通向金牌之路

金版奥赛教程

数学 高二分册

◎ 刘康宁 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

通向金牌之路

金版奥赛教程

数学(高二分册)

主　编　刘康宁

副主编　党效文

编　委　安振平　刘康宁　党效文　薛党鹏

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金版奥赛教程. 数学. 高二分册 / 刘康宁主编. 一杭州：浙江大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-308-06709-6

Ⅰ.金… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课一高中一教学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 055819 号

金版奥赛教程数学(高二分册)

刘康宁　主编

责任编辑　沈国明
文字编辑　吴　慧
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　24.25
字　　数　600 千
版 印 次　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 6 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06709-6
定　　价　36.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

编写说明

中小学学科竞赛是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生课外活动。据不完全统计,全国每年有三百多万高中学生参与各类学科竞赛活动。尤其是近年来,我国选手在国际数学奥林匹克(简称 IMO)、国际物理奥林匹克(简称 IPHO)、国际化学奥林匹克(简称 ICHO)等活动中成绩斐然,更是吸引了许多有创新能力和天赋的学生参与学科竞赛活动。学科竞赛之所以备受广大学生关注和参与,究其原因是学科竞赛不仅具有很强的挑战性、探究性,而且对塑造和培养学生思维修养和创新意识方面大有裨益。

浙江大学出版社本着为我国基础教育改革、发展和学科竞赛做点有益事情的心愿,在精心研究了多年国内外竞赛命题规律、博采国内外优秀试题的基础上,邀请了全国各地竞赛命题专家、金牌教练,组织编写了"金版奥赛教程"系列丛书。丛书涵盖数学、英语、物理、化学、生物、信息技术六大学科,包括从小学到高中各个层次,共计30多个品种。

丛书的最大特点:

一是起点低,目标高。本丛书以学科基础知识为起点,适用的对象是学有余力或对该学科有兴趣的学生;编写的依据是各学科竞赛大纲,同时兼顾新课程标准教材,对竞赛涉及的课外知识给予适当补充,不同层次的学生可以合理取舍。

二是作者阵容强大。作者队伍既有来自一线的资深特级教师、金牌教练,也有来自高等学府的命题研究专家、命题专家,还有来自国家层面上的国家级教练、领队。

鉴于时间仓促,书中定有不少纰漏,请读者批评指正。

2009 年 3 月

目　录

第 1 讲

不等式的性质

竞赛热点

1. 实数的基本性质

设 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，$a=b\Leftrightarrow a-b=0$，$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

2. 不等式的反身性与传递性.

$a>b\Leftrightarrow b<a$；若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

3. 不等式的运算性质

① 平移性 $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

② 叠加性 $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

③ 伸缩性 $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac>bc$.

④ 叠乘性 $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd>0$.

⑤ 乘方性　设 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$.

⑥ 开方性　设 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

4. 不等式性质的应用.

① 比较两个代数式的大小；

② 证明一些不等式；

③ 求有关参变量的范围.

解题示例

例 1　设 $a>0,a\neq1,t>0$，比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小，并证明你的结论.

思路分析　通过对作差后的差值的运算化简，再对 a 的取值范围进行讨论以后，就可确定差值的符号.

解　作差便得 $\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{t+1}{2}-\log_a\sqrt{t}=\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}$.

$\because t>0,\ t+1\geqslant 2\sqrt{t}$（当且仅当 $t=1$ 时等号成立），

$\therefore \dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}\geqslant 1.$

当 $t=1$ 时，$\log_a\dfrac{t+1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a t$；$t\neq 1$ 时，$\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}>1$，

故若 $a>1$，则 $\log_a\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}>0$，此时 $\log_a\dfrac{t+1}{2}>\dfrac{1}{2}\log_a t$；

若 $0<a<1$，则 $\log_a\dfrac{t+1}{2\sqrt{t}}<0\Rightarrow\log_a\dfrac{t+1}{2}<\dfrac{1}{2}\log_a t.$

点评 当 $a>1$ 时，仅当 $f(t)>1$ 时，$\log_a f(t)>0$；当 $0<a<1$ 时，仅当 $f(t)>1$ 时，$\log_a f(t)<0$. 分类讨论，是判断对数值范围的基本方法.

例 2 (1) 若 $x<y<0$，试比较：$(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小；

(2) $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$，试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

思路分析 对第(1)题，作差，因式分解，判断符号；对于第(2)题，可根据同底数幂的运算法则，用作商的办法和 1 比较之.

解 (1) 作差，得

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)\\=&(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]\\=&-2xy(x-y).\end{aligned}$$

$\because x<y<0$，$\therefore xy>0$，$x-y<0$，$\therefore -2xy(x-y)>0$，

故得 $(x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)\cdot(x+y)$.

(2) 作商，得

$$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当 $a>b>0$ 时，有 $\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^a b^b>a^b b^a$；

当 $b>a>0$ 时，有 $0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，于是 $a^a b^b>a^b b^a$.

综上可知 $a^a b^b>a^b b^a$.

点评 实数的大小比较问题，常运用不等式的基本性质，结合作差法或者作比法来处理的. 作比法也叫做商法，其原理是：$\dfrac{a}{b}>1$ 且 $b>0\Rightarrow a>b$，即就是“作商与 1 比”.

这里的第(2)题，可以发展为：

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

当然，这个不等式也可以拓广为 n 个字母的情景，请读者不妨一试.

例3　设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，试求 $f(-2)$ 的取值范围.

思路分析　因为 $f(-1)=a-b$，$f(1)=a+b$，而 $1\leqslant a-b\leqslant 2$，$2\leqslant a+b\leqslant 4$，又 $a+b$ 与 $a-b$ 中的 a、b 不是独立的，而是相互制约的，所以，如果将 $f(-2)$ 用 $a-b$ 和 $a+b$ 来表示，问题就获得解决.

解　设 $f(-2)=m\cdot f(-1)+nf(1)$，其中 m,n 为待定系数，则有

$$4a-2b=m(a-b)+n(a+b),$$

即

$$4a-2b=(m+n)a-(m-n)b.$$

比较两边 a、b 的系数，就得方程组 $\begin{cases}m+n=4,\\ m-n=2,\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}m=3,\\ n=1.\end{cases}$

所以　$f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

因为　$1\leqslant f(-1)\leqslant 2, 2\leqslant f(1)\leqslant 4$,

所以　$5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$,

故　$5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

点评　运用不等式的性质来求参变量的范围，一定要注意"度"的把握，"放、缩"的过度，就容易出错的.

例4　已知 $a>2,b>2$，则 $ab>a+b$.

思路分析　这个简单不等式，其证明可以从多个角度去思考.

证明1　作差法. 对原不等式的两边同乘以2，再作差.

因为　$2ab-2(a+b)=a(b-2)+b(a-2)>0$,

所以　$2ab>2(a+b)$,

即　$ab>a+b$.

证明2　作商法. 并注意到，由 $a>2,b>2$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{2},\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

所以　$ab>a+b$.

证明3　叠乘法. 由 $a>2,b>2$，得 $a-1>1,b-1>1$.

所以 $(a-1)(b-1)>1$,

即 $ab-(a+b)>0$,

所以 $ab>a+b$.

点评 本题还可用排序的办法,给出巧妙的证明. 事实上不妨设 $a\geqslant b$,则有

$$ab>2a=a+a\geqslant a+b.$$

一个需要思考的问题是,对于本题目,你能推广到三个字母的情景吗?

例 5 设 a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三边长,求证:

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

思路分析 从放大与缩小的角度,可以得出如下的多种证法.

证明 1 (放大法)利用三角形一边长小于另两边之和,得

$$a^2+b^2+c^2=aa+bb+cc<a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca),$$

所以 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

证明 2 (缩小法)利用三角形两边之和大于第三边,得

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca)&=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)>a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c\\&=a^2+b^2+c^2,\end{aligned}$$

所以 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

通过建立恒等式,可以给出一种作差证法.

证明 3 (比较法)用作差比较法,并注意到三角形任意两边之和大于第三边,得

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=[(a-b)^2-c^2]+[(b-c)^2-a^2]+[(c-a)^2-b^2]\\&=(a-b+c)(a-b-c)+(b-c+a)(b-c-a)+(c-a+b)(c-a-b)\\&<0,\end{aligned}$$

所以 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

点评 类似地,可以证明如下的不等式:

(1) 设 a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三边长,求证:

$$a+b+c<2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

(2) 设 a,b,c 为锐角$\triangle ABC$ 的三边长,求证:

$$a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

例 6　若 $a,b\in(0,1)$，则 $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}\geqslant\frac{a+b}{1-ab}$.

思路分析　所要证明的不等式的左边有两个分式，而右边是一个分式，所以，从左到右，需要将两个分式转化为一个的.

证明　通分变形，得

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}&=\frac{(a+b)(1-ab)}{1-(a^2+b^2)+a^2b^2}\\&=\frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a-b)^2}\\&\geqslant\frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2}\\&=\frac{a+b}{1-ab},\end{aligned}$$

所以　$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}\geqslant\frac{a+b}{1-ab}$.

点评　本题目是从一道高考真题改编而来的，它的类似有：

若 $a,b\in(0,1)$，则

(1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{b}{1-a^2}\geqslant\frac{a+b}{1-ab}$;

(2) $\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}\geqslant4\cdot\frac{1-ab}{a+b}$.

一个推广的问题是，《数学教学》2000 年第 1 期问题与解答栏目问题第 498 题：

已知 $0<x,y<1,n\in\mathbf{N}^*$，求证：

$$\frac{x^n}{1-x^2}+\frac{y^n}{1-y^2}\geqslant\frac{x^n+y^n}{1-xy}.$$

例 7　若实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2+2abc=1$，求证：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{1+b^2c^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{1+c^2a^2}}\leqslant3.$$

思路分析　把已知等式看作一个字母的一元二次方程，用判别式法.

证明　把条件等式看作 c 的一元二次方程，得

$$c^2+2ab\cdot c+(a^2+b^2-1)=0.$$

因为 $c\in\mathbf{R}$，所以，判别式　$\Delta=(2ab)^2-4(a^2+b^2-1)\geqslant0$，

即　$1+a^2b^2\geqslant a^2+b^2$，

有 $\dfrac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}\leqslant 1.$

同理，得 $\dfrac{b^2+c^2}{1+b^2c^2}\leqslant 1,\dfrac{c^2+a^2}{1+c^2a^2}\leqslant 1.$

故 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}}+\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{1+b^2c^2}}+\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{1+c^2a^2}}\leqslant 3.$

点评 没有方程，构造方程，有了方程，就可以用方程的一些知识去思考问题、处理问题了．当中的“主元思想”读者可要反复感悟的．

例 8 若 $a,b,c\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right]$，求证：$\dfrac{ab+bc}{a^2+2b^2+c^2}\geqslant\dfrac{2}{5}$.

思路分析 构造函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$，用函数的单调性和不等式的性质证明不等式．

容易证得，函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是递减函数，在 $[1,2]$ 上是递增函数．于是，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$ 时，函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值为 $y_{\max}=\dfrac{5}{2}$，即有

$$x+\frac{1}{x}\leqslant\frac{5}{2}. \tag{*}$$

由 $a,b\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right]$，知 $\dfrac{b}{a}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以，对不等式（*），得

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant\frac{5}{2},$$

即 $ab\geqslant\dfrac{2}{5}(a^2+b^2)$,

同理 $bc\geqslant\dfrac{2}{5}(b^2+c^2)$.

将上面 2 个不等式叠加，立得 $\dfrac{ab+bc}{a^2+2b^2+c^2}\geqslant\dfrac{2}{5}$.

通过分析，可以得知，不等式取等号的条件是：$a=\sqrt{2},b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},c=\sqrt{2}$，或者 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\sqrt{2},c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

点评 本例题是 2007 年陕西高中数学竞赛预赛题．事实上，用类似的方法，我们还可以证明 4 个字母的情景．

若 $a,b,c,d\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right]$，求证：

$$ab+bc+cd+da \geqslant \frac{4}{5}(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

测试题目

能力测试

选择题

1. 已知 $x>y>z$，且 $x+y+z=2$，则下列不等式恒成立的是　　（　　）

A. $xy>yz$　　B. $xz>yz$　　C. $xy>xz$　　D. $x|y|>z|y|$

2. 若 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围为　　（　　）

A. $(-\pi,0)$　　B. $(-\pi,\pi)$　　C. $\left(-\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $(0,\pi)$

3. 若 $x\in(e^{-1},1)$，$a=\ln x$，$b=2\ln x$，$c=\ln^3 x$，则　　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

4. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\frac{x}{\lg x}$，则下列大小关系正确的是　　（　　）

A. $f^2(x)<f(x^2)<f(x)$　　B. $f(x^2)<f^2(x)<f(x)$

C. $f(x)<f(x^2)<f^2(x)$　　D. $f(x^2)<f(x)<f^2(x)$

5. 设直角三角形两直角边的长分别为 a 和 b，斜边长为 c，斜边上的高为 h，则 $a+b$ 和 $c+h$ 的大小关系是　　（　　）

A. $a+b<c+h$　　B. $a+b>c+h$

C. $a+b=c+h$　　D. 不能确定

6. 甲、乙两人同时从 M 地到 N 地，甲一半路程步行，一半路程跑步；乙一半时间步行，一半时间跑步；如果两人步行速度、跑步速度均相同，则　　（　　）

A. 甲先到 N 地　　B. 乙先到 N 地

C. 两人同时到 N 地　　D. 谁先到不确定

填空题

7. 不等式“$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”成立的充要条件是________.

8. 设 $x>y>z>1$，则 $\sqrt{xyz}$、$\sqrt{xy}$、$\sqrt{yz}$、$\sqrt{xz}$ 从小到大依次排列成的不等式是________.

9. 已知 $0<a<b$，$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$，$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$，则 x，y 的大小关系是________.

10. 已知 $a,b,m\in\mathbf{R}^+$，且 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$，则 a 与 b 的大小关系为________.

11. 设函数 $f(x)=x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则对于任意的实数 a 和 b，$a+b<0$ 是 $f(a)+f(b)<0$ 的________条件.（填：充分、必要）

12. 设实系数一元二次方程 $x^2+ax+2b-2=0$ 有两个相异实根，其中一根在区间 $(0,1)$ 内，另一根在区间 $(1,2)$ 内，则 $\frac{b-4}{a-1}$ 的取值范围是________.

解答题

13. 已知 $1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，求 $3a-2b$ 的取值范围.

14. 已知 a,b 是正数，并且 $a^{1998}+b^{1998}=a^{1996}+b^{1996}$，求证 $a^2+b^2\leqslant 2$.

15. 已知 $a^2+ab+ac<0$，求证：$b^2>4ac$.

冲击金牌

16. 实数 x,y,z 满足 $xyz=1$，求证 $x^2+y^2+z^2+3\geqslant 2(xy+yz+zx)$.

17. 已知一个三角形的三条边成等比数列，试问：该三角形三条边对应的高线是否可以构成一个新的三角形？若不能构成，请说明理由；若能构成，请判断这两个三角形之间的关系.

18. 设 $x_i(i=1,2,3,4)$ 为正实数，满足

$$x_1\leqslant 1,x_1+x_2\leqslant 5,x_1+x_2+x_3\leqslant 14,x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 30,$$

求 $U=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{4}x_4$ 的最大值.

第 2 讲

不等式的解法

竞赛热点

1. 一元一次不等式

关于 x 的不等式 $ax>b(a\neq0)$，当 $a>0$ 时，解集为 $\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$；当 $a<0$ 时，解集为 $\left(-\infty,\frac{b}{a}\right)$.

2. 一元二次不等式

对关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$，其判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

当 $\Delta<0$ 时，原不等式的解集为 $\mathbf{R}$；

当 $\Delta=0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$；

当 $\Delta>0$ 时，$x_1<x_2$，且 x_1，x_2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 两实根，此时，原不等式的解集为 $\{x\mid x<x_1,\text{或 }x>x_2\}$.

3. 高次不等式

高次不等式解法的一般方法是因式分解，找出零点，在数轴上分段确定符号，然后确定不等式的解集.

4. 分式不等式

分式不等式的求解思路是转化为整式不等式组去求解，常见类型有：

① $\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$；

② $\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$；

③ $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\leqslant0\\g(x)<0\end{cases}$.

5. 含有参数的不等式

对此类不等式的求解，常考虑其相应方程的根，比较根的大小，对参数进行讨论，有时也可用“图像法”求解（也就是数形结合的思想）.

6. 含有绝对值的不等式

① $|f(x)|<a(a>0)$，去掉绝对值后，其等价性的不等式是 $-a<f(x)<a$；

② $|f(x)|>a(a>0)$，去掉绝对值后，其等价性的不等式是 $f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$；

③ $|f(x)|>|g(x)|$，去掉绝对值后，其等价性的不等式是 $f^2(x)>g^2(x)$.

7. 指数不等式

通过化同底法，或换元法转化为同解的代数不等式去求解.

当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

8. 对数不等式

通过化同底法，或换元法转化为同解的代数不等式去求解.

当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$.

解题示例

例 1 解下列关于 x 的不等式：

(1) $\dfrac{a-1}{x-1}>1$；

(2) $4^x-2^{x+2}+3<0$；

(3) $(2x+1)(x-1)(x-3)\leqslant 0$.

思路分析 题(1)化分式不等式为与其同解的整式不等式，然后讨论根的大小就可求解；题(2)用因式分解，转为解关于 2^x 的一元二次不等式；题(3)把数轴分段后确定符号.

解 (1) 移项通分，得 $\dfrac{x-a}{x-1}<0$，这和不等式 $(x-1)(x-a)<0$ 同解.

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $(1,a)$；

当 $a<1$ 时，原不等式的解集为 $(a,1)$；

当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$.

(2) 由原不等式，变形得

$$(2^x)^2-4\cdot(2^x)+3<0,$$

即

$$(2^x-1)(2^x-3)<0,$$

解得　　　　　　　　$1 < 2^x < 3$,

所以　　　　　　　　$0 < x < \log_2 3$.

(3) 将原不等式转化为

$$\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot(x-1)\cdot(x-3)\leqslant 0,$$

于是,其零点有 $-\frac{1}{2}$,1,3,这三个分点将数轴分成了四段.

记 $f(x)=(2x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$,从而,有

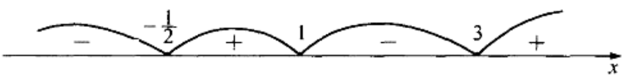
当 $x>3$ 时, $f(x)>0$;

当 $x\in[1,3]$ 时,$f(x)\leqslant 0$;

当 $x\in(-\frac{1}{2},1)$ 时,$f(x)>0$;

当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$时,$f(x)\leqslant 0$.

由此知,其符号如图所示:



故原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,3]$.

点评　等价转化是解不等式的基本思想,在(1)中,化分式不等式为整式不等式,在(2)中,化超越不等式为"一元二次"不等式,(3)属于"高次不等式",解高次不等式常常是先化成标准形式:$(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdots(x-a_n)\geqslant 0$(或$<0$),其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$,这里 n 个点 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 将数轴划分出$(n+1)$段,标出每段对应的正负号,就可以写出原不等式的解集.

例 2　解不等式 $|\log_2 x|+|\log_2(2-x)|\geqslant 1$.

思路分析　从 x 的取值范围入手,易知 $0<x<2$,当 x 分别在$(0,1]$及$(1,2)$上取值时,可同时去掉两个绝对值符号.

解　由于 $x>0$ 且 $2-x>0$, 所以,当 $0<x<2$ 时,原不等式才有意义.

当 $x\in(0,1]$时, 因 $\log_2 x\leqslant 0$, $\log_2(2-x)\geqslant 0$, 此时,原不等式等价于

$$-\log_2 x+\log_2(2-x)\geqslant 1,$$

即　　　　　　　　$\log_2\frac{2-x}{x}\geqslant\log_2 2$,

也就是
$$\begin{cases}\dfrac{2-x}{x}\geqslant 2,\\ 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

解得
$$0<x\leqslant\frac{2}{3}.$$

当 $x\in(1,2)$ 时，因为 $\log_2 x>0$，$\log_2(2-x)<0$，此时，原不等式等价于
$$\log_2 x-\log_2(2-x)\geqslant 1,$$

即
$$\log_2\frac{x}{2-x}\geqslant\log_2 2,$$

也就是
$$\begin{cases}\dfrac{x}{2-x}\geqslant 2,\\ 1<x<2,\end{cases}$$

解得
$$\frac{4}{3}\leqslant x<2.$$

故原不等式的解集为 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},2\right)$.

点评 本题利用对数函数的性质，去掉了绝对值符号，从而转化为分式不等式组.

例 3 已知 $a>0$，解关于 x 的不等式 $\sqrt{x^2+1}<ax+1$.

思路分析 本题立意新颖；其中的隐含条件是 $x>0$，据此可以简化不等式.

解 $\because x^2+1\geqslant 1$，$\therefore ax+1>1$，即 $ax>0$.

又 $\because a>0$，$\therefore x>0$，

$\therefore$ 原不等式等价于 $x^2+1<(ax+1)^2$，

即
$$x[(a^2-1)x+2a]>0.$$

下面只需考虑
$$(a^2-1)x+2a>0.$$

(1) 当 $a>1$ 时，$x>-\dfrac{2a}{a^2-1}$，因为 $-\dfrac{2a}{a^2-1}<0$，所以，原不等式的解集为 $(0,+\infty)$.

(2) 当 $a=1$ 时，$(a^2-1)x+2a>0$，即为 $0x+2a>0$，所以，原不等式的解集为 $(0,+\infty)$.

(3) 当 $0<a<1$ 时，$x<-\dfrac{2a}{a^2-1}$，所以，原不等式的解集为 $\left(0,\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$.

故当 $a\geqslant 1$ 时，原不等式的解集为 $(0,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left(0,\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$.

点评 通过此题，可考查含参数无理不等式的解法，以及分类讨论能力和运算能力.