图论文集

叶淼林　余桂东◎主编

合肥工业大学出版社

本书由安庆师范学院出版基金资助出版

图论文集

叶淼林　余桂东　主编

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

图论文集/叶森林,余桂东主编.—合肥:合肥工业大学出版社,2009.4
ISBN 978-7-81093-914-0

Ⅰ.图… Ⅱ.①叶…②余… Ⅲ.图论—文集 Ⅳ.0157.5-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 041319 号

图 论 文 集

叶森林 余桂东 主编　　　　责任编辑 朱移山

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2009 年 4 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2009 年 4 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	710 毫米×1000 毫米 1/16
电 话	总编室:0551—2903038	印 张	8.75
	发行部:0551—2903198	字 数	136 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	安徽江淮印务有限责任公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-914-0　　　　定价:25.00 元

如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。

前　言

图论自1736年Euler发表第一篇论文以来经历了三个阶段的发展。第一阶段从18世纪中叶到19世纪中叶，以游戏为主；第二阶段从19世纪中叶到20世纪中叶，这个阶段出现一些图论的基本问题如四色问题、Hamilton问题、可平面问题等，还将图论应用于化学、电学等其他学科，1936年König写了第一本图论专著；第三阶段是20世纪中叶以后，由于计算机的发展和图论在数学、化学、物理学、天文学、地学、生物学、军事学、信息学等学科中的广泛应用，图论在这个阶段呈爆炸式发展，内容现已相当丰富，应用更是非常广泛，图论论文在数学论文中占有相当大的比例。

本书是作者近年来在图论方面发表的学术论文，发表于*Linear Algebra & its Application*、*Discrete Mathematics*、《高校应用数学学报》、《应用数学》等国内外著名杂志上。文中的术语和记号基本都来自Bondy J. A. 和Murty U. S. R. 合著的*Graph Theory with Applications*（Macmillan Press, Ltd., 1976）以及C. Berge的*Hypergraphs, Combinatorics of the Finite Sets*（North-Holland, Amsterdam, 1989），少量的术语、记号、方法可参考附在每篇文章后面的参考文献。这本小集子的内容涉及图的长圈及控制迹刻画、Hamilton条件、临界控制数、k一一致超图的边数估计、图的特征值，还描述了一些特殊的图如极小广播图、整和图、γ—临界图、γ—稳定图等，这些内容都是近年来不少图论工作者感兴趣的问题，有许多可圈可点的成果，这里列举的只是作者的片面肤浅之作，望读者阅读相关参考文献并不吝赐教。

本论文集的出版得益于南京大学张克民教授引导第一作者入图论大门并指导研究工作，得益于安庆师范学院的内部激励机制。作者更要感谢安庆师范学院的数学学院和研究生处的大力支持，感谢合肥工业大学出版社的鼎力相助。

编　者

2009年4月

目　录

第一部分　圈结构

第二部分　数字特征

点泛圈性的邻域并条件

叶森林[1] 张克民[2]

(1. 安庆师范学院数学系,安徽安庆,246011;

2. 南京大学数学系,江苏南京,210093)

摘 要 该文利用邻域并条件讨论图的点泛圈性,证明了当 $\min\{|N(u)\cup N(v)|u,v\in V(G),u,v\notin E(G)\}\geqslant\frac{2n}{3}+1$ 时,2-连通 $n(\geqslant 14)$ 阶图 G 是 $[6,n]$-点泛圈的.并讨论了无 $C_l(3\leqslant l\leqslant 5)$ 的几种情况,从而得到此条件下的点泛圈性的较完整的结果.

关键词 邻域并,泛圈,点泛圈

分类号 (中图)O157.5;(1991MR)05C38,05C45.

1 基本术语和引理

本文研究对象是无向图,使用[1]中的术语和记号. $N[x]=N(x)\cup\{x\}$, $NC(G)=\min\{|N(u)\cup N(v)|\,|\,u,v\in V(G),uv\notin E(G)\}$, $d_{G_1}(x)=|N(x)\cap V(G_1)|$, $[m,n]=\{m,m+1,\cdots,n\}$. 若 C 为 G 中一圈, $xy\in E(G[V(C)])$, $xy\notin E(C)$, 则称 xy 为 C 的弦,在 C 由 x 到 y 的最短路的长度称为弦 xy 的长度, C 上过 x 点的长度最短的弦称为 C 上过 x 点的最短弦. 若 $\forall l\in[3,n]$, G 中总有圈 C_l, 则称 G 为泛圈点;若 $\forall l\in[3,n]$, G 中总有圈 C_l 过点 x, 则称 x 为泛圈点;若 $\forall l\in[3,n]-\{i\}$, 过 x 有 C_l 而无 C_i, x 为 i^--泛圈点;若 $\forall l\in[m,n]$, 过 x 有 C_l, 称 x 为 $[m,n]$-泛圈点. G 中所有点均为

泛圈点时称 G 为点泛圈的;G 中除 i^- — 泛圈点外都是泛圈点时称 G 为 i^- — 点泛圈的;G 中所有点为 $[m,n]$ — 泛圈点时称 G 为 $[m,n]$ — 点泛圈的. Faudree 等人[2] 用邻域并给出了泛圈图的条件,蔡小涛[3],张克民[4] 等人已对 Ore 型条件下图的点泛圈性做了细致的研究. 本文研究邻域并条件下图的点泛圈性.

在本文中,若 G 为 $n(\geqslant 14)$ 阶 2 — 连通图,满足 $NC(G)\geqslant \frac{2n}{3}+1$,则称 G 满足 NU 条件. 为了证明主要结果,需要下面几条引理:

引理 1[5,6] 2 — 连通图 G 阶为 n,满足 $NC(G)\geqslant \frac{2n}{3}$,则 G 是 Hamilton 图.

引理 2[7] 若 G 为 n 阶图,满足 $\delta(G)\geqslant \frac{n}{2}+1$,则 G 为泛连通图(即 $\forall x$, $y\in V(G)$, $\forall l\in[d(x,y),n-1]$,G 中有长为 l 的 xy — 路).

引理 3 若 G 满足 NU 条件,$x\in V(G)$,$d(x)>\frac{n}{3}+1$,则有过 x 的 C_3, C_4,C_5.

证明 设 $N(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$,由 $n\geqslant 14$ 知 $t\geqslant 6$. 首先:G 有过 x 的 C_3,因为若 $x_i,x_j\in N(x)$,$x_ix_j\notin E(G)$,由 NU 条件有 $|N(x_i)\cup N(x_j)|\geqslant \frac{2n}{3}+1$,而 $|N(x)|>\frac{n}{3}+1$. 故 $N(x)\cap(N(x_i)\cup N(x_j))\neq\Phi$,即得过 x 的 C_3,设为 xx_1x_2x. 下面分两种情况证明有过 x 的 C_4,C_5.

(1)$G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 中有边,不妨设 x_3x_4 为 $G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 中一边,若 $A=\{x_1x_3,x_1x_4,x_2x_3,x_2x_4\}\cap E(G)\neq\Phi$,显然有过 x 的 C_4,C_5. 下面设 $A=\Phi$,分两种情况讨论:

(i) 当 $x_5x_6\notin E(G)$ 时,由 NU 条件有 $|N(x_5)\cup N(x_6)|\geqslant \frac{2n}{3}+1$, $|N(x_1)\cup N(x_3)|\geqslant \frac{2n}{3}+1$, $|(N(x_5)\cup N(x_6))\cap(N(x_1)\cup N(x_3)-\{x_3\}-\{x\})|\geqslant \frac{n}{3}+1>5$,$N(x_5)\cup N(x_6)$ 与 $N(x_1)\cup N(x_3)$ 在 $V(G)-\{x,x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 中有公共点 y,过 x 和 y 可构作 C_4,C_5.

(ii) 当 $x_5x_6 \in E(G)$ 时，若存在 $i \in \{1,2,3,4\}, B_i = \{x_5x_i, x_6x_i\} \cap E(G) \neq \Phi$，显然可过 x 作 C_4, C_5. 反之 $B_i = \Phi, i = 1,2,3,4$. 由 NU 条件有 $|(N(x_1) \cup N(x_3)) \cap (N(x_4) \cup N(x_6))| \geqslant \frac{2n}{3}+1+\frac{2n}{3}+1-n > \frac{n}{3}+1$，$\forall z \in N(x_1) \cap N(x_4)$，由 $A=\Phi, B_i=\Phi, i=1,2,3,4$，知 $z \neq x_j, j=1,2,3,4,5,6$. 若 $N(x_1) \cap N(x_4) \not\subset \{x\}$，则可取 $z \in N(x_1) \cap N(x_4) - \{x\}$，过 x,z 可构作 C_4, C_5，于是只需考虑 $N(x_1) \cap N(x_4) = \{x\}$ 的情形，同理可设 $N(x_1) \cap N(x_6) = \{x\}, N(x_3) \cap N(x_6) = \{x\}$，而 $\{x\} \subset N(x_3) \cap N(x_4)$，这样就有 $|N(x_3) \cap N(x_4)| > \frac{n}{3}+1$，$|N(x_3)| > \frac{n}{3}+1$，$|(N(x_1) \cup N(x_5)) \cap N(x_3) - \{x\}| \geqslant 2$，于是可过 x 及 x_3 作 C_4, C_5.

(2)$G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 为空图. 此时 $X=\{x_3,x_4,\cdots,x_t\}$ 为独立集，$\forall x_i, x_j \in X$，$|N(x_i) \cup N(x_j)| \geqslant \frac{2n}{3}+1$，$|N(x)| > \frac{n}{3}+1$，于是 $|N(x) \cap (N(x_i) \cup N(x_j))| > 2$，这与 $N(x) \cap (N(x_i) \cup N(x_j)) \subset \{x_1, x_2\}$ 矛盾，即(2) 不可能发生.

至此已证得过 x 有 C_3, C_4, C_5.

引理 4 若 G 满足 NU 条件，C_l 为 G 中长为 l 的圈，$l > \frac{n}{3}+3$，则 C_l 上不存在不相邻的两点在 $G[V(C_l)]$ 中度为 2.

证明 若有 $x,y \in V(C_l)$，$d_{G[V(C_l)]}(x) = d_{G[V(C_l)]}(y) = 2$，$xy \notin E(C_l)$，则 $xy \notin E(G)$，$|N(x) \cup N(y)| \leqslant n-l+4$，由 NU 条件有 $\frac{2n}{3}+1 \leqslant |N(x) \cup N(y)| \leqslant n-l+4 < n-\frac{n}{3}-3+4 = \frac{2n}{3}+1$，矛盾.

2 主要结果

定理 1 若 G 满足 NU 条件，则 G 为$[6,n]$－点泛圈的.

我们将定理分为下列几个性质来证明：

性质 1　若 G 满足 NU 条件，则对于 $\frac{2n}{3}+1<1\leqslant n$，$\forall x\in V(G)$，有过 x 点的 C_l.

证明　由引理 1 知 G 为 Hamilton 图，过任意点 x 有 C_n. 若性质不成立，设 l 为最大整数使得 $\forall y\in V(G)$，有过 y 点的 C_l，但存在 $y_0\in V(G)$，无过 y_0 的 C_{l-1}，$l>\frac{2n}{3}+2>11$. 由引理 4 知 $G[V(C_l)]$ 中至多有(相邻的)两个 2 度顶点，设为 u 和 v，在 C_l 上选定一点 x_1，使得 x_1 在 C_l 中距 u、v 尽可能地远(若 $G[V(C_l)]$ 中只一个 2 度顶点 u，则要求 x_1 在 C_l 中距 u 尽可能地远，若 $G[V(C_l)]$ 中无 2 度顶点则只考虑后面的要求)，且 x_1 沿 C_l 到 y_0 的距离不为 1,3. 再给 C_l 标号为，使 x_1 在 C_l 上的最短弦为 x_1x_i 且满足 $i\leqslant\frac{1}{2}$，x_1，x_{l-1}，x_{l-3} 在 $G[V(C_l)]$ 中度大于或等于 3. 由标号知 $y_0\notin\{x_0,x_{l-2}\}$，$N(x_1)\cap\{x_3,x_1,\cdots,x_{i-1}\}=\Phi$，$x_{l-1}$ 除 x_0 和 x_{l-2} 外在 C_l 上至少还有一邻点.

情况 1　$N(x_{l-1})\cap\{x_{l-3},x_{l-4},\cdots,x_{i+1}\}\neq\Phi$.

设 x_{l-1} 在 $\{x_{l-3},x_{l-4},\cdots,x_{i+1}\}$ 中下标最大的邻点为 x_j，考虑路 $P_{l-1}=C_l-x_0$. 由 $x_1x_i,x_{l-1}x_j\in E(G)$，若 $N(x_{j+1})\cap\{x_{j+3},x_{j+4},\cdots,x_{l-2}\}\neq\Phi$，则重排 P_{l-1} 为 $x_1x_2\cdots x_jx_{l-1}x_{l-2}\cdots x_{j+1}$，并重新标号为 $x_1x_2\cdots x_jx_{j+1}x_{j+2}\cdots x_{l-1}$，如此下去得到路 P' 满足 x_j 为 x_{l-1} 在 $\{x_{l-3},x_{l-4},\cdots,x_{i+1}\}$ 中的下标最大的邻点且 x_{j+1} 在 $\{x_{j+3},x_{j+4},\cdots,x_{l-1}\}$ 中无邻点. 再对 $x_1x_2\cdots x_i$ 作类似处理，使得 x_1 在 $\{x_3,x_4,\cdots,x_{j-1}\}$ 中最小下标邻点为 x_i，x_{i-1} 在 $\{x_2,x_3,\cdots,x_{j-3}\}$ 中无邻点，记最后得到的路为 P，令

$N=N_p(x_1)\cup N_p(x_{i-1})$，

$N^-=\{x_k\in V(P)\mid x_{k+1}\in N\}$，则 $|N|=|N^-|$，

$N^-\cap(N_p(x_{l-1})\cup N_p(x_{j+1}))\subset\{x_{j+2},x_{i-3}\}$，

否则可由 P 产生过 y_0 的 C_{l-1}.

令 $N_1=N_p(x_{l-1})\cup N_p(x_{j+1})$，我们有

$|N_1|\geqslant\frac{2n}{3}+1-(n-l+1)=l-\frac{n}{3}$，$|N|\geqslant\frac{2n}{3}+1-(n-l+1)=l-\frac{n}{3}$，

$$2\left(l-\frac{n}{3}\right)\leqslant|N|+|N_1|=|N^-|+|N_1|=|N^-\cup N_1|+|N^-\cap N_1|\leqslant l-1-1+2=l$$

上述不等式中最后一个减 1 是因 $x_{l-1}\notin N^-\cup N_1$. 于是得到 $l\leqslant\frac{2n}{3}$,矛盾.

情况 2 $N(x_{l-1})\cap\{x_{l-3},x_{l-4},\cdots,x_{i+1}\}=\Phi$.

设 x_j 为 x_{l-1} 在$\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$中下标最小的邻点,则 $x_j\in\{x_2,x_3,\cdots,x_{i-2}\}\cup\{x_i\}$. 假设 $N(x_{l-3})\cap\{x_{l-5},\cdots,x_{j+1}\}=\Phi$,因若 x_{l-3} 在$\{x_2,x_3,\cdots,x_j\}$中有邻点,可找其具最小下标的一个记为 x_k,$2\leqslant k\leqslant j$,那么 x_{l-3},x_{l-1} 都不与 x_{k-1} 相邻,故有

$$\frac{2n}{3}+1\leqslant|N(x_{l-1})\cup N(x_{l-3})|\leqslant n-l+(i-1)\leqslant n+2-\frac{l}{2}.$$

得 $l\leqslant\frac{2n}{3}+2$,矛盾.

当 $N(x_{l-3})\cap\{x_{l-5},\cdots,x_{j+1}\}\neq\Phi$ 时,令 $x_{l-1}=x_1$,$x_{l-3}=x_{l-1}$,重新标号 C_l,即转化为情况 1 的情形,矛盾.

综上所述,性质 1 获证.

性质 2 若 G 满足 NU 条件,$\delta(G)\leqslant\frac{n}{3}+1$,则 G 是$\left[6,\left[\frac{2n}{3}+1\right]\right]$—点泛圈的.

证明 任取 $y_0\in V(G)$,下面证明 $\forall l\in\left[\left[6,\frac{2n}{3}+1\right]\right]$有过 y_0 的 C_l.

(1) 若 $d(y_0)\leqslant\frac{n}{3}+1$,令 $G_1=G-N[y_0]$,则 $\forall v\in V(G_1)$,$y_0v\notin E(G)$,$|N(v)\cup N(y_0)|\geqslant\frac{2n}{3}+1$,于是

$$d_{G_1}(v)=|N(v)\cap N(y_0)|-d(y_0)\geqslant\frac{2n}{3}+1-|N[y_0]|+1\geqslant\frac{V(G_1)}{2}+1$$

由引理 2 知 G_1 是泛连通图,因 G 是 2—连通的,$N(y_0)$ 中必有两点 x,y 分别与 $V(G_1)$ 中两点 a,b 相邻,由 $\forall t\in[2,|V(G_1)|-1]$,$G$ 中有长为 t 的 (a,b)—路,得 $\forall l\in\left[\left[6,\frac{2n}{3}+1\right]\right]$,存在过 y_0 的 C_l.

(2)$d(y_0)>\frac{n}{3}+1$,但存在 $y\in N(y_0)$,$d(y)\leqslant\frac{n}{3}+1$.由 $d(y_0)>\frac{n}{3}+1$ 知 y_0 必与 $V(G)-N[y]$ 中点相邻,由 2－连通性知和(1)一样可构作过 y_0 的 C_l,$6\leqslant l\leqslant\frac{2n}{3}+1$.

(3)$d(y_0)>\frac{n}{3}+1$,且 $\forall y\in N(y_0)$,$d(y)>\frac{n}{3}+1$,存在 $y\in V(G)-N[y_0]$,$d(y)\leqslant\frac{n}{3}+1$.

令 $G_1=G-N[y]$,$|V(G_1)|=s$,由 G_1 的泛连通性类似于(1)知过 y_0 点有$[3,s]$－圈及 C_{s+3},由 $d(y)\leqslant\frac{n}{3}+1$ 知 $s+3\geqslant\frac{2n}{3}+1$.若 $s\geqslant\left[\frac{2n}{3}+1\right]$,则性质已得证.若 $s<\left[\frac{2n}{3}+1\right]$,至多缺过 y_0 的 C_{s+2} 和 C_{s+1},下面证明 $s<\left[\frac{2n}{3}+1\right]$时有过 y_0 点的 C_{s+2} 和 C_{s+1}.设 $N(y)$ 的两点 v_1,v_2 分别与 $V(G_1)$ 中两点 y_i,y_{i+1} 相邻,这时有一 C_{s+3} 由 y,v_1,v_2 和 $V(G_1)$ 中点构成,此圈标记为 $y_0y_1\cdots y_iv_1yv_2y_{i+1}\cdots y_{s-1}$,当 $y_0\in N(N(y))$ 时由 G_1 的泛连通性知有过 y_0 的 C_{s+1},C_{s+2},于是可设 $y_0\notin N(N(y))$,特别 y_0 不为 y_i,y_{i+1},考察 y_0 和 y_1(或 y_0 和 y_{s-1}),$d(y_0)>\frac{n}{3}+1$,$d(y_1)>\frac{n}{3}+1$,若无过 y_0 的 C_{s+2},则

$$|\{y_0y_j,y_1y_{j+2}\}\cap E(G)|\leqslant 1,j=0,1,\cdots,i-2,i+1,\cdots,s-1.$$

于是有

$d_{G_1}(y_0)+d_{G_1}(y_1)\leqslant s-2+4=s+2$,而 $d_{G_1}(y_0)\geqslant\frac{s}{2}+1$,$d_{G_1}(y_1)\geqslant\frac{s}{2}+1$,

于是 $d_{G_1}(y_0)=\frac{s}{2}+1$,又因 $d_{G_1}(y_0)=d(y_0)>\frac{n}{3}+1$,这样有 $s>\frac{2n}{3}$,这与 $s<\left[\frac{2n}{3}+1\right]$矛盾.

于是过 y_0 有 C_{s+2},类似可证过 y_0 有 C_{s+1}.

由(1)、(2)和(3)即证得性质 2.

性质 3 若 G 满足 NU 条件且 $\delta(G) > \frac{n}{3}+1$，则 G 是点泛圈的.

若过 x_0 点有长为 k 的圈 $C_k x_0 x_1 \cdots x_{k-1} x_0$，存在 $0 \leqslant i \leqslant k-2$，使得 $x_i x_{i+2} \in E(G)$（这里 $x_k = x_0$），则称过 x_0 点有 $C_k \nabla C_{k-1}$，显然若过 x_0 点有 $C_k \nabla C_{k-1}$，则过 x_0 点既有 C_k 又有 C_{k-1}，在性质 3 的条件下，我们有下列结论：

结论 1 $\forall x \in V(G)$，有过 x 点的 C_3, C_4，且有过 x 的 $C_5 \nabla C_4$ 或 $C_6 \nabla C_5$.

事实上，由引理 3 知过 x 点有 C_3, C_4 和 C_5，不妨设过 x 点的 C_5 为 $x x_1 x_2 x_3 x_4 x$，若过 x 无 $C_5 \nabla C_4$，则 $x_2 x_4 \notin E(G)$，由 $|N(x_2) \cup N(x_4)| \geqslant \frac{2n}{3}+1$，$d(x_3) > \frac{n}{3}+1$ 知存在 $y \notin \{x, x_1\}$，$y \in N(x_3) \cap (N(x_2) \cup N(x_4))$，于是有过 x 的 $C_6 \nabla C_5$.

结论 2 当 $K(G) > 4$ 时，$\forall x_0 \in V(G)$，若过 x_0 有 $C_k \nabla C_{k-1}$ $(k \geqslant 5)$，$V(G) - V(C_k) \neq \Phi$，则过 x_0 点有 $C_{k+1} \nabla C_k$ 或 $C_{k+2} \nabla C_{k+1}$.

事实上，若不然，设过 x_0 点的 $C_k \nabla C_{k-1}$ 中的 C_{k-1} 为 $x_0 x_1 \cdots x_j x_{j+1} \cdots x_{k-2} x_0$，$C_k$ 为 $x_0 x_1 \cdots x_j u x_{j+1} \cdots x_{k-2} x_0$，并规定此序为圈的正向.

情况 1 存在 $x \in V(G) - V(C_k)$ 使得 $|N(x) \cap \{x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{k-2}, x_0, \cdots, x_{j-1}\}| \geqslant 2$ 或 $|N(x) \cap \{x_{j+2}, \cdots, x_0, \cdots, x_j\}| \geqslant 2$.

不妨设前者发生，取 $x_i, x_s \in N(x) \cap \{x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_0, \cdots, x_{j-1}\}$，从 x_i 到 x_s 沿圈的正向无 x 的邻点，显然 $s \neq i+1$，$\{x_{i+1}, x_{s+1}, x\}$ 为独立集，否则有过 x_0 的 $C_{k+1} \nabla C_k$，而对任意的 $y \in (V(G) - V(C_k)) \cap (N(x_{i+1}) \cup N(x_{s+1}))$，则 $y \notin N(x)$；若 $x_t \in V(C_{k-1}) \cap (N(x_{i+1}) \cup N(x_{s+1})) - \{x_{j+1}\}$，则 $x_{t-1} \notin N(x)$. 故有 $|N(x_{s+1}) \cup N(x_{i+1})| \leqslant |V(G) - N(x)| + 2 < \left(n - \left(\frac{n}{3}+1\right)\right) + 2 = \frac{2n}{3}+1$，矛盾.

情况 2 情况 1 以外的情况. 由 $K(G) > 4$ 知存在 $x_i, x_s \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\}$，使得 $N(x_i) \cap (V(G) - V(C_k)) \neq \Phi$，$N(x_s) \cap (V(G) - V(C_k)) \neq \Phi$，不妨设在路 $P x_{j+2} x_{j+3} \cdots x_0 x_1 \cdots x_{j-1}$ 中 x_i 在 x_s 之前. 取 $u_i \in$

$N(x_i)\cap(V(G)-V(C_k)),u_s\in N(x_s)\cap(V(G)-V(C_k))$，因不合情况1，$u_i\neq u_s$.

子情况 1　当 $u_iu_s\in E(G)$ 时，因无 $C_{k+2}\nabla C_{k+1}$ 过 x_0，$s\neq i+1$.（A）当 $s\neq i+2(\mathrm{mod}(k-1))$ 时，考察 x_{s+1},x_{s+2}（这时 $x_{i+1}\neq x_0$. 若 $x_{i+1}=x_0$，则考察 x_{i-1},x_{s-2}）和 u_s，$\{u_s,x_{s+1},x_{s+2}\}$ 为独立集，u_s 在 C_{k-1} 上除 x_s 外无邻点，对 $\forall v\in V(G)-V(C_k)$，若 $v\in N(x_{s+1})\cup N(x_{i+2})$，则 $u_sv\in E(G)$，

否则有过 x_0 的 $C_{k+2}\nabla C_{k+1}$，这样又有

$|N(x_{s+1})\cup N(x_{s+2})|\leqslant n-d(u_s)+1\leqslant\frac{2n}{3}$ 与 NU 条件矛盾.（B）当 $s=i+2$ 时：若 $x_{i+1}\neq x_0$，则显然有过 x_0 的 $C_{k+1}\nabla C_k$；若 $x_{i+1}=x_0$，当 $s+1\neq j$ 时，考察 x_{s+2},x_{i+1},u_i 同（A）一样得出矛盾（$j+2\neq i$ 时类似考虑 x_{i-2},x_{s-1},u_s）. 剩下的只有 $x_{i+1}=x_0,x_{s+1}=x_j,x_{j+2}=x_i,x_s=x_{i+2}$，即 $k=6$，$C_{k-1}x_0x_1x_2x_3x_4x_0,C_kx_0x_1x_2ux_3x_4x_0$，因 $d(x_2)>\frac{n}{3}+1\geqslant 6$，知存在 $u_2\in N(x_2)\cap(V(G)-V(C_6))\neq\Phi$，若 $u_2u_1\in E(G)$，显然有过 x_0 的 $C_8\nabla C_7$；当 $u_1u_2\notin E(G)$ 时，因 $|N(u_2)\cup N(u_1)|\geqslant\frac{2n}{3}+1,d(x_0)>\frac{n}{3}+1$，知存在 $\forall v\in(V(G)-V(C_6))\cap N(x_0)\cap(N(u_2)\cup N(u_1))$，得过 x_0 的 $C_8\nabla C_7$ 或 $C_7\nabla C_6$ 而矛盾.

子情况 2　$u_iu_s\in E(G)$ 当 $k>5$ 时，取 $x_t\in\{x_{j+2},x_{j+3},\cdots,x_{k-2},x_0,x_1,\cdots,x_{j-1}\}-\{x_i,x_s\}$，由 u_i,u_s 在 C_{k-1} 上除 x_i,x_s 外无邻点知 $N(x_t)\cap(N(u_i)\cup N(u_s))\cap(V(G)-V(C_k))\neq\emptyset$，即转化为子情况1. 当 $k=5$ 时，设 $C_5\nabla C_4$ 中的 C_5 为 $y_1y_2y_3y_4uy_1$，$y_1y_4\in E(G)$，则 $x_0\neq y_2$ 或 $x_0\neq y_3$ 不妨设 $x_0\neq y_2$，由 $K(G)>4$ 知 $N(y_i)\cap(V(G)-V(C_5))\neq\emptyset$，设 $v_i\in N(y)\cap(V(G)-V(C_5))$，若 $v_1v_3\in E(G)$ 则有过 x_0 的 $C_6\nabla C_5$，若 $v_1v_3\notin E(G)$，由 $|N(v_1)\cup N(v_3)|\geqslant\frac{2n}{3}+1,d(y_2)>\frac{n}{3}+1$ 知 $|N(y_2)\cap(N(v_1)\cup N(v_3))|>2$，于是亦可构作过 x_0 的 $C_7\nabla C_6$，至此结论2得到证明.

结论 3　当 $K(G)=2,3,4$ 时，对 $\forall l\in\left[6,\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right]$，过任意点 x_0 有 C_l，事实上，当 $K(G)=2$ 时，设 u,v 为两割点，因 $\delta(G)>\frac{n}{3}+1,G-\{u,v\}$

至多有两个连通分支 B_1，B_2，且有 $|V(B_i)|<\frac{2n}{3}$，又由 NU 条件知 $B_i(i=1,2)$ 为完全图，于是过任意点可构作 $6\leqslant l\leqslant\frac{2n}{3}+1$，当 $K(G)=3,4$ 时可同理构作.

由结论 1,2,3 及性质 1 知性质 3 成立.

综合性质 1、性质 2 和性质 3，可得定理 1 的证明.

下面进一步讨论 G 中过指定点的小圈情况，F 表示一类图族，其中的图为 $K_1\vee K_2^c\#G_{n-3}$，或为 $K_1\vee K_2^c*G_{n-3}$，其中 $\delta(G_{n-3})\geqslant\frac{2n}{3}-1$，"#"表示 K_2^c 的两点在 C_{n-3} 中均有邻点且邻点总数 $\geqslant\frac{2n}{3}$，$\delta(G_{n-3})\geqslant\frac{2n}{3}-1$，"*"表示 K_2 中两点在 G'_{n-3} 中均有邻点但不共邻点，且在 G'_{n-3} 中邻点总数 $\geqslant\frac{2n}{3}-2$.

定理 2　若 G 满足 NU 条件，则 G 具有下列特征之一：

1)G 为点泛圈的；

2)$3\leqslant\delta(G)\leqslant\frac{n}{3}+1=2=d(x)$，$G\in F$，此时 $\forall v\in V[G]-N[x]$，v 为$[6,n]-$泛圈点，$\forall v\in V[G]-N[x]$，v 为泛圈点；

3)$3\leqslant\delta(G)\leqslant\frac{n}{3}+1$，$G$ 为 $i-2$ 点泛圈的，$i=3,4,5$，此时 $i-2$ 泛圈点的点 $<i$.

证明　由性质 3 知，若 G 满足 NU 条件不具特征 1)，则 $\delta(G)\leqslant\frac{n}{3}+1$. 由定理知仅可能过 G 中某点无 G_1，$l\in[3,5]$. 由引理 3 知道 $d(x)>\frac{n}{3}+1$ 时有过 x 的 C_3，C_4，C_5. 由性质 2 的证明(3) 知，若有不相邻的两点 x、y，$d(x)>\frac{n}{3}+1$，$d(y)>\frac{n}{3}+1$，则过 x，y 均有 C_3，C_4，C_5. 故 G 中的非泛圈点构成一个团，特别当 $i\geqslant 3$ 时，$i-2$ 泛圈点的点数小于 i. 当 G 不为点泛圈图且 $\delta(G)=2$ 时，考虑到 NU 条件即得特征 2). 以下设 G 不是点泛圈的，$\delta(G)\geqslant 3$，x 为非泛圈点，令 $G_1=G-N[x]$.

A) 若过 x 无 C_3，取 $x_1,x_2,x_3\in N(x)$，$\{x_1,x_2,x_3\}$ 为独立集，有 $|N(x_i)$

$\cup N(x_j)| \geqslant \frac{2n}{3}+1, i \neq j \in [1,3]$，于是 $|N_{G_1}(x_i) \cup N_{G_1}(x_j)| \geqslant \frac{2n}{3}$. 若无过 x 的 C_4，则 $|N_{G_1}(x_i) \cup N_{G_1}(x_j)| = d_{G_1}(x_i) + d_{G_1}(x_j)(i \neq j)$，于是有 $d_{G_1}(x_1) + d_{G_1}(x_2) + d_{G_1}(x_3) \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{2n}{3} = n$. 由 $V(G_1) \leqslant n-4$，得存在 $i,j \in \{1,2,3\}$ 使得 $N_{G_1}(x_i) \cap N_{G_1}(x_j) \neq \Phi$，矛盾. 故过 x 有 C_4. 前已说明 $N_{G_1}(x_1), N_{G_1}(x_2), N_{G_1}(x_3)$ 中必有两个交非空，不妨设 $N_{G_1}(x_1) \cap N_{G_1(x_2)} \neq \varnothing$，若过 x 无 C_5，则 $\forall v \in N_{G_1}(x_1) \cap N_{G_1}(x_2), v \notin N(N_{G_1}(x_1) \cup N_{G_1}(x_2))$，由 $|N_{G_1}(x_1) \cup N_{G_1}(x_2)| \geqslant \frac{2n}{3}$，得 $|N(x) \cup N(v)| \leqslant |V(G) - N_{G_1}(x_1) \cup N_{G_1}(x_2)| \leqslant n - \frac{2n}{3} = \frac{n}{3}$ 矛盾. 故过 x 有 C_5. 此时 x 为 3－泛圈点，且 G 除 x 及某邻点可能为 3－泛圈点外，其余点皆为泛圈点.

B) 当过 x 有 C_3 无 C_4 时，由以上证明知 $\alpha(G[N(x)]) \leqslant 2$，得 $d(x) \leqslant 4$ 取 $x_1, x_2, x_3 \in N(x)$. $x_1x_2 \in E(G), x_1, x_2, x_3 \notin E(G)$，因无 C_4 过 x，故 $N_{G_1}(x_i) \cap N_{G_1}(x_j) = \varnothing(i \neq j)$. 由 $d_{G_1}(x_3) + d_{G_1}(x_i) = |N_{G_1}(x_3) \cap N_{G_1}(x_i)| \geqslant \frac{2n}{3} - 2, i = 1,2$ 知 $d_{G_1}(x_1) + d_{G_1}(x_2) + 2d_{G_1}(x_3) \geqslant \frac{4n}{3} - 4$，而 $d_{G_1}(x_1) + d_{G_1}(x_2) + d_{G_1}(x_3) \leqslant n-4$，得 $d_{G_1}(x_1) \geqslant \frac{n}{3}$，$\forall y \in N_{G_1}(x_1)$（或 $N_{G_1}(x_2)$），由于 $|N(y) \cup N(x)| = d(x) + d_{G_1}(y) \geqslant \frac{2n}{3}+1$，又得 $d_{G_1}(y) \geqslant \frac{2n}{3}+1-4 = \frac{2n}{3}-3$，$d_{G_1}(x_3)+d_{G_1}(y) \geqslant \frac{n}{3}+\frac{2n}{3}-3 = n-3$，得到 $|N_{G_1(x_3)} \cup N_{G_1}(y)| \neq \varnothing$，有过 x 的 C_5. x 是 4^-－泛圈点. 由 $d_{G_1}(x_3) \geqslant \frac{n}{3}$ 知，x_3 是泛圈的. 若还存在 $x_4 \in N(x)$，同理可证 x_4 也是泛圈的. x_1 和 x_2 可能为 4^-－泛圈点. 结论成立.

C) 除掉 A) 和 B) 即得 G 为 5^-－点泛圈的，且 5^-－泛圈点的点数 < 5.

由定理 2 立即得到下述推论.

推论[2] 若 G 为 2^- 连通 $n(\geqslant 19)$ 阶图，满足 $NC(G) \geqslant \frac{2n+5}{3}$，则 G 是泛圈的.

最后我们衷心感谢审稿人精心审读本文和对原文提出修改意见.

(本文第一作者通讯地址：安庆市安庆师范学院数学系　　邮编：246011).

参考文献

[1] Bondy,J. A. and Murty,U. S. R. Graph Theory with Applications. Londen:Macmillan,1976.

[2] Faudree,R. J. ,Gould,R. J. , Jacobson,M. S. ,Lesniak L. Neighborhood unions and highly Hamiltonian graphs. ArsCombin. ,1991,31:139—148.

[3] Cai Xiaotao. On the panconnectivity of ore graph. Scientia Sinica A, 1984,27:684—694.

[4] Zhang Kemin,Holton D. A. , Sheng Bau. On generalized vertex－pancyclic graphs. Chin. J. Math. ,1993,1(21):91—88.

[5] Faudree, R. J. ,Gould,R. J. ,Jacobson. M. S. and Schelp,R. H. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs. J. Combin. Theory,1989,4713:1—9.

[6] Song Zengmin,Zhang Kemin. A sufficient condition for a graph to be Hamiltonian. 南京大学学报,数学半年刊,1992,2:163—167.

[7] Willamson,J. Panconnected graphê. Period. Math. Hungar. , 1977,8:105—116.

A NEIGHBORHOOD UNION CONDITION FOR VERTEX-PANCYCLICITY

Ye Miaolin[1] Zhang Kemin[2]

(1. Dept. of Math., Anqing Normal College, Anqing, 246011, R. R. C.,

2. Dept. of Math., Nanjing University, Nanjing, 210093, R. R. C.)

Abstract The paper discusses vertex – pancyclicity by neighborhood union condition, and shows that 2 – connected graph G of order $n(\geqslant 14)$ is $[6,n]$ – Vertex – pancyclic if m in $\{\min\{|N(u)\cup N(v)| \mid u,v\in V(G), u,v\notin E(G)\}\geqslant \frac{2n}{3}+1$. The results in the special cases without $C_l(3\leqslant l\leqslant 5)$ are obtained. So the complete description of vertex – pancyclicity of this condition follows.

Key Words Neighborhood Unions, Pancyclic, Vertex – pancyclic.

Subject Classification (CL)O 157.5; (1991MR)05C38, 05C45