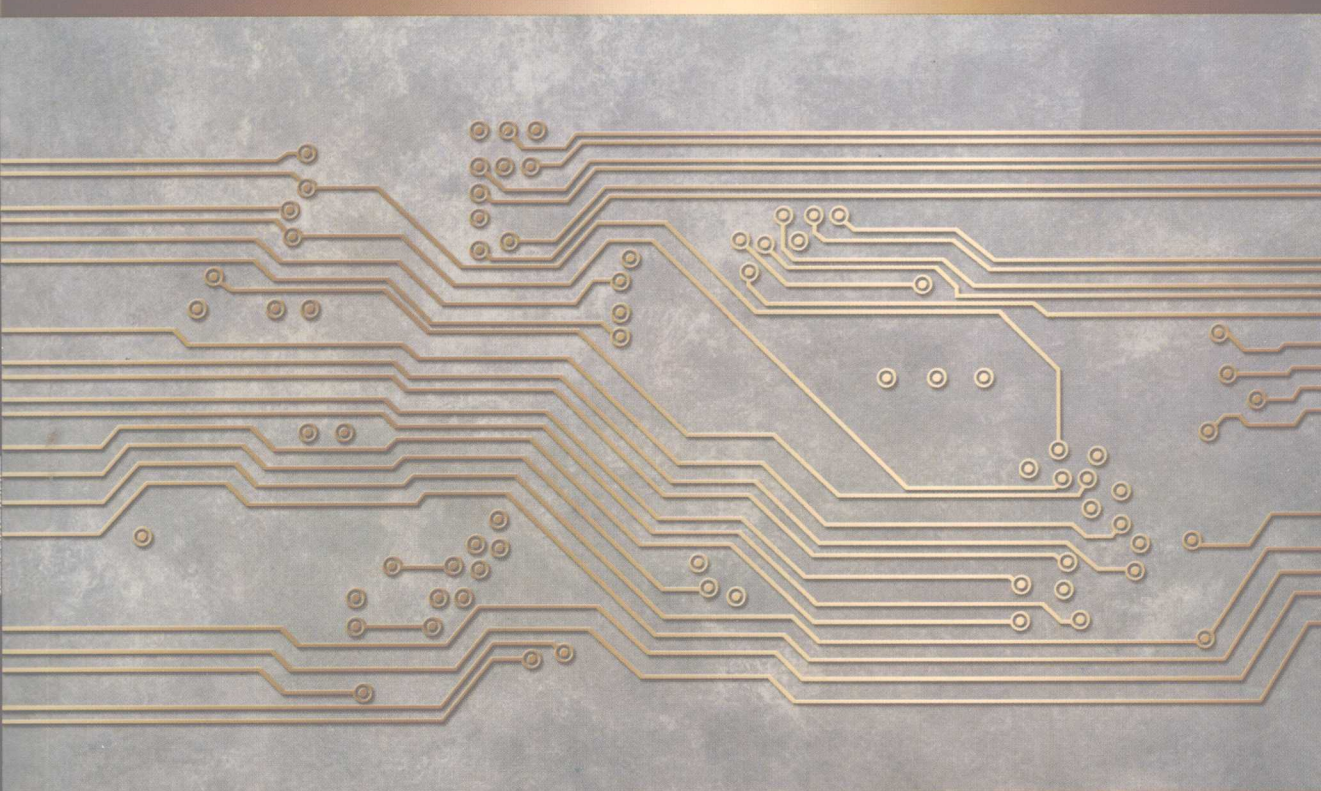


新编电气与电子信息类本科规划教材·电子信息科学与工程类专业

# 电磁场与电磁波

## 基础教程

符果行 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

新编电气与电子信息类本科规划教材·电子信息科学与工程类专业

# 电磁场与电磁波基础教程

符果行 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书从历史背景、物理概念、分析思路、计算方法和工程应用几方面全方位介绍电磁场与电磁波的基本知识,以麦克斯韦方程的建立与应用的历史发展脉络为主线展开论述,符合认识规律,便于阅读,易于理解。主要内容包括:场论基础、电磁实验定律和场量基本方程、静态场、动态场、电磁波的传播、电磁波的传输、电磁波的辐射等,并从综合分析的角度对电磁场和电磁波进行了概括和总结。本书提供配套电子课件和习题解答。

本书可作为高等学校电子、信息和通信等专业本专科生入门教材,也供相关科技人员作为电磁场与电磁波的学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波基础教程/符果行编著. —北京:电子工业出版社,2009.2

新编电气与电子信息类本科规划教材

ISBN 978-7-121-08115-6

I. 电… II. 符… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材

IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 005802 号

策划编辑:王羽佳

责任编辑:王 纲

印 刷:涿州市京南印刷厂

装 订:涿州市桃园装订有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:19.25 字数:486 千字

印 次:2009 年 2 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:32.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

本书是为初学者编写的“电磁场与电磁波”的入门教程,适合作为普通高等学校电子、信息和通信等专业的本、专科生教材,也供相关科技人员作为电磁场与电磁波的学习参考。

“电磁场与电磁波”课程的特点可以概括为:抽象化、数学化、难教难学。读者对象与课程特点间不相适应的差距所带来的困难,要求在教学上采用一定的方法来加以化解。本书着重基于教学角度考虑,从历史背景、物理概念、分析思路、计算方法和工程应用几方面全方位介绍电磁场与电磁波的基本知识,以麦克斯韦方程的建立与应用的历史发展脉络为主线展开论述,符合认识规律,便于阅读,易于理解。

本书第 1、2 章为数学、物理基础,第 3、4 章为电磁场部分,第 5~7 章为电磁波部分,第 8 章为概括和总结。本教程以电磁实验定律为基础(第 2 章),以矢量分析为工具(第 1 章),在时变条件下将静态场推广为动态场,建立反映动态场变化规律和特性的麦克斯韦方程(第 3、4 章),并将麦克斯韦方程用于解决在传播、传输和辐射应用领域中动态场的波动问题(第 5~7 章),在此基础上从教学角度对电磁场与电磁波的主要问题进行分析(第 8 章)。

为了适应读者对象和课程特点的要求,本书在内容安排上具有如下特点:

- (1) 内容安排由特殊到一般,循序渐进,符合认识规律;
- (2) 强化和突出物理概念,简化理论推导,易于理解;
- (3) 系统介绍计算方法,范例强调分析思路,一例多解,开拓思路;
- (4) 以场为主,场、路结合,加强对比,融会贯通;

(5) 重视工程应用,适当外延,满足不同专业教学需求(考虑到非电磁场专业一般很少安排电波传播、微波技术和天线工程等后继课程,本教程应适当涵盖这些课程相关的电磁基本原理,但不过多涉及具体工程技术问题。第 5~7 章作为以场论为基础的外延和应用,已适当奠定了后继的三门课程的理论基础。第 3~7 章介绍了电磁场与电磁波的工程应用);

(6) 思考题着重于物理概念和分析思路,可作为复习提纲;

(7) 按基本要求精选或设计例题和习题,力求适合读者的接受程度(少量较难的习题给出提示)。

对本课程的学习方法和教材处理提出如下建议供参考。

(1) 掌握“三基”:基本概念——理解;基本理论——推导;基本方法——计算。目的是提高电磁理论综合素养,增强分析、应用能力。但对初学者来说,基本理论主要强调推导思路。

(2) 掌握公式的内涵:来龙去脉、应用条件、物理意义和计算方法。

(3) 教学内容可针对不同对象做适当取舍:本科生应强调理论的系统性,工程应用内容可作为阅读材料或根据需要选讲;专科生可适当降低理论要求,对于较深的内容可以删减(如分离变量法和平面波的斜入射)或只做定性介绍(如电、磁能量和惠更斯面元)。

(4) 建议教学参考学时为 60~80 学时。

本书提供免费电子课件和习题解答,可登录华信教育资源网(<http://www.huaxin.edu.cn>)或 <http://hxedu.com.cn>)注册下载。

在教材编写过程中,得到电子科技大学成都学院领导冯林教授及电子信息工程系刘昌孝、吕明两位教授的大力支持和帮助,冯林教授还审阅了书稿内容,提出了宝贵的修改意见。教材配套电子教案由符凯、李化制作。陈付均在全书文字上做了许多工作,全力协助书稿的编写。策划编辑王羽佳、责任编辑王纲对教材的编辑出版做了大量工作,付出了辛勤的劳动。对于他们的支持、帮助和卓有成效的工作,一并在此表示衷心的感谢!

在教材编写过程中,查阅了大量相关书籍和技术资料,吸取了许多专家和同行的宝贵经验,获得了有益的启示,在此向他们表示真诚的谢意!

对书中存在的不足之处,敬请广大读者批评指正。

符果行

# 目 录

<b>第 1 章 场论基础</b> .....	(1)
1.1 场的概念及其表示法 .....	(2)
1.1.1 场的分类 .....	(2)
1.1.2 矢量场的基本运算 .....	(2)
1.1.3 常用正交坐标系 .....	(3)
1.2 场的性质和描述 .....	(6)
1.2.1 场域性质 .....	(6)
1.2.2 场点性质 .....	(10)
1.3 梯度、散度和旋度的比较 .....	(17)
1.4 常用恒等式和公式 .....	(18)
1.5 亥姆霍兹定理 .....	(19)
思考题 .....	(20)
习题 .....	(21)
<b>第 2 章 电磁实验定律和场量基本方程</b> .....	(23)
2.1 源量的定义和定律 .....	(24)
2.1.1 电荷和电荷分布 .....	(24)
2.1.2 电流和电流密度 .....	(25)
2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程 .....	(26)
2.2 静止电荷的实验定律 .....	(27)
2.2.1 库仑和库仑定律的建立 .....	(27)
2.2.2 库仑定律和电场强度 .....	(29)
2.2.3 静电场基本方程 .....	(30)
2.3 稳恒电流的实验定律 .....	(33)
2.3.1 安培和安培定律的建立 .....	(33)
2.3.2 安培定律和磁感应强度 .....	(34)
2.3.3 静磁场基本方程 .....	(36)
2.4 时变电流的实验定律 .....	(38)
2.4.1 法拉第和法拉第电磁感应定律的建立 .....	(38)
2.4.2 法拉第电磁感应定律 .....	(39)
思考题 .....	(41)
习题 .....	(41)
<b>第 3 章 静态场</b> .....	(45)
3.1 辅助位和辅助位方程 .....	(46)
3.1.1 静电场的标量电位和标量电位方程 .....	(46)

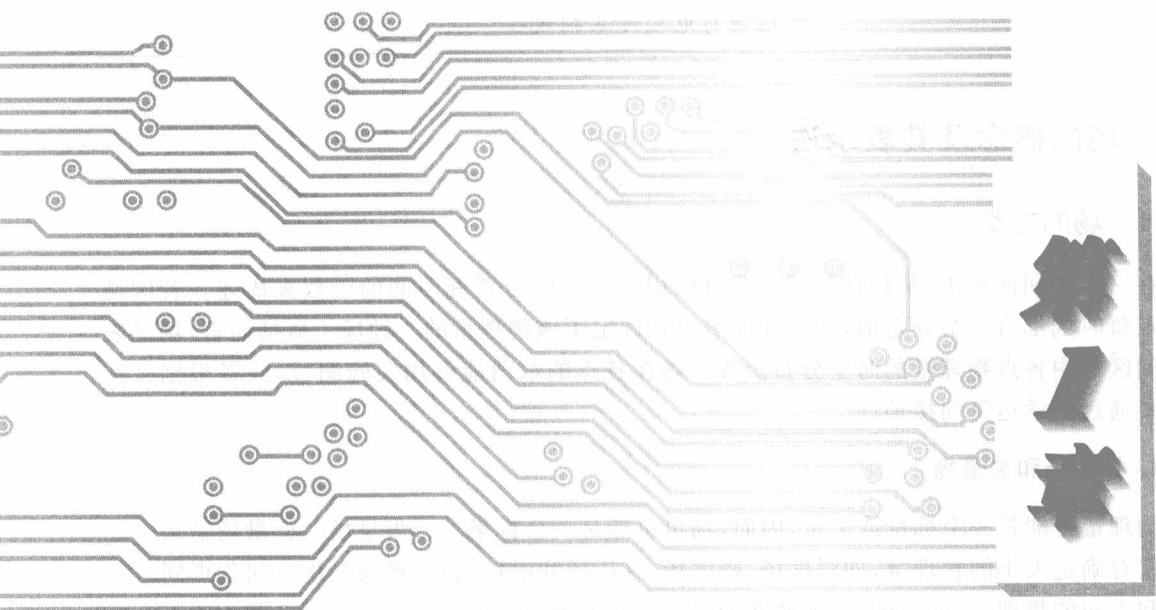
3.1.2	静磁场的矢量磁位和矢量磁位方程	(49)
3.2	介质中的静态场——辅助场量方程	(52)
3.2.1	电介质中的静电场	(52)
3.2.2	磁介质中的静磁场	(56)
3.3	导体中的静态场——稳恒电流场和稳恒电场方程	(61)
3.3.1	导体的传导性和欧姆定律	(61)
3.3.2	导体的能量损耗和焦耳定律	(62)
3.3.3	含源电流回路的电源电动势	(63)
3.3.4	稳恒电流场和稳恒电场方程	(64)
3.4	静态场中的导体	(65)
3.4.1	电容和电容器	(65)
3.4.2	电感和电感器	(68)
3.4.3	电阻和电阻器	(70)
3.5	静态场的边界条件	(71)
3.5.1	静电场的边界条件	(72)
3.5.2	静磁场的边界条件	(73)
3.5.3	稳恒电流场和稳恒电场的边界条件	(75)
* 3.6	静态场的能量	(76)
3.6.1	静电场的能量	(76)
3.6.2	静磁场的能量	(79)
3.7	静态场的计算方法	(82)
3.7.1	静态场的分布型问题	(82)
3.7.2	静态场的边值型问题	(88)
3.7.3	直接积分法	(90)
* 3.7.4	分离变量法	(91)
3.7.5	镜像法	(96)
3.7.6	无源区问题的类比解法	(97)
3.8	静态场的应用	(100)
3.8.1	静电比拟在电解槽中的应用	(100)
3.8.2	带电粒子流的电、磁偏转在喷墨打印机和回旋加速器中的应用	(101)
3.8.3	霍尔效应在磁流体发电机中的应用	(102)
3.8.4	超导现象在磁悬浮技术中的应用	(103)
	思考题	(104)
	习题	(105)
<b>第4章</b>	<b>动态场</b>	(109)
4.1	静态场方程在时变条件下的推广	(110)
4.1.1	法拉第电磁感应定律的启示——涡旋电场	(110)
4.1.2	问题的提出——位移电流	(111)
4.1.3	动态场基本方程——麦克斯韦方程	(112)

4.2	辅助动态位 .....	(113)
4.2.1	时变电磁场的标量电位和矢量磁位 .....	(113)
4.2.2	时变电磁场动态位的波动方程 .....	(114)
4.3	时变电磁场的边界条件 .....	(115)
4.3.1	边界条件的一般形式 .....	(115)
4.3.2	边界条件的特殊形式 .....	(115)
4.4	时变电磁场的能量、能流和能量守恒定律 .....	(116)
4.4.1	时变电磁场的能量 .....	(116)
4.4.2	时变电磁场的能流——坡印廷矢量 .....	(116)
4.4.3	时变电磁场的能量守恒定律——坡印廷定理 .....	(117)
4.5	时谐电磁场 .....	(119)
4.5.1	时谐电磁场的复数表示法 .....	(119)
4.5.2	时谐电磁场的麦克斯韦方程和本构方程 .....	(121)
4.5.3	时谐电磁场的辅助动态位 .....	(121)
4.5.4	时谐电磁场的复坡印廷定理 .....	(123)
4.6	动态场的应用 .....	(125)
4.6.1	电磁感应在电子感应加速器中的应用 .....	(125)
4.6.2	电磁屏蔽在电磁兼容技术中的应用 .....	(126)
4.6.3	瞬变电磁场在雷达中的应用——冲激脉冲雷达 .....	(128)
4.7	麦克斯韦和麦克斯韦理论建立的意义 .....	(129)
4.7.1	麦克斯韦生平简介 .....	(129)
4.7.2	麦克斯韦理论的建立过程 .....	(129)
4.7.3	麦克斯韦理论的意义 .....	(131)
	思考题 .....	(132)
	习题 .....	(132)
<b>第5章</b>	<b>电磁波的传播</b> .....	<b>(135)</b>
5.1	一般波动方程 .....	(136)
5.2	无界均匀媒质中平面电磁波的传播 .....	(137)
5.2.1	理想介质中的平面电磁波 .....	(137)
5.2.2	导电媒质中的平面电磁波 .....	(142)
5.2.3	任意方向传播的均匀平面电磁波 .....	(148)
5.2.4	平面电磁波的极化 .....	(149)
5.3	有界均匀媒质中平面电磁波的传播 .....	(153)
5.3.1	不同理想介质平面边界上入射的均匀平面电磁波 .....	(153)
5.3.2	理想介质和理想导体平面边界上入射的均匀平面电磁波 .....	(161)
5.4	无线电波的传播 .....	(166)
5.4.1	无线电波传播概论 .....	(166)
5.4.2	地波传播 .....	(169)
5.4.3	天波传播 .....	(170)



5.4.4	空间波传播 .....	(172)
5.5	电磁波传播的应用 .....	(174)
5.5.1	极化技术在目标识别中的应用 .....	(174)
5.5.2	反射特性在对流层散射通信中的应用 .....	(175)
<b>第6章</b>	<b>电磁波的传输</b> .....	(181)
6.1	传输线概述 .....	(182)
6.2	导行电磁波的一般传输特性分析 .....	(184)
6.2.1	纵向场量法 .....	(185)
6.2.2	各类导波模式的一般传输特性 .....	(187)
6.3	矩形波导中导行电磁波的传输特性 .....	(190)
6.3.1	导波模式的横场分布特性 .....	(190)
6.3.2	导波模式的纵场传输特性 .....	(194)
6.3.3	导波主模式的传输特性 .....	(195)
6.4	其他导波系统简介 .....	(199)
6.4.1	圆形波导 .....	(199)
6.4.2	同轴波导 .....	(200)
6.4.3	微带线和类微带线 .....	(202)
6.4.4	介质波导和光波导 .....	(206)
6.5	微波传输线 .....	(210)
6.5.1	一般传输线方程 .....	(211)
6.5.2	传输波的传输特性 .....	(215)
6.5.3	传输线的工作状态 .....	(216)
6.5.4	传输线的阻抗匹配 .....	(221)
6.6	电磁波传输的应用 .....	(224)
6.6.1	数字微波通信在军事上的应用 .....	(225)
6.6.2	卫星通信在全球卫星定位系统中的应用 .....	(226)
6.6.3	光纤通信传输系统在全光网络通信技术中的应用 .....	(227)
6.6.4	宽带传输技术在多媒体通信中的应用 .....	(229)
	思考题 .....	(230)
	习题 .....	(232)
<b>第7章</b>	<b>电磁波的辐射</b> .....	(235)
7.1	赫兹和赫兹实验 .....	(236)
7.2	振荡偶极子的辐射 .....	(237)
7.2.1	滞后位 .....	(237)
7.2.2	振荡电偶极子(赫兹偶极子)的辐射 .....	(238)
7.2.3	振荡磁偶极子的辐射 .....	(241)
7.3	天线的电参量 .....	(243)
7.3.1	方向性图、主瓣宽度和副瓣电平 .....	(243)
7.3.2	方向性系数、效率和增益系数 .....	(244)

7.3.3	输入阻抗和辐射阻抗 .....	(245)
7.4	线形天线 .....	(246)
7.4.1	对称振子天线 .....	(246)
7.4.2	引向天线 .....	(249)
7.4.3	宽频带天线 .....	(250)
7.4.4	螺旋天线 .....	(251)
7.4.5	旋转场天线 .....	(252)
7.4.6	槽隙天线 .....	(254)
7.4.7	微带天线 .....	(255)
7.5	面形天线 .....	(257)
7.5.1	面形天线辐射场的分析方法 .....	(257)
*7.5.2	惠更斯面元的辐射 .....	(257)
7.5.3	喇叭天线 .....	(260)
7.5.4	抛物面天线 .....	(261)
7.5.5	双反射面天线 .....	(262)
7.6	天线阵 .....	(263)
7.6.1	方向性相乘原理 .....	(264)
7.6.2	常见二元阵天线 .....	(265)
7.6.3	直线阵天线 .....	(266)
7.7	电磁波辐射的应用 .....	(269)
7.7.1	方向性相乘原理在相控阵天线中的应用 .....	(269)
7.7.2	智能天线在移动通信系统中的应用 .....	(270)
7.7.3	电磁辐射在电子战中的应用 .....	(272)
7.7.4	电磁辐射在生物电磁学中的应用 .....	(273)
	思考题 .....	(274)
	习题 .....	(275)
<b>第8章</b>	<b>综论</b> .....	(277)
8.1	电磁理论的进展与科技发展的关系 .....	(278)
8.2	对场本质的探索与认识进程 .....	(279)
8.3	场源、场量和媒质的相互作用规律和转化关系 .....	(280)
8.4	电磁定律、定理和方程的推演关系 .....	(283)
8.5	理解、分析和计算场问题的重要方法 .....	(284)
<b>附录A</b>	<b>重要矢量公式</b> .....	(286)
<b>附录B</b>	<b>常用坐标系的变换关系</b> .....	(286)
<b>附录C</b>	<b>梯度、散度、旋度和拉普拉斯的常用坐标表示式</b> .....	(288)
	<b>部分习题参考答案</b> .....	(290)
	<b>参考文献</b> .....	(295)



# 场论基础

矢量分析主要包含矢量代数、正交坐标系和矢量微积分,场的理论是通过矢量分析来表述的,所以矢量分析与场论密不可分。本章首先介绍场的数学概念和表示方法,进而对场的场域性质和场点性质及其描述方法做了对比讨论,着重讨论了标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的物理概念及其运算规律,在此基础上介绍总结矢量场性质的亥姆霍兹定理。

在各专业领域中,都有表述相关学科内容的特殊语言,如文学语言、绘画语言、音乐语言、舞蹈语言和计算机语言等。同样,矢量分析就是表述电磁场与电磁波问题的数学语言,它能定量、准确、简洁、紧凑而雅致地描述场与波的基本特性和变化规律,是学好本门课程的有效工具和入门基础。

## 1.1 场的概念及其表示法

### 1.1.1 场的分类

在一个空间区域中,某物理量的分布可以用一个空间位置和时间的函数来描述。若区域中每点每时刻都有一个确定值,则在此区域中就确定了该物理量的一种场。概括而言,场是表征空间区域中各点物理量的时空分布函数。场在各点的数值能够用实验测量,或者根据某些其他量通过数学运算间接预计。

#### 1. 标量场和矢量场

物理量可能是一个标量或矢量,因而,场也可能是一个标量场或矢量场。标量场是指空间各点仅有确定大小的物理量,如温度场、密度场、气压场和电位场;矢量场是指空间各点同时有大小和方向的物理量,如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场。

#### 2. 静态场和时变场

静态场是指仅由空间位置确定,不随时间变化的场,如静电场和静磁场;时变场是指同时随空间位置和时间变化的场,如时变电磁场。时变场又称为动态场。

### 1.1.2 矢量场的基本运算

除去矢量除法没有定义外,矢量的加、减和乘都比标量的加、减、乘和除更加复杂。一个矢量  $\mathbf{A}$  可用一条用箭头指示方向的线段来表示,线段长度表示矢量  $\mathbf{A}$  的模  $A$ ,箭头指向表示矢量  $\mathbf{A}$  的方向,如图 1.1 所示。一个模为 1 的矢量称为单位矢量。取  $\mathbf{a}_A$  表示与  $\mathbf{A}$  同方向的单位矢量,则有  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_A A$ , 其中

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1)$$

#### 1. 矢量加、减法

两个矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  可按平行四边形法则相加,其对角线表示合成矢量  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , 如图 1.2 所示。矢量加法服从交换律和结合律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad (1.3)$$

$\mathbf{B}$  和  $-\mathbf{B}$  可以看做大小相等方向相反的两个矢量,故借助于矢量加法也可以实现矢量减法,如图 1.3 所示,有

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad (1.4)$$

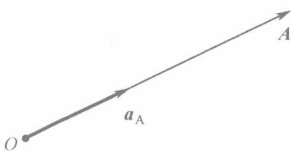


图 1.1 点 P 处的矢量

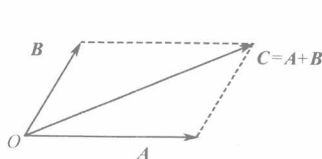


图 1.2 矢量加法

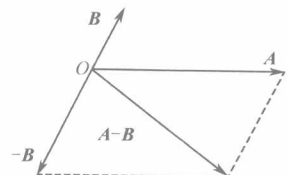


图 1.3 矢量减法

## 2. 矢量乘法

一个标量  $\eta$  与一个矢量  $\mathbf{A}$  的乘积  $\eta\mathbf{A}$  仍为一个矢量,其大小为  $|\eta|A$ ,其方向由  $\eta$  的正负来确定:若  $\eta > 0$ ,则  $\eta\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}$  平行同向;若  $\eta < 0$ ,则  $\eta\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}$  平行反向。

两个矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的点积(或标积)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  是一个标量,可看做两矢量相互投影之值,定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.5)$$

式中,  $\theta$  的取值范围为  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。如图 1.4 所示,当  $\theta$  为锐角、直角和钝角时,点积标量为正、零和负值。矢量的点积满足交换律和分配律。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.7)$$

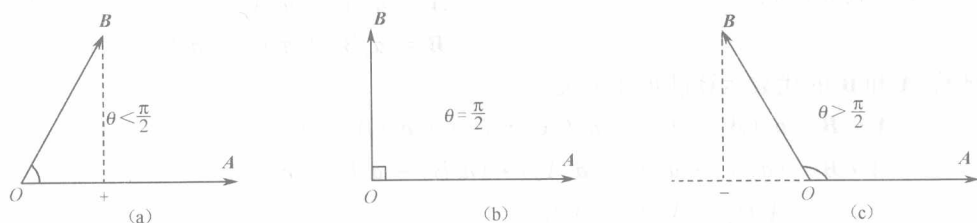


图 1.4 矢量点积

两个矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的叉积(或矢积)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  是一个矢量,它垂直于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  所在的平面,其指向按右旋法则来确定:当右手四指从矢量  $\mathbf{A}$  旋转  $\theta$  角至  $\mathbf{B}$  时大拇指的指向,如图 1.5 所示,其定义为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_n AB \sin \theta \quad (1.8)$$

叉积不满足交换律,但满足分配律,有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.10)$$

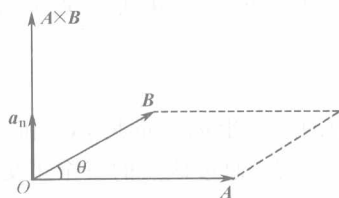


图 1.5 矢量叉积

### 1.1.3 常用正交坐标系

一般性的矢量运算并未涉及具体的几何形状,但在实际工程应用中,往往要涉及具体的几何形状,直接运用矢量运算关系式来求解不同物体中的场解是十分复杂的。按物体形状引入相应坐标系,就可以在复杂的矢量运算中将矢量按坐标投影形式分解为简单的标量,然后再合成矢量。这样,不仅可以简化对电磁问题的分析和计算,更便于在坐标分量形式下考查电磁问题的物理特性,了解场的空间分布和变化规律。

三种常用坐标系是:直角(或笛卡儿)坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。直角坐标系是最基

本也最简单的坐标系,其坐标单位矢量是常矢,而其他坐标系的坐标单位矢量一般是变矢,其方向随空间位置不同而变化。我们应当首先重点掌握直角坐标系及其应用。

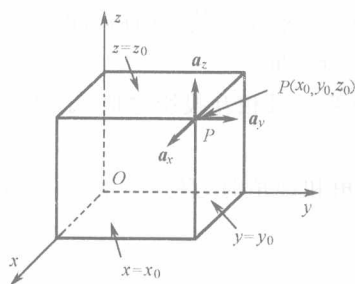


图 1.6 直角坐标系

### 1. 直角坐标系

如图 1.6 所示,直角坐标系中的三个坐标变量是  $x, y$  和  $z$ , 点  $P(x_0, y_0, z_0)$  是三个平面  $x = x_0, y = y_0$  和  $z = z_0$  的交点。通过该点的三个正交单位矢量  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{a}_z$  指向  $x, y$  和  $z$  增加的方向,且满足如下右旋关系

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (1.11)$$

矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  在直角坐标系中分解为如下三个分量

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z \quad (1.12b)$$

显然,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的代数运算满足如下关系

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_x \pm B_x) + \mathbf{a}_y (A_y \pm B_y) + \mathbf{a}_z (A_z \pm B_z) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

在直角坐标系中,点  $P$  的位置矢量

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \quad (1.16)$$

其微分为

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \quad (1.17)$$

### 2. 圆柱坐标系

如图 1.7 所示,圆柱坐标系中的三个坐标变量是  $\rho, \varphi$  和  $z$ , 点  $P(\rho_0, \varphi_0, z_0)$  是圆柱面  $\rho = \rho_0$ 、半平面  $\varphi = \varphi_0$  和平面  $z = z_0$  的交点。通过该点的三个正交单位矢量  $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi$  和  $\mathbf{a}_z$  指向  $\rho, \varphi$  和  $z$  增加的方向,且满足如下右旋关系

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \quad (1.18)$$

矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  在圆柱坐标系中分解为如下三个分量

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\rho B_\rho + \mathbf{a}_\varphi B_\varphi + \mathbf{a}_z B_z \quad (1.19b)$$

显然,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的代数运算满足如下关系

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_\rho (A_\rho \pm B_\rho) + \mathbf{a}_\varphi (A_\varphi \pm B_\varphi) + \mathbf{a}_z (A_z \pm B_z) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_\rho B_\rho + \mathbf{a}_\varphi B_\varphi + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_\rho B_\rho + \mathbf{a}_\varphi B_\varphi + \mathbf{a}_z B_z)$$

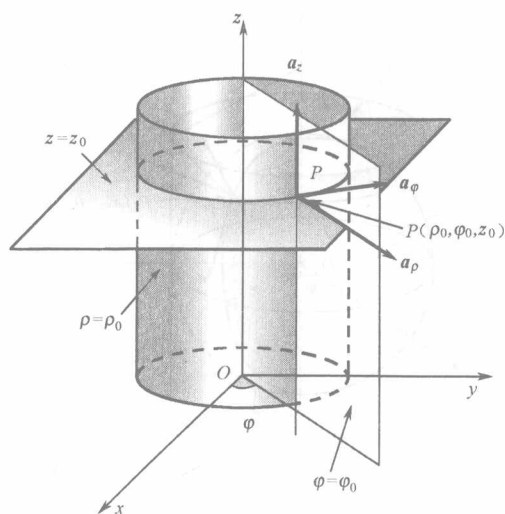


图 1.7 圆柱坐标系

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{a}_\rho (A_\varphi B_z - A_z B_\varphi) + \mathbf{a}_\varphi (A_z B_\rho - A_\rho B_z) + \mathbf{a}_z (A_\rho B_\varphi - A_\varphi B_\rho) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

在圆柱坐标系中,点  $P$  的位置矢量可由半平面  $\varphi = \varphi_0$  上的几何关系得到

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \tag{1.23}$$

在工程应用中,由于涉及不同形状的物体,为了分析计算在边界影响下存在的实际电磁结构及其场解,往往需要同时采用几个不同的坐标系,此时需要进行不同坐标系间的相互转换。包括坐标系、单位矢量和矢量间的变换等,详见附录 B。这里只写出圆柱坐标系与直角坐标系间的变换与逆变换公式

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \tag{1.24a}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}, z = z \tag{1.24b}$$

### 3. 球坐标系

如图 1.8 所示,球坐标系中的三个坐标变量是  $r, \theta$  和  $\varphi$ ,点  $P(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  是球面  $r = r_0$ 、正圆锥面  $\theta = \theta_0$  和半平面  $\varphi = \varphi_0$  的交点。通过该点的三个正交单位矢量  $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$  和  $\mathbf{a}_\varphi$  指向  $r, \theta$  和  $\varphi$  增加的方向,且满足如下右旋关系

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \tag{1.25}$$

矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  在球坐标系中分解为如下三个分量

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi \tag{1.26a}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_r B_r + \mathbf{a}_\theta B_\theta + \mathbf{a}_\varphi B_\varphi \tag{1.26b}$$

显然,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的代数运算满足如下关系

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_r (A_r \pm B_r) + \mathbf{a}_\theta (A_\theta \pm B_\theta) + \mathbf{a}_\varphi (A_\varphi \pm B_\varphi) \tag{1.27}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi \tag{1.28}$$

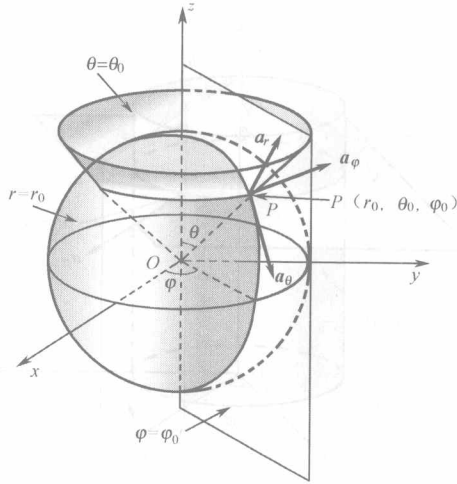


图 1.8 球坐标系

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{a}_r (A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta) + \mathbf{a}_\theta (A_\varphi B_r - A_r B_\varphi) + \mathbf{a}_\varphi (A_r B_\theta - A_\theta B_r) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

在球坐标系中,点  $P$  的位置矢量可由球面  $r = r_0$  上的几何关系得到

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r \quad (1.30)$$

球坐标系与直角坐标系间的转换关系详见附录 B。这里只写出它们间的变换与逆变换公式

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta \quad (1.31a)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.31b)$$

## 1.2 场的性质和描述

### 1.2.1 场域性质

场是有限空间区域中位置的分布函数,可以表示成位置矢量或三维坐标的解析函数形式。在实际应用中,常常需要了解场在有限区域中的分布状况,以及场与产生它的源的相依关系。对于抽象的场,我们的确能够应用相应的函数形式来精确描述,但直观性不够。为了更加形象地描述场的空间分布状况,可用分布于有限区域界面或界线内的等值面簇或等值线簇来表示标量场,用穿过有限区域界面或界线的矢量线簇来表示矢量场。所谓场的场域性质,是指场在空间有限区域的分布状况。由于限于有限区域,通常采用积分形式来表述,所以场的场域性质又称为积分性质。

#### 1. 标量场的等值面

在研究标量场时,引入等值面可以形象、直观地描述场的空间分布状况。在标量场中,使标量函数  $u(x, y, z)$  取相同数值的点形成的空间曲面,称为标量场的等值面。对于任意给定常数  $C$ , 描述曲面的轨迹方程



$$u(x, y, z) = C \quad (1.32)$$

就是等值面方程。

标量场的等值面具有如下特征：

(1) 常数  $C$  取不同数值时, 就得到不同的等值面方程, 因而形成充满标量场  $u$  所在空间的等值面簇, 如图 1.9 所示;

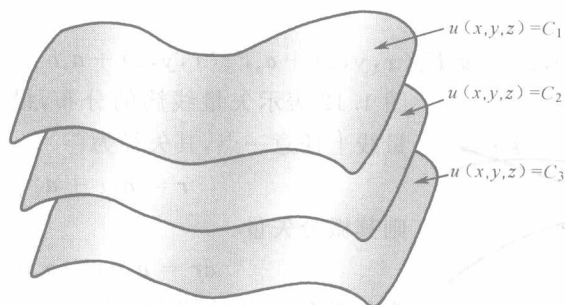


图 1.9 等值面簇

(2) 由于  $u(x, y, z)$  是坐标的单值函数, 场中任意一点只能在一个等值面上, 标量场的等值面互不相交;

(3) 三维标量场退化为二维或一维的标量场时, 等值面退化为等值线(曲线或直线)。

例如, 温度场中的等温面, 引力场中的等势面, 电位场中的等位面及气象图中的等压线和地形图中的等高线等, 都是具体应用实例。图 1.10 表示位于坐标原点, 电量为  $q$  的点电荷在自由空间任意点  $(x, y, z)$  所形成的等位面簇。其电位表达式为

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

等位面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = C$  所描述的曲线是一簇以原点为球心的同心球面。图 1.11 表示地形图中的等高线, 曲线的分布状况和疏密程度可以判断山势的高低和坡度变化的缓急。在现实生活中, 按这样的思路描述物体的空间形状和位置的实例不胜枚举。例如, 在医疗检测仪器中, 用于探测脑部肿瘤形状、大小和位置的 CT 或核磁共振技术, 电视气象预报中的卫星云图, 影视动画中用电脑绘制二维或三维动画的分格技术等, 尽管并不一定包含“等值”这一特性, 但其所采用的描述空间形状分布的方式是一致的。

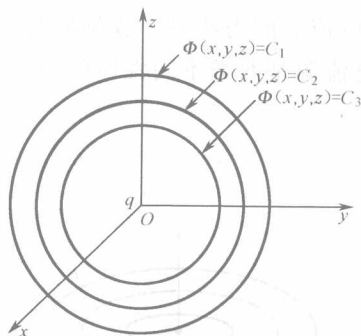


图 1.10 点电荷的等位面簇

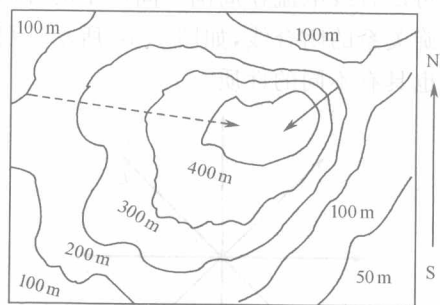


图 1.11 地形图的等高线