JIAO · CAI

SHI

全国高等师范专科学校教材

10

高等数学

（供化学专业用）

金井平　主编

东北师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

高等数学

金井平　主编

刘玉琏　主审

东北师范大学出版社

本书执笔

金井平
李景艳
张兴岩

全国高等师范专科学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

金井平 主编

责任编辑：杨述春 封面设计：王 帆 责任校对：辛 木

东北师范大学出版社出版 吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街 110 号） 长春新华印刷厂制版
（邮政编码：130024） 长春新华印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 1990 年 6 月第 1 版
印张：15.875 1990 年 6 月第 1 次印刷
字数：404 千 印数：0 001—5 000 册

ISBN 7-5602-0399-X/O·45 （压膜）定价：3.75 元

出版说明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决。近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的学科甚至编写了几种，质量参差不齐。虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而影响了师专的教学质量。

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教委师范司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的教学大纲；1988年7月在长春市东北师范大学又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988—1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》。八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理。

在国家教委师范司的统一布署、各省、市、自治区的大力帮助和出版社的积极组织下，这套教材聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高的学术水平的教授或副教授担任各科教材主编。各科教材由学术造诣比较深、熟悉师专教学情况的专家负责主审。各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，组织编者搜集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编、主审和各位编写

人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续问世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保证与师专教育实践和当代科学的同步发展。

1990年2月

前　言

本教材是依据国家教育委员会1988年7月召开的全国二年制高等师范专科学校教材编写出版规划会议的决定，遵照国家教育委员会1988年审定、颁发的二年制高等师范专科学校《高等数学教学大纲》（供化学专业使用）编写的。

在教材的编写中，我们从高等师范专科学校的培养目标出发，在注意该学科知识系统性的同时，根据化学专业的实际需要，注重理论的应用；坚持以加强基础知识、基本理论和基本技能的训练为重点，注重对学生能力的培养．本教材根据教学大纲的要求，基本内容按课堂教学总时数118学时编写．全书共分八章，包括一元函数微积分、多元函数微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数、常微分方程等几方面的内容．在每大节后面配置了一定数量的习题．书中标有*号的部分，供酌情选用．

吉林师范学院金井平副教授担任本书的主编，并编写了第一、二、三章，长春大学李景艳副教授编写了第四、七、八章，吉林省延边师范专科学校张兴岩副教授编写了第五、六章，最后由金井平进行修改、整理定稿．

本书由东北师范大学刘玉琏教授担任主审．刘玉琏教授对书稿进行了认真的审改，提出了许多宝贵的意见和建议．他的热心关怀与指导，使书稿的质量有了明显的提高．我们谨此表示衷心的谢意．

由于编者水平所限，书中难免有疏漏、不妥之处，敬请专家和广大师生不吝指正。

编　者

1989年5月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

高等数学的重要组成部分是微积分．函数、极限与连续是微积分的基本概念，也是微积分的基础，微积分正是以极限为基本工具，以连续函数为其主要研究对象的一门学科．用极限的方法来研究函数，正是高等数学区别于初等数学的一个显著标志．

在中学数学中，对函数的概念及基本性质已有较详尽的论述．本章仅在复习函数概念及其性质的基础上，重点讨论函数的极限及其连续性．

§1　函　　数

1.1　函数的定义

在考察和研究各种自然现象时，会遇到不同的量．其中，在某一过程中，数值保持不变的量称为常量；而在某一过程中，有些量的数值在不断地变化，这样的量称为变量．

在同一过程中，变量的变化不是孤立的，而是互相联系、互相依存的．最简单的是两个变量的情况．例如，在自由落体运动中，物体所经过的路程 s 和所需要的时间 t 都是变量．这两个变量之间满足关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2\ (g\text{表示重力加速度})．$$

这个关系式揭示了变量 s 与变量 t 之间的互相联系和对应法则，即对于变量 t 的每一个确定的值（在 t 的变化范围内），都能依据这一法则对应 s 的一个相应的值．把变量间的这种对应关系抽

象化，就得到了函数的概念。

定义 有非空数集A与实数集R，如果对数集A中的任意数x，按照对应关系f都对应实数集R中唯一一个数y，则称对应关系f是定义在数集A上的函数。表示为

$$f:A\to R.$$

与数x对应的数y称为x的函数值，表示为：$y=f(x)$。x称为自变量，y称为因变量。数集A称为函数f的定义域，函数值的集合称为函数f的值域，表示为$f(A)$。即

$$f(A)=\{y|\ y=f(x),x\in A\}\subset R.$$

为了使用方便，我们约定，将“f是定义在数集A上的函数”用符号：“$y=f(x),x\in A$”表示，当不需要指明函数f的定义域时，简记为“$y=f(x)$”。习惯上，也称y是x的函数。

函数的定义域是在某一范围内的实数，所以通常用区间表示。实数的区间表示定义如下.

设a、b是两个实数，且$a<b$.

满足不等式$a<x<b$的实数x的全体称为开区间，记作(a, b)。

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的全体称为闭区间，记作$[a,b]$。

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的实数x的全体称为半开（闭）区间，记作$[a, b)$或$(a, b]$。

以上三种情形，都称为有限区间，a和b称为区间的端点。

端点为$a-\delta$和$a+\delta$（$\delta>0$）的开区间：$(a-\delta, a+\delta)$称为点a的δ邻域，点a称为这个邻域的中心，δ称为这个邻域的半径。点a的δ邻域也可写成

$$-\delta<x-a<\delta \quad 或 \quad |x-a|<\delta.$$

此外，还有无限区间。把满足不等式$x>a$或$x\geqslant a$的实数x的全体用$(a,+\infty)$或$[a, +\infty)$表示，把满足不等式$x<a$或$x\leqslant a$的实数x的全体用$(-\infty, a)$或$(-\infty,a]$表示，实数全体用

$(-\infty,+\infty)$ 表示。这里，$+\infty$ 和 $-\infty$ 是一个符号，分别读作正无穷大和负无穷大。

以后，我们遇到用数学表达式表示的函数，如不说明定义域时，定义域就是使表达式有意义的实数全体。若由实际问题所确定的函数，其定义域还要由这个问题的实际意义来确定。

下面给出一些函数的例子。

例 1　上述自由下落的物体，所经历的路程 $s=\frac{1}{2}gt^2$。显然，对任意的 $t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，都对应唯一的 s，这是一个函数，函数的定义域是闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$。

例 2　某地的气象站用自动温度记录仪记载了该地在一昼夜间气温变化的情况。如图1-1.

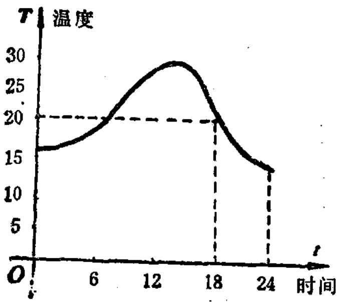

图 1-1

对〔0，24〕内的任意时间 t，都对应唯一一个温度 T，这是一个函数。它是用图 1-1 的曲线表示的，曲线上点的横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，函数的定义域是〔0,24〕（单位：小时）。

例 3　常量 c 可以看作一个函数，显然，对任意 $x\in R$，都对应唯一的常数 c，这个函数也称为常数函数，定义域是实数集 R。

例 4　$y=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

从上式看出，对任意 $x>0$，对应 $y=1$，对 $x=0$，对应 $y=0$，对任意 $x<0$，对应 $y=-1$，即对任意 $x\in R$，都对应唯一一个 y。这是一个函数，称为符号函数，记作 $\operatorname{sgn}x$。

例 5 由实验得出KNO_3的溶解度随温度而变化，实验数据如下表：

温度（℃）	0	10	20	30	40	50
溶 解 度	13.9	21.2	31.6	45.6	61.3	83.5

从表中看出，对$\{0,10,20,30,40,50\}$中每个温度T，都对应一个唯一的溶解度m，这是一个函数，是用表格表示的。函数的定义域是有限集$A=\{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$。

上述例子中，例1、例3的函数是由数学表达式给出的，函数的这种表示法称为解析法。例2的函数是由坐标平面上的图象给出的，这种表示法为图象法。例5的函数是列表给出的，称为列表法。这三种表示法中，解析法应用最广泛。

在上面的例4中，函数不是用一个数学式子给出的。如果一个函数在定义域的不同区间上分别用不同的数学式子表示，这样的函数称为分段函数。求分段函数的函数值，要将不同范围内的自变量代入相应的表达式中，下面，我们再举两个分段函数的例子。

例 6

$$f(x)=\begin{cases}-1-x^2, & x<0,\\ 0\quad, & x=0,\\ 1+x^2, & x>0.\end{cases}$$

求$f(x)$的定义域，并求$f(0)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f(1)$、$f(-2)$。

解 从函数的表达式可以看出，$f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$。

$f(0)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{4}$，$f(1)=2$，$f(-2)=-5$，函数$f(x)$的图象如图1-2。