高等学校试用教材

运筹学

罗荣桂 主编

武汉工业大学出版社

高 等 学 校 试 用 教 材

运 筹 学

罗荣桂 主 编
李培生 副主编

武 汉 工 业 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是根据编者多年来讲授《运筹学》课程的讲稿反复修改而成。

全书共分十一章，从应用的角度介绍了运筹学中一些主要分支的基本理论和方法。其内容包括线性规划、整数规划、动态规划、网络分析与统筹方法、决策分析、存储论、排队论、马尔可夫决策过程和模拟技术。书中列举了不少例题，以帮助学生理解和掌握本书的内容，每章之末均附有一定数量的习题，供教学之用。

本书可作为大专院校的管理工程、系统工程、经济管理和计算机应用专业的教材，部分内容可供上述专业的研究生使用；同时也可供工程技术人员、科研人员及企事业管理人员阅读和参考。

运 筹 学

罗荣桂 主 编

李培生 副主编

※

武汉工业大学出版社出版发行

（武昌珞狮路14号　邮政编码430070）

新华书店湖北发行所经销

武穴市新华印刷厂印刷

※

开本 787×1092　1/16　印张：21.625　字数：490千字

1990年7月第1版　　1990年7月第1次印刷

印数1－1500

ISBN　7－5629－0378－6/O·0017

定价 4.30元

前　言

随着我国四化建设和现代化管理科学的迅速发展，国民经济各部门、各企事业对经济和管理的决策工作提出了愈来愈高的要求。运筹学作为现代化管理和科学决策的有力工具，它是在最近四十余年发展起来的用定量化方法研究管理决策并提供科学依据的一门新兴学科。因此，它在国民经济的各个领域，诸如工程技术、生产组织、军事计划和管理以及决策分析中都有着极为广泛的应用。

为适应工科院校的管理工程类专业、计算机应用专业和财经院校的经济管理等专业的教学需要，本书是根据高校无机非金属材料类专业教材编审委员会管理科学编审组于1988年1月在武汉召开的编审会议确定的《运筹学》课程教学大纲而编写的。

本书主要依据编者在多年来讲授本课程的讲稿，并酌量参阅了国内外目前较新的同类书籍和文献，按理论与实际并重的原则编写而成。书中比较系统地讲述了运筹学中几个主要应用分支的基本方法及理论，力求做到：以各种实际问题为背景，采用富有启发性的例子说明从实际问题到导出各类运筹学模型的抽象过程，通过几何的分析和其它直观的手段，说明模型求解的基本思路，并在此基础上详尽地阐述求解的方法；在给出实际问题的经济现象的数学描述时，注重模型及其求解结果的经济含意和有关概念的经济解释；考虑到工科学生的实际和学习运筹学的多数读者已具备了微积分、线性代数和概率论等一些基本知识，我们既尽量避免了过多过繁的数学论证，又对本学科的基本概念、基本理论、数学运算和逻辑推理给予了足够的重视，从而保持了学科的系统性和逻辑的完美性，使学生便于接受、理解和举一反三；随着电子计算机在运筹学应用中的深入，本书还十分注重把各种解法归纳成接近于程序语言的算法步骤和逻辑框图，以使给出的算法富有实用价值；尽可能地介绍该领域中的国内外最新成果，以反映该学科的最新进展。

本书为工科院校管理工程、系统工程、计算机应用等专业和财经院校的经济管理类专业的本科和专科的教材，部分内容适用于上述各专业方向的研究生；同时还可供工程技术人员、科研人员及管理干部自学与参考。全书共十一章，授完全书约需80学时。各校根据不同专业、不同层次和不同的学时数，可在内容上有所取舍。每章之后均附有一定数量的习题，以供学生课外练习。

本书由罗荣桂担任主编，李培生任副主编。参加编写工作的有：杨民宪（第一、二章及第三、四章的一部分）、高永和（第五章和第三、四章的大部分）、李培生（第六、七章）罗荣桂（第八、九、十、十一章）。全书由罗荣桂最后统一修改、整理和定稿而成。

本书由武汉大学冯文权教授担任主审。参加审稿的有中科院数理所范文涛研究员、国家科委管理学院牛长立、刘忠斌副教授。他们对初稿提出了不少宝贵的意见，编者在此谨向他们表示深切的谢意。

由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，恳请使用本书的师生和广大读者批评指正，以求改进。

编　者

1989年5月

目　录

第一章　线性规划（Ⅰ）

线性规划问题是一种线性的条件极值问题，是实际问题的数学抽象或数学近似。概略地说，线性规划的实质在于：在一定的环境制约下寻求一种"最好的"活动方案，使活动的收效最大或者损失最小。

线性规划是运筹学中最早形成并且最成熟的一个分支。1939年，苏联的康特洛维奇（Kantorovich）就从生产组织和计划的角度提出过线性规划问题。但他的工作没有引起苏联学术界的重视，直到1959年才为世界各国学者所知晓。40年代，美国的丹泽格（G.B. Dantzig）在研究军事行动计划的过程中提出了线性规划的一般数学形式，并于1947年发现了求解线性规划问题的单纯形方法。线性规划和单纯形方法的出现引起了经济、数学、军事等各界专家的重视。在理论方面，著名数学家冯·诺曼（Von Neumann）提出了对偶原理，扩展了线性规划和单纯形方法的研究领域。此后，线性规划的理论日益完善，并推动了运筹学中有关分支的发展，如整数规划、非线性规划、随机规划和多目标规划等。在应用方面，电子计算机的出现和发展——本世纪人类最伟大的发明之一——为线性规划的广泛应用铺平了道路。现在，线性规划已经成为分析各种经济、管理问题的重要手段，广泛地应用于农业、工业、商业、交通运输、军事和公用事业等各个领域。

本章主要介绍线性规划的有关基本概念和著名的单纯形方法。

§1.1　线性规划的基本概念

1.1.1　线性规划问题

生产实践中的许多问题都可以归结为线性规划问题。先考察几个典型的例子会有助于我们理解线性规划的实际背景。

【例1.1】　某厂可生产甲、乙两种市场上畅销的玩具，根据以往的统计数据已知：每生产一件甲型玩具，可获得收益2元并需要投入手工工时0.2小时、机床工时0.3小时、马口铁0.1公斤；每生产一件乙型玩具，可获得收益3元并需要投入手工工时0.2小时、机床工时0.4小时、马口铁0.2公斤。由于劳动力、设备、场地、电力和原材料来源等因素的限制，每周可利用的总的手工工时、机床工时和马口铁分别为100小时、120小时和50公斤。问：每周内甲、乙两种产品各生产多少件才能使该厂的收益最大？

解　设甲、乙两种产品每周分别生产x_1件和x_2件。产量要受到可利用工时和原料供应量的约束，故x_1和x_2应满足下列不等式组：

$$\begin{cases}0.2x_1+0.2x_2\leqslant 100 & (\text{手工工时约束})\\ 0.3x_1+0.4x_2\leqslant 120 & (\text{机床工时约束})\\ 0.1x_1+0.2x_2\leqslant 50 & (\text{原料供应约束})\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 & (\text{产量非负})\end{cases}$$

产量为（x_1，x_2）时，每周的收益为

$$z=2x_1+3x_2$$

于是所提的问题就转化成一个数学问题：寻求适合上述线性不等式组的两个实数x_1和x_2，使它们的线性函数z达到最大值。（注：原则上x_1和x_2还应是整数，但这里暂不考虑这个要求，见第四章整数规划）。显然，只要解决了这个数学问题，原问题也就解决了。

很容易把例1.1的问题推广到生产多种产品同时受到多种资源约束的场合，这类问题叫做资源利用问题。

【例1.2】（资源利用问题）设某企业拥有m种资源（可以是土地、能源、原料、劳动力、设备工时等等），第i种资源的拥有量为b_i（$i=1$，2，…，m）。该企业利用这些资源可以生产n种畅销产品，每单位第j种产品可获得收益c_j并需要耗用a_{ij}个单位的第i种资源（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）。问：每种产品各生产多少才能使企业的总收益最大？

解　仿照例1.1，以x_1，x_2，…，x_n分别表示第1，2，…，n种产品的产量。于是，产量非负并要受到资源拥有量的约束：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\ \quad\cdots\qquad\qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\ \quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}$$

在产量（x_1，x_2，…，x_n）下，企业的总收益为

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

这样就把资源利用问题转化成为数学问题：寻求满足上述线性不等式组的n个实数x_1，x_2，…，x_n使线性函数z达到最大值。

资源利用问题涉及到合理地分配和利用有限的资源，这类问题在现实生产活动中是很常见的，读者可自行举出有关的具体实例。

【例1.3】（运输问题）某地区两个水泥厂生产水泥供给三个建筑工地使用，每个厂

表1—1

运价（元/吨）　产地＼销地	销地1	销地2	销地3	月产量（吨）
水泥厂 1	5	8	10	1000
水泥厂 2	7	9	8	800
月需求量（吨）	600	700	400	

的月产量、每个建筑工地的月需求量以及从各水泥厂到各工地的运输单价见表1—1。问：怎样调运水泥才能使每月的总运输费用最小？

解 用x_{ij}表示从水泥厂i（$i=1$，2）调运到工地j（$j=1$，2，3）的水泥量（吨）。每月从各水泥厂运出的水泥不得超过各厂的月产量，而运到各工地的水泥应正好等于各工地的月需求量，此外，调运量总是非负的。因此，应有

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 1000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 800 \\ x_{11}+x_{21}=600 \\ x_{12}+x_{22}=700 \\ x_{13}+x_{23}=400 \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

当调运量为x_{ij}时，每月的总运费为

$$z=5x_{11}+8x_{12}+10x_{13}+7x_{21}+9x_{22}+8x_{23}$$

可见，只要解决了数学问题"求满足上述线性不等式和等式的一组实数x_{11}，x_{12}，…，x_{23}使线性函数z达到最小值"，那么也就解决了原有水泥调运问题。

读者可自行把上述运输问题推广到有多个产地和多个销地的情况。当然，调运的物资也不必局限于水泥。运输问题的详细讨论见第三章。

【例1.4】（配料问题）某厂接到一种合金订货，订货要求合金中含有20～30%的铅、30%的锌和40～50%的锡。该厂现有A、B、C、D和E五种合金原料，它们的铅、锌、锡含量和价格见表1—2。假定冶炼过程中的损失可以忽略不计，问：如何配料可使合金的原料成本最低？

表1—2

原　　料	A	B	C	D	E
铅　含　量　%	10	10	40	60	20
锌　含　量　%	10	30	50	30	40
锡　含　量　%	80	60	10	10	40
价格（元/公斤）	4.1	4.3	5.8	6.1	5.5

解 设配料中原料A、B、C、D、E所占的百分比分别为x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，根据订货要求和配料比的含意，应有：

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 + \quad x_5 = 1 \\ 10x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 60x_4 + 20x_5 \geqslant 20 \\ 10x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 60x_4 + 20x_5 \leqslant 30 \\ 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 30x_4 + 40x_5 = 30 \\ 80x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 40x_5 \geqslant 40 \\ 80x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 40x_5 \leqslant 50 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

当配料比为（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）时，单位合金产品的原料成本为

$$z = 4.1x_1 + 4.3x_2 + 5.8x_3 + 6.1x_4 + 5.5x_5$$

于是，配料问题也转化成了一个数学问题：求满足上述线性等式和不等式的实数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5使线性函数z达到最小值。

我们看到，以上几个例子中的问题都可以通过设置适当的变量而转化为数学问题，只要解决了这类数学问题，原有问题也就解决了。为此，有必要进一步考察这类数学问题的共同特征。

首先，这类问题都是寻求适合若干等式或不等式的一组变量值以使它们的一个函数取得最大值（例1．1，例1．2）或最小值（例1．3，例1．4）。其次，这类问题中所有表达式都是关于变量组的线性（一次）表达式——线性等式、线性不等式和线性函数。我们把具有上述特点的数学问题叫做线性规划（Linear Programming），简称为LP。

定义1.1 线性规划问题LP是指如下形式的问题：寻求n个实数x_1，x_2，…，x_n使之

（1）适合m个线性等式或不等式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases} \tag{1.1a}$$

（2）使线性函数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.2a}$$

取得最大值或者最小值。

这里，n和m是已知的正整数；a_{ij}，b_i和c_j（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）是已知的实数；符号$\gtreqless$表示$\leqslant$，$=$，$\geqslant$三种关系中的任意一种。待定实数x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）叫做决策变量（Decision Variables）；等式或不等式组（1.1a）叫做约束条件（Constraints）；函数（1.2a）叫做目标函数（Objective Function）。

在实际线性规划问题中，往往对决策变量有非负要求，但我们在这里暂时不作这种限制，不妨认为非负要求包含在约束条件（1．1a）中。

为了方便，我们常把LP写作

$$\max(\min) \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.2b}$$

$$\text{S.t.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{1.1b}$$

这里，max是英语动词maximize（使……最大化）的缩写；min是英语动词minimize（使……最小化）的缩写；S.t.是英语动词组Subject to（受制约于……）的缩写。

引入向量和矩阵记号：

$$\mathbf{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}=[b_1, b_2, \cdots, b_m]^T$$

$$\mathbf{c}=[c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

（上角标T表示向量或矩阵的转置，下同）则LP可以写成矩阵形式

$$\max(\min) \quad z=\mathbf{cx} \tag{1.2c}$$

$$\text{S.t.} \quad A\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{1.1c}$$

我们把x叫做决策向量，A叫做工艺系数矩阵，b叫做右端系数向量，c叫做价值系数向量。自然地，向量和矩阵中的分量也采用一致的名称，如c中的分量叫做价值系数，等等。

LP的实际背景是清楚的，即在一定的环境（约束条件）中寻求一种活动方案（决策向量）以获得"最好"的效果（目标函数最大或最小）。事实上，决策向量是活动方案的数量表述；约束条件刻划了环境对活动的制约；目标函数则是对活动效果的一种评价。例1.1—1.4都是LP的特例，只是在不同的场合有着不同的经济含意。

应当指出，把实际问题抽象成恰当的数学问题，或者说，构造恰当的数学模型，是件颇具创造性的工作。这也是运用线性规划解决实际问题的主要难点之一。读者应加强这方面的实践，逐步培养对实际问题的观察、分析和抽象能力。

1.1.2 线性规划问题的解

我们以式（1.1）和（1.2）规定的LP为对象来叙述可行解、可行域和最优解的概念。

定义1.2（可行解和可行域）满足约束条件（1.1）的n维向量x叫做LP的可行解（Feasible Solution）；所有可行解构成的集合叫做LP的可行域（Feasible Region），记为

$$F=\{\mathbf{x}: A\mathbf{x}\leqslant \mathbf{b}\} \tag{1.3}$$

式（1.3）右端的含意是：所有满足条件$A\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$的向量x构成的集合。以后，我们将经常采用类似的记号。

定义1.3（最优解）如果n维向量$\mathbf{x}^*$适合

（1）$\mathbf{x}^*\in F$（即$\mathbf{x}^*$是LP的可行解）；

（2）对于任何$\mathbf{x}\in F$，都有

$$\mathbf{cx}\leqslant\mathbf{cx}^*<+\infty, \text{当}\max z \tag{1.4}$$

或者

$$-\infty < cx^* \leqslant cx,\ \text{当}\min z \qquad (1.5)$$

就称x^*是LP的一个最优解（Optimal Solution）。

实际上，最优解就是目标函数值最大（对于最大化问题）或最小（对于最小化问题）的可行解。应当注意，式（1.4）或（1.5）还规定最优解的目标函数值必须是一个有限数。

【例1.5】 在例1．1中，读者可自行验证下面的

$$x^1=[100,\ 100]^T, \qquad x^2=[200,\ 150]^T$$

都是可行解，并且x^1不是最优解（因为$cx^1<cx^2$）。以后我们会看到，x^2是最优解。这是因为，任何其他可行解的目标函数值都不会大于cx^2。

一般来说，LP的解有三种可能的情形：

（1）可行域非空且有界。即存在可行解并且所有可行解的范数（向量中分量之平方和的平方根）都不大于一个固定的正数，在这种情形下可以断定LP必有最优解，因为有界闭区域上的连续函数可以取得最大最小值，例1.1就属于这种情况。

（2）可行域非空但无界。即存在可行解但某些可行解的范数可以大于任何给定的正数。在这种情形下，LP可能有最优解也可能没有最优解，需视价值系数的具体数值以及是最大化还是最小化而定。判别方法将在§1．3中介绍。

（3）可行域空。即约束条件矛盾，不存在可行解，在这种情形下当然就谈不上最优解了。

我们用两个简单的例子来说明情形（2）和（3）。

【例1.6】 给定LP如下

$$\max \quad z=x_1+x_2+x_3$$

$$\text{S.t.}\begin{cases} x_1-0.5x_2 = 1 \\ -5x_2+x_3=0 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

解 任取$\theta\geqslant 0$，则

$$x_1^0=1+0.5\theta, \quad x_2^0=\theta, \quad x_3^0=5\theta$$

是可行解，相应的目标函数值为

$$z=1+6.5\theta$$

显然，当$\theta\to+\infty$时，$[x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0]^T$仍是可行解并且范数$\sqrt{(1+0.5\theta)^2+\theta^2+(5\theta)^2}\to+\infty$同时还有$z\to+\infty$。这里，可行域非空但无界，并且没有最优解。读者可自行验证：如将此问题改为最小化(min)，则$x^*=[1,\ 0,\ 0]^T$就是最优解；如保持最大化不变把目标函数改为$z=x_1-6x_2+x_3$，则上述x^*也是最优解。

【例1.7】 某LP的约束条件如下

$$\begin{cases} 2x_1-x_2\leqslant 1 \\ -x_1+x_2\leqslant -2 \\ x_1\geqslant 0 \end{cases}$$

验证它的可行域是空集。

解 将前两个不等式两端对应相加，可得到$x_1 \leqslant -1$。因此，满足前两个不等式的x_1就不可能满足第三个不等式$x_1 \geqslant 0$。可见约束条件矛盾，不存在可行解。事实上，由图1—1即知：第一个约束条件要求可行解在直线$2x_1-x_2=1$的上方，第二个约束条件要求可行解在直线$-x_1+x_2=-2$的下方。所以前两个约束条件要求可行解位于左半平面的阴影部分中。但第三个约束条件却要求可行解位于右半平面，因此平面上没有同时满足这三个约束条件的点，即可行域空。

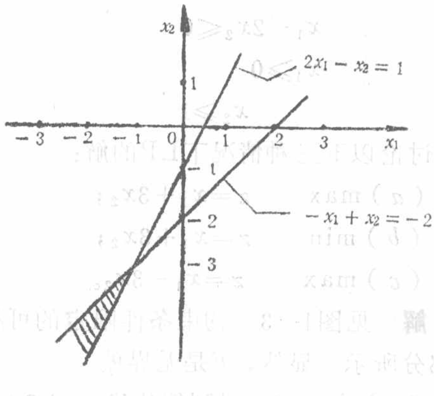

图1—1

把实际问题抽象为LP后，如果出现没有可行解或者没有最优解的情形，则必须考察数学模型是否正确地刻划了实际问题，找出症结，作必要的修正。

1.1.3 二维线性规划问题的图解法

对于只具有两个决策变量的二维LP，可以用图解法求解。下面，我们用例子来说明二维LP的图解方法。

【例1.8】 图解如下LP

$$\max \quad z=x_1+x_2$$

$$\text{S.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2 \leqslant 6\\ x_1+2x_2 \leqslant 4\\ x_1-\ x_2 \leqslant 1\\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

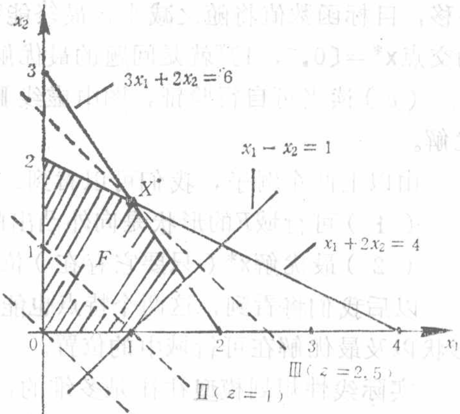

图1—2

解 见图1—2。$x_1 \geqslant 0$和$x_2 \geqslant 0$把可行域F限制在第一象限；第一个不等式把F限制在直线$3x_1+2x_2=6$的下方；第二个不等式把F限制在直线$x_1+2x_2=4$的下方；第三个不等式把F限制在直线$x_1-x_2=1$的上方。所有这些限定区域的公共部分或交集就是可行域F，如图中阴影部分所示。可见F是有界的。现在的问题是在F中找出使目标函数z取得最大值的点。为此，令z等于一个固定的数，如$z=0$，则目标函数规定了一条等值直线$z=x_1+x_2=0$，见虚线Ⅰ，再沿此等值线的法方向$[1,\ 1]^T$（即目标函数的系数向量）平移虚线Ⅰ，则目标函数z将随着等值线的平移而增大（反方向平移则减小）。平移至虚线Ⅱ处时，虚线Ⅱ与可行域F的所有交点都是使目标函数$z=1$的可行解。沿法方向继续平移等值线，同时保持它与F相交，直到不能再平移为止，见虚线Ⅲ（再平移就脱离F了）。这时，虚线Ⅲ与F的交点$\mathbf{x}^*$使目标函数取得了最大值，这样的交点就是问题的最优解。由图可见，本例的最优解只有一个，即$\mathbf{x}^*=[1,\ 1.5]^T$。目标函数的最大值为$z^*=1+1.5=2.5$。

【例1.9】 给定约束条件如下

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqslant 0 \\ x_1-2x_2\leqslant 0 \\ x_1\geqslant 0 \\ \quad x_2\geqslant 1 \end{cases}$$

分别讨论以下三种情况下LP的解：

(a) max $z=x_1+3x_2$；

(b) min $z=x_1+3x_2$；

(c) max $z=x_1-3x_2$。

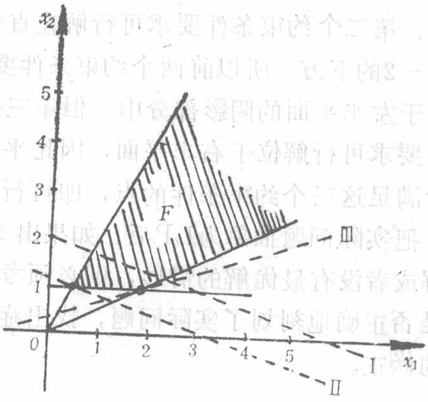

图1—3

解 见图1—3。约束条件限定的可行域F如阴影部分所示。显然，F是无界的。

(a) 令$z=6$，得到等值线 $x_1+3x_2=6$，见虚线Ⅰ，法向量为$[1, 3]^T$。由图可见，沿此法方向可以无限制地平移等值线而不会脱离F，即目标函数z可以趋于$+\infty$。故知，此问题有可行解但没有最优解。

(b) 目标函数与(a)相同，但是是最小优问题。这里，应将虚线Ⅰ沿负法方向$[-1, -3]^T$平移，目标函数值将随之减小，最终能移至虚线Ⅱ的位置（再移就脱离F了）。虚线Ⅱ与F的交点$\mathbf{x}^*=[0.5, 1]^T$就是问题的最优解，目标函数的最小值为$z^*=3.5$。

(c) 读者可自行验证，图中虚线Ⅲ（$x_1-3x_2=1$）与F的交点$[2, 1]^T$就是此问题的最优解。

由以上两个例子，我们可以看到二维LP的两个直观几何特征：

(1) 可行域F的形状是向外凸出的（只要它是非空的）；

(2) 最优解$\mathbf{x}^*$（只要它存在）位于可行域F的边界上，并且总能在F的顶点中找到。

以后我们将看到，这两个特点也能推广到多维LP。读者不妨想象一下三维LP可行域的形状以及最优解在可行域中的位置。

实际线性规划模型往往是多维的，因而二维LP的图解法对实际问题的作用不大。然而，这种方法却有助于我们理解线性规划的几何意义。

§1.2 标准线性规划问题和基本可行解

1.2.1 标准线性规划问题

线性规划问题LP的具体形式往往很不一致。可以最大化，也可以最小化；可以是等式约束，也可以是不等式约束；可以要求决策变量非负，也可以要求决策变量非正；等等。因此，LP不便于统一处理。为克服这种困难，我们先定义一种便于统一处理的标准形式，叫做标准线性规划问题，简称为SLP。然后再说明将一般LP转化成SLP的方法。