 n 阶行列式的定义，接着介绍了行列式的基本性质和计算方法，最后给出用行列式解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

在初等代数中，解一元线性方程

$$ax = b$$

时，当系数 $a\neq 0$，方程两端乘$\frac{1}{a}$，得到方程的解为

$$x = \frac{b}{a},$$

其解可用两个数相除表示.

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

时，自然地考虑运用消元法将(1.1)转化为一元线性方程求解. 为此，先分别用 a_{22}，a_{12}乘(1.1)中的两个方程的左、右端，再将得到的式子相减，于是得到下面一元线性方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由前面一元线性方程的结论，可得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法，从(1.1)消去 x_1，可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了方便，引入下面记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

(1.2)式表示的数称为**二阶行列式**. 为了便于记忆，可以看成实连线(主对角线)两数之积减去虚连线(副对角线)两数之积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

于是，如果设

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

其中 D_1 和 D_2 分别是在 D 中把第 1 列与第 2 列元素换成(1.1)中的常数项 b_1，b_2 得到，这样二元线性方程组(1.1)的解可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

这里方程(1.1)的解是两个行列式相除，与一元线性方程解的表示形式相同. 它将消元和解一元线性方程合并为一个过程.

进一步考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

类似前面的讨论，先分别从前两式和后两式消去 x_3，得到只含 x_1, x_2 的两个二元线性方程，再从此二元线性方程组中进一步消去 x_2，最终可以得到下面一元线性方程

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}.$$

若对上式 x_1 前面的系数引入下面记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

(1.5)式表示的数称为**三阶行列式**，并称 D 为线性方程组(1.4)的系数行列式，为便于记忆可按下面**对角线法则**写出(图 1.1，实连线三数之积减去虚连线三数之积)

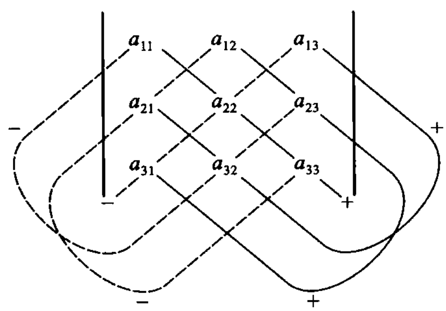

图 1.1

由三阶行列式记号有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

于是,当 $D\neq 0$ 时,x_1 可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_j(j=1,2,3)$分别是在系数行列式 D 中把第 j 列元素换成(1.4)中右端常数项 b_1,b_2,b_3 得到. 这里方程组的解同样用两个三阶行列式相除表示.

例 1 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1. \end{cases}$$

解 由前面的分析,因

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0.$$

立即可以得到解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{9}{8},$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}}=-\frac{3}{4}.$$

例 2 解方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0.$

解 由三阶行列式对角线法则,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+4x+18-12-2x^2-9x$$

$$=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0.$$

于是有 $x=2$ 或 $x=3$.

二、n 阶行列式的定义

利用二阶与三阶行列式,可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式. 自然希望能采用同类记号推广到 n 元线性方程组求解问题中去. 为此,观察(1.5)式中的三阶行列式 D,我们发现有以下特点:

(1) 三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和;

(2) 每项是行列式中不同行不同列的 3 个数的乘积;

(3) 每项有确定的符号.

为了分析各项前的符号规律,我们把各项的 3 个数 a_{ij}依行的自然顺序统一排成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,即第一个下标(行标)都按自然顺序排成 123,而其第二个下标(列标)排成$j_1\ j_2\ j_3$,它们构成自然数 1,2,3 的一个排列. 这样各项所带符号只与列标的排列有关. 为了归纳其中的内在规律,下面引进有关概念.

把自然数 $1,2,\cdots,n$ 的每一种有确定次序的排列称为一个 n **级排列**,记为 $j_1j_2\cdots j_n$. 显然 n 级排列一共有 $n!$ 个. 例如自然数 1,2,3,4 共有 $4!=24$ 个 4 级排列,2134 便是其中一个. 称排列 $12\cdots n$ 为**自然排列**.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,如果有较大的数排在较小的数之前,

就称这两个数构成一个**逆序**，$j_1j_2\cdots j_n$ 中所有逆序的总和称为它的**逆序数**. 记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

若设 t_k 表示 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中 j_k 后面比 j_k 小的元素 $j_l(l=k+1,k+2,\cdots,n)$ 的个数，就说 j_k 这个元素的逆序数是 t_k. 于是一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为

$$N(j_1j_2\cdots j_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

例 3 求 5 级排列 13254 和 n 级排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 $N(13254)=0+1+0+1+0=2.$

$$N(n(n-1)\cdots 321) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

如果 $N(j_1j_2\cdots j_n)=2k$（k 为自然数），则称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为**偶排列**；否则称为**奇排列**. 显然，自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $N(12\cdots n)=0$，规定它是偶排列. 可以验证三阶行列式中取负号的项的列标排列 321，213，132 均是奇排列.

有了排列的逆序数概念，我们可以把由(1.2)、(1.5)式表示的二阶、三阶行列式改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{N(j_1j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 分别表示对 1，2 与 1，2，3 的所有排列取和.

由上述排列和逆序数的概念和归纳，现在可以将行列式概念推广到 n 阶的情形.

定义 1.2 称由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各数的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列时取正号；是奇排列时取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1.6)$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 级排列取和，可见 n 阶行列式共有 $n!$ 项.

行列式有时也简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列的元素，称 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项.

当 $n=1$ 时，一阶行列式由一个元素构成，其值就是这个元素本身，比如 $|-5|=-5$.

例 4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，在展开的和式中应有 $4!=24$ 项，但由于每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为零，乘积就是零. 因此，我们不妨从含有零元素最多的第 4 行考虑. 因 a_{44} 可能不为零，故只需考虑 $j_4=4$ 的项. 第 3 行中除了 a_{33},a_{34} 外都是零，现已取 $j_4=4$，所以必须取 $j_3=3$. 同理，只能取 $j_2=2,j_1=1$. 即该行列式中不等于零的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，此时 $j_1j_2j_3j_4=1234$ 为偶排列，所以

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= (-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \end{aligned}$$

该行列式的特点是主对角线以下的元素都是零 $(i>j, a_{ij}=0)$，这种行列式称为**上三角形行列式**.

一般地,n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积.

同理,对下三角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

它的特点是除主对角线元素外,其他元素皆为零.

注 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的简单写法(以下同),并且称其为对角行列式.

例 5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 类似于例 4 的讨论，除了第 1 行取 a_{1n}，第 2 行取 $a_{2,n-1}$，…，第 n 行取 a_{n1} 为因子的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 外，其余的项均为零，而它的符号应为

$$(-1)^{N(n(n-1)\cdots 21)}=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

所以

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

§1.2 行列式的性质

当行列式的阶数 $n\leqslant 3$，或者元素比较特殊时，直接用行列式定义计算尚且可行，但对阶数 n 较大的行列式则十分困难. 例如 $n=10$，需作 $9\times 10!$ 次乘法. 为了找到计算行列式更为有效的方法，不妨先讨论行列式的性质. 为此，我们先引入对换的概念，并给出它与排列的奇偶性之间的联系.

定义 1.3 在一个 n 级排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n$ 中，如果仅将 j_k 与 j_l 对调，其余的数位置不变，得到另一个 n 级排列 $j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n$，这样的变换称为一个**对换**. 特别地，当 $l=k+1$ 时，称此对换为**邻换**.

比如，在排列 31425 中，1，5 施以对换，便得到排列 35421. 若将 4，2 施以邻换，便得到排列 31245.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 (1) 先考虑邻换情形. 设 n 级排列 $j_1\cdots j_kj_{k+1}\cdots j_n$ 邻换 j_k,j_{k+1} 得到新排列 $j_1\cdots j_{k+1}j_k\cdots j_n$. 由于除了 j_k,j_{k+1} 两数外，其余的数位置没有变化，所以其余数的逆序数经过邻换后并不改变. 于是当 $j_k<j_{k+1}$ 时，经邻换，j_k 的逆序数不变，而 j_{k+1} 的逆序数增加 1，而当 $j_k>j_{k+1}$ 时，经邻换后，j_k 的逆序数减少 1，而 j_{k+1} 的逆序数

不变.因此新排列仅比原排列增加或减少 1 个逆序,所以它们的奇偶性正好相反.

(2) 再考虑一般的对换情形.设原排列为 $j_1\cdots j_k b_1 b_2 \cdots b_{s-1} j_l \cdots j_n$(即 j_k 与 j_l 间隔 $s-1$ 个数),经过对换变为新排列 $j_1\cdots j_l b_1 b_2\cdots b_{s-1} j_k \cdots j_n$.此对换可以通过以下邻换实现:在原排列中,先将 j_k 依次与 $b_1, b_2, \cdots, b_{s-1}, j_l$ 作 s 次邻换,变为排列 $j_1\cdots b_1 b_2\cdots b_{s-1} j_l j_k \cdots j_n$ 再将 j_l 与 $b_{s-1}, b_{s-2}, \cdots, b_1$ 作 $s-1$ 次邻换便得到新排列.即新排列可由原排列经过 $2s-1$ 次邻换得到.于是由(1)的结论可知共改变了奇数次奇偶性,所以它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2 任何一个 n 级排列都可通过对换成自然排列 $12\cdots n$,且所需对换次数与该排列的奇偶性相同.

证明从略.

作为定理 1.1 及定理 1.2 的一个应用,利用对换及其性质,可以得出 n 阶行列式等价定义:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{1.7}$$

例 1 利用行列式等价定义计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & d \end{vmatrix}.$$

解 考察给定行列式的非零项.由于第 3 行和第 1 列均只有一个非零元素,因此非零项必取第 1,2 列的元素 a_{21}, a_{32}.于是对于第 3,4 列只可能取 a_{43}, a_{14} 或 a_{13}, a_{44},而 $a_{13}=0$,所以有

$$D = (-1)^{N(2341)} a_{21} a_{32} a_{43} a_{14} = -bcda.$$

下面介绍行列式的性质及其运用.

把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$