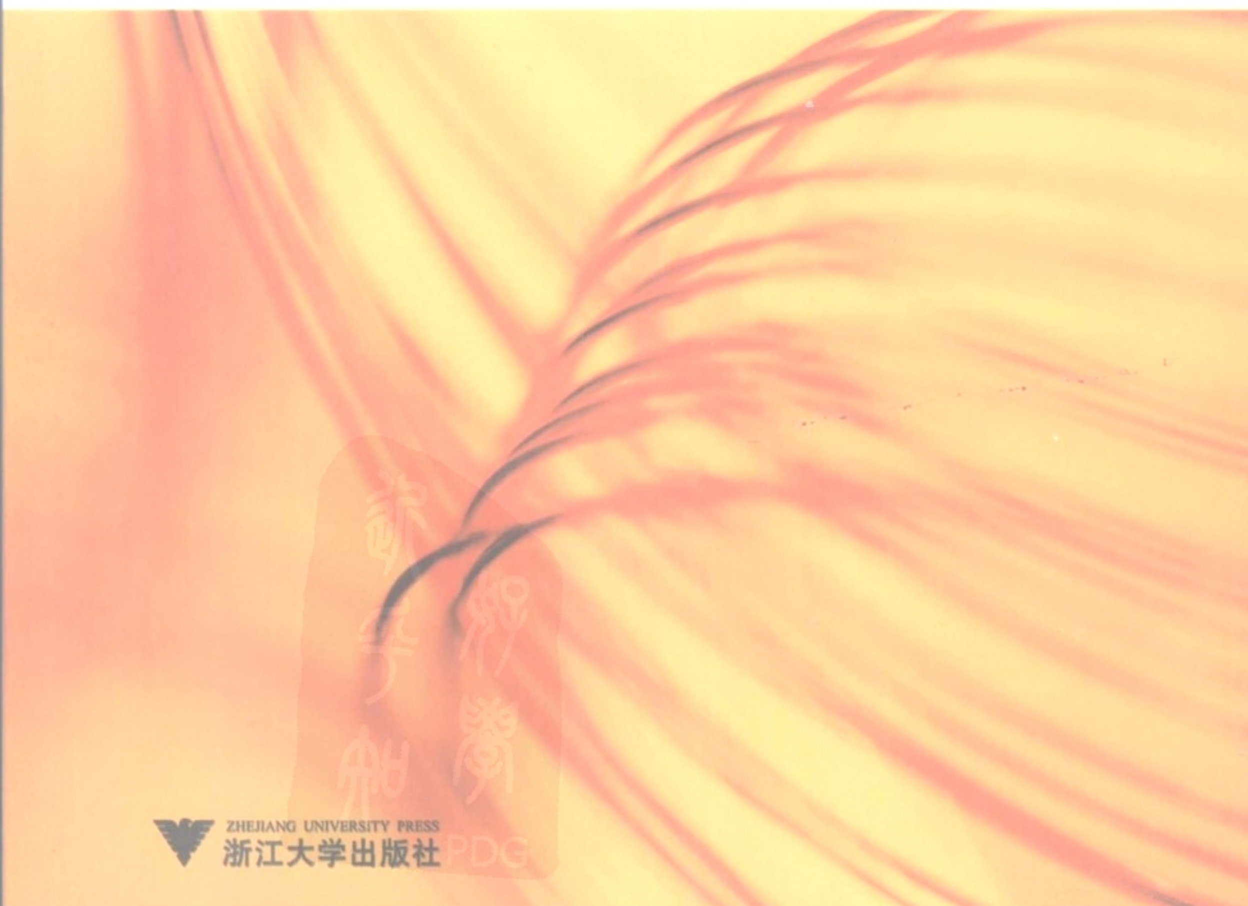
高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编　陶平生 冯跃峰 边红平

HANSHU BUDENGSHI

函数不等式

李世杰 李　盛 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

- ★ 数学结构思想及解题方法
- ★ 图论方法
- ★ 组合构造
- ★ 代数变形
- ★ 极值问题
- ★ 染色与染色方法
- ★ 周期函数和周期数列
- ★ 递推与递推方法
- ★ 函数不等式

ISBN 978-7-308-06576-4

9 787308 065764 >

定价：22.00 元

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

函数不等式

主编 李世杰 李盛

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 函数不等式/李世杰,李盛主编. - 杭州:浙江大学出版社,2009. 2
ISBN 978-7-308-06576-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①李…②李… Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 018796 号

高中数学竞赛专题讲座——函数不等式

李世杰 李 盛 主编

责任编辑	沈国明
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn) (网址: http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话: 0571—88925592, 88273066(传真)
经 销	浙江省新华书店
排 版	杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷	德清县第二印刷厂
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	13.25
字 数	270 千字
版 印 次	2009 年 2 月第 1 版 2009 年 2 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-06576-4
定 价	22.00 元

丛书编委会

丛书主编

陶平生　冯跃峰　边红平

编委名单

陶平生（江西科技师范学院）

冯跃峰（深圳中学）

边红平（武汉钢铁厂第三中学）

王慧兴（河南实验中学）

李世杰（衢州市教研室）

许康华（富阳二中）

蔡小雄（杭州二中）

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来，反响强烈，深受广大读者喜爱，并收到了大量反馈信息。很多读者，包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见，希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求，我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共9种：《图论方法》、《周期函数和周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》、《函数不等式》；考虑到配套，把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目　录

第1讲　函数不等式的解法

知识扫描

一、引言

在初等数学中见到的不等式,几乎都是含有未知数的不等关系式,如:

1. $x-1>0$.

2. $x^2-3x-4\leqslant 0$.

3. $2^x-3>0$.

4. $\log_3(x-2)+x-6\geqslant 0$.

5. 若奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,且 $f(-3)=0$,解不等式 $xf(x)<0$.

6. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,解不等式 $f(x-1)>f(1-2x)$.

7. (2006 年全国高中数学联合竞赛河南省预赛试题)设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R},x\neq 0)$ 对任意的非零实数 x_1,x_2,有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,则不等式 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0$ 的解为________.

这些含有未知数的不等式,其解是一个或一系列特定的数值区间(或无解),我们把这类不等式称为"数值不等式",习惯上把其中第 5,6,7 题这一类求未知函数自变量"数值解"的不等式称为函数不等式.

还有一类不等式,作为未知变量的是一个函数或一类函数,即这种不等式具有函数解,其解集的元素是函数,我们把这类不等式称为函数元不等式(在不会引起混淆时也简称为函数不等式).例如,在近年来的高考和大学、中学奥林匹克数学竞赛中出现的如下一些试题:

1. (2008 年全国高中数学联合竞赛第 1 试试题)设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,若 $f(0)=2008$,且对任意 $x\in\mathbf{R}$,满足 $f(x+2)-f(x)\leqslant 3\cdot 2^x$,$f(x+6)-f(x)\geqslant 63\cdot 2^x$,则 $f(2008)=$________.

2. 已知二次函数 $f(x)$ 满足条件 ① $f(-1)=0$;② 对一切 x 之值有 $x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(1+$

x^2）成立，试求 $f(x)$ 的解析式.

3.（第 31 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题，2005 年）是否存在有界函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得 $f(1) > 0$，且对一切的 $x, y \in \mathbf{R}$，都有

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)$$

成立？

4.（第 9 届中国中学生数学冬令营试题，1994 年）求适合以下条件的所有函数 $f: [1, +\infty) \to [1, +\infty)$.

(1) $f(x) \leqslant 2(x+1)$；(2) $f(x+1) = \frac{1}{x}[f^2(x) - 1]$.

5.（1977 年第 9 届 IMO 试题）设 $f(n)$ 定义在正整数集上且函数值也在正整数集上，证明：若对 $\forall x \in \mathbf{N}^+$，$f(n+1) > f[f(n)]$，则 $f(n) = n$.

6.（第四届大学生国际数学奥林匹克试题）证明：不存在实数集到实数集的映射 f，使得对于所有的正实数 x, y，有

$$f(x+y) > f(x)[1 + yf(x)]$$

成立.

7.（第 4 届中国中学生数学冬令营试题，1989 年）f 是定义在 $(1, +\infty)$ 上且在 $(1, +\infty)$ 中取值的函数，满足条件：对任意 $x, y > 1$ 及 $u, v > 0$，都成立

$$f(x^u y^v) \leqslant f^{\frac{1}{4u}}(x) f^{\frac{1}{4v}}(y) \qquad ①$$

试确定所有这样的函数 f.

这些函数不等式的解决仅以初等数学为工具，解法富于技巧，对人类的智慧具有明显的挑战意味.

实际上我们熟悉的单调函数的定义：

设区间 $D(\subseteq \mathbf{R})$，若对任意的 $x \in D$，对增量 $\Delta x > 0$ 有 $x + \Delta x \in D$，且 $f(x+\Delta x) > f(x)$（或 $f(x+\Delta x) < f(x)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是单调递增函数（或单调递减函数）.

我们在文献[1]中研究的如下的 l 凸函数：

设 $f(x)$ 是定义在实线性空间 X 中的凸集 M 上的实值连续函数，若对 $\forall x_1, x_2 \in D(\subseteq M)$，$\lambda \in [0,1]$ 和给定的常数 l，都有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + l \in M$，且

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + l] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad ②$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数；当 $-f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数时，则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凹函数.

当 $l=0$ 时，②式就是通常的凸（凹）函数定义.

这些都是用函数不等式的形式来定义的，未知的是函数 $f(x)$.

一个函数不等式，是数值型的还是函数元型的，判断的依据是：它的解是数值还是函数.

令人振奋的是，最近，中国科学院林群院士建议（文献[60]），不采用基于极限概念的点态导数定义，而在区间上用一个函数不等式定义导数：

定义　设函数 F 在$[a,b]$上有定义. 如果有一个在$[a,b]$上有定义的函数 f 和正数 M，使得对$[a,b]$上任意的 x 和 $x+h$，有下列不等式

$$|(F(x+h)-F(x))-f(x)h|\leqslant Mh^2 \quad ①$$

成立，则称 F 在$[a,b]$上强可导，并且称 $f(x)$是 $F(x)$的导数，记作 $F'(x)=f(x)$

显然，它可以写成以下的等价式：

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h+M(x,h)h^2 \quad ②$$

其中，$M(x,h)$是一个在区域$\{(x,h):x\in[a,b],x+h\in[a,b]\}$上有界的函数.

容易看出，若 F 在$[a,b]$上强可导，则它在任一点 $x\in[a,b]$处可导；反过来则不成立. 而初等函数在任意不含奇异点的闭区间上都是强可导的.

微积分的严格化基于所谓 ϵ、δ 语言的极限概念的引进. 而这样表述的极限概念对于初学者很难理解，已经成为学习高等数学之路上的一道关卡. 如何使微积分入门教学变得容易，是国际数学教育领域的百年难题.

利用林群院士提出的导数定义，可以大大简化微积分基本定理的论证，为微积分的初等化开创了一条新路. 对此，林群院士、张景中院士的工作引人注目. 有兴趣的读者可参考文献[15]、[21]、[43]、[60]等.

实际上定义中①式右端的 h^2 的指数 2 换成大于 1 的数也可以，这就拓展了函数不等式在高等数学中的应用范围.

关于函数不等式，在近年来的高考和各级各类数学竞赛试题，如国际数学奥林匹克竞赛试题（简称 IMO 试题）、IMO 预选试题、中国中学生数学奥林匹克竞赛试题（简称 CMO 试题）、高中数学联赛试题中都有出现，这方面的题型主要包括：求解关于自变量的函数不等式，求解函数不等式，证明函数不等式以及与函数不等式有关的综合问题. 在数学竞赛中出现的函数不等式，可以说是“小荷才露尖尖角”，相信以后会有更多的函数不等式题型在各级各类数学竞赛中出现.

二、函数不等式的数值解

求函数不等式的数值解，往往要利用某些条件，先确定未知函数的表达式，或未知函数的性质，如单调性、奇偶性、周期性、凸凹性等，并用不等式进行一些估计. 求函数不等式的数值解的基本方法有：构造函数法，变更主元法，特值转换法，数形结合法，函数单调性法，代换法等，常用的化归方式有：利用条件结合函数或不等式性质，将问题化为函数问题或数值不等式问题.

例题分析

例 1　已知 $y=f(x)$ 是单调递增的奇函数，它的定义域为$[-1,1]$，求函数 $g(x)=\sqrt{f(x^2-3)+f(x+1)}$ 的定义域与值域.

解　$g(x)$ 的定义域受 $f(x)$ 定义域的制约.它满足不等式:

$$\begin{cases} -1 \leqslant x^2-3 \leqslant 1 & ① \\ -1 \leqslant x+1 \leqslant 1 & ② \\ f(x^2-3)+f(x+1) \geqslant 0 & ③ \end{cases}$$

由 ① 式得:$\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2$ 或 $-2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}$　④

由 ② 式得:$-2 \leqslant x \leqslant 0$　⑤

④、⑤ 两式的交集是 $-2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}$　⑥

再考虑 ③ 式:$f(x^2-3) \geqslant -f(x+1)$,

因为 $f(x)$ 为奇函数,有 $f(x^2-3) \geqslant f(-x-1)$,

又 $f(x)$ 为增函数,故 $x^2-3 \geqslant -x-1$,

所以 $x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant -2$　⑦

由 ⑥、⑦ 两式知 $g(x)$ 的定义域为 $\{-2\}$,从而求得 $g(x)$ 的值域为 $\{0\}$.

评析　本题看起来结构挺简单,其实包含了比较丰富的内容:定义域、值域、复合函数、奇偶性、单调性等等.

我们先根据 $g(x)$ 的定义域列出函数不等式组,再根据 $f(x)$ 是单调递增的奇函数,脱掉"f"转化为普通的数值不等式.

例 2　已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,且在 $(0,1)$ 上为增函数,若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,试确定实数 a 的取值范围.

分析　将函数不等式向普通的代数不等式转化,实质为函数奇偶性和单调性的应用.

由 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,则 $f(a-2)<f(4-a^2)$,$f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,且在 $(0,1)$ 上为增函数,则函数不等式可分两类,用单调性转化求解.也可利用偶函数的特征,两类并一类转化求解.

解　由 $f(a-2)<f(4-a^2)$,且 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,在 $(0,1)$ 上为增函数,故有 $\begin{cases} |a-2|<|4-a^2| \\ |4-a^2|<1 \\ |a-2|>0 \end{cases}$　解得,$\sqrt{3}<a<2$ 或 $2<a<\sqrt{5}$.

例 3　已知 $f(\cos x) \geqslant 0$ 的解集为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,解不等式 $f(\sin x) \geqslant 0$.

解　令 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \pm t, k \in \mathbf{Z}$,则

$$f(\sin x)=f\left[\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2} \pm t\right)\right]=f(\cos t) \geqslant 0$$

由已知得 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$,

故　$2k\pi+\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2k\pi+\pi$.

或　$2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$　$(k \in \mathbf{Z})$.

从而知　$2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \pi$　$(k \in \mathbf{Z})$.

评析　这里用变量代换法解函数不等式.即将已知函数不等式中自变量 x 用另一变量 t 的表达式代换,推演出新的函数不等式,从而创造解函数不等式的条件,再解出原函数不等式.

例4　奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减,$f(2)=0$,解不等式 $(x-1)f(x+1)>0$.

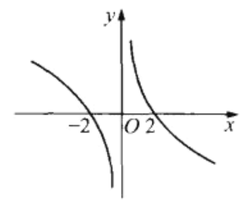


图 1-1　例 4 解答图

分析　$f(x)$ 是一个未给出解析式的函数,涉及的性质并不单一,有必要借助图形来帮助思考.为此,先根据 $f(x)$ 的单调性和条件 $f(-2)=-f(2)=0$,作出函数在左半平面的示意图.再根据对称性,作出右半平面的图形.有了这个图 1-1,我们不难看到,当 $x-1>0$ 时,$x+1>2$,此时 $f(x+1)<0$,原不等式无解.当 $x-1<0$ 时,由于函数在 $x=0$ 处断开,应分 $x+1<0$ 和 $0<x+1<2$ 两种情况.注意到 $0<x+1<2$ 时,原不等式无解,故原不等式等价于 $\begin{cases} x+1<0, \\ f(x+1)<0. \end{cases}$ 再根据函数的单调性,解之得原不等式的解集为 $\{x \mid -3<x<-1\}$.

评析　本例是用图象法解函数不等式的.由于数学题的表达方式是抽象的,抽象的东西在概括出本质的同时往往会消解其直观意义,遮蔽其真实面目.只有把它具体化、直观化,才可能知道它的来龙去脉,也才可以借助直观意义来形成正确的猜想,确立解题的基本思路.

例5　已知二次函数 $f(x)$ 的图象开口向下,且对于任意实数 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(2-x)=f(2+x)$ 成立,求解不等式 $f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]<f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)\right]$.

解　因为 $x^2+x+\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$,

所以 $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) \leqslant 2$;

同理,$\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right) \leqslant 1$.

由 $f(2-x)=f(2+x)$ 知抛物线的对称轴为 $x=2$,又 $y=f(x)$ 的图象开口向下知,当 $x \leqslant 2$ 时函数 $f(x)$ 为增函数,原不等式化为 $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)$,即 $x^2+x+\frac{1}{2}<2x^2-x+\frac{5}{8}$,解得 $1-\frac{\sqrt{14}}{4}<x<1+\frac{\sqrt{14}}{4}$.

评析　凡涉及函数的定义、函数的奇偶性、单调性、周期性等的函数不等式问题,其解题的思路为:紧扣有关概念,合理利用函数的单调性对应法则及题设条件,脱掉函数记号 $f(x)$,进行等价转化,使问题获解,这是等价转化思想在函数问题中的一个体现,常常利用这种等价

转化的方法解函数不等式.

例 6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且对任意的 a、$b\in\mathbf{R}$,当 $a+b\neq 0$ 时,都有 $\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$.

(1) 证明:$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(m\cdot 2^x)+f(2^x-4^x+m)<0$ 对一切实数 x 恒成立,求实数 m 的取值范围.

解 证明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,还得应用定义.关键在于奇函数这一性质怎么用?

(1) 任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$,即

$$x_1+(-x_2)<0.$$

由题意 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}>0$,而 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$,有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

因为 $x_1<x_2$,因此必须 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2) 因为 $f(m\cdot 2^x)+f(2^x-4^x+m)<0$,

所以 $f(m\cdot 2^x)<f(-2^x+4^x-m)$.

因此有 $m\cdot 2^x<-2^x+4^x-m$,整理成 $4^x-(m+1)2^x-m>0$ 对一切 x 恒成立.

设 $t=2^x\in(0,+\infty)$,即 $g(t)=t^2-(m+1)t-m>0$ 对一切正数恒成立,有两种情况.

$$① \ \Delta<0;② \begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ g(0)>0,\\ \dfrac{m+1}{2}<0\end{cases}$$

于是可知实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3+2\sqrt{2})$.

评析 本题主要考查函数不等式的解法及其应用.解不等式的应用非常广泛,如求函数的定义域、值域,求参数的取值范围等,高考试题中,对于解不等式要求较高,往往与函数概念,特别是二次函数、指数函数、对数函数等有关概念和性质密切相关.

例 7 定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $f(3)=\log_2 3$,且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

分析 欲证 $f(x)$ 为奇函数,即要证对任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立.在式子 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中,令 $y=-x$ 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$.于是又提出新的问题,求 $f(0)$ 的值,令 $x=y=0$ 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$ 即 $f(0)=0$,$f(x)$ 是奇函数得到证明.

解 (1) 证明:$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(x,y\in\mathbf{R})$, ①

令 $x=y=0$,代入 ① 式,得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,代入 ① 式,得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$,又 $f(0)=0$,则有 $0=f(x)+f(-x)$. 即 $f(-x)=-f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(3)=\log_2 3>0$,即 $f(3)>f(0)$,又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,又由(1) 知 $f(x)$ 是奇函数.

$f(k\cdot 3^x)<-f(3^x-9^x-2)=f(-3^x+9^x+2)$,$k\cdot 3^x<-3^x+9^x+2$,
$3^{2x}-(1+k)\cdot 3^x+2>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

令 $t=3^x>0$,问题等价于 $t^2-(1+k)t+2>0$ 对任意 $t>0$ 恒成立.

令 $f(t)=t^2-(1+k)t+2$,其对称轴 $x=\dfrac{1+k}{2}$.

当$\dfrac{1+k}{2}<0$ 即 $k<-1$ 时,$f(0)=2>0$,符合题意;

当$\dfrac{1+k}{2}\geqslant 0$ 时,对任意 $t>0$,$f(t)>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+k}{2}\geqslant 0,\\ \Delta=(1+k)^2-4\times 2<0.\end{cases}$

解得 $-1\leqslant k<-1+2\sqrt{2}$.

综上所述,当 $k<-1+2\sqrt{2}$ 时,$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

评析 本题(2) 运用函数思想,利用不等式的性质与函数单调性的特点,将求 k 的取值范围转化为求函数的最值问题,简洁明快,一目了然.

问题(2) 的上述解法是根据函数的性质:$f(x)$ 是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,把问题转化成二次函数 $f(t)=t^2-(1+k)t+2$ 对于任意 $t>0$ 恒成立. 对二次函数 $f(t)$ 进行研究求解. 本题还有更简洁的解法:

分离系数,由 $k\cdot 3^x<-3^x+9^x+2$,得 $k<3^x+\dfrac{2}{3^x}-1$.

$u=3^x+\dfrac{2}{3^x}-1\geqslant 2\sqrt{2}-1$,即 u 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$. 要使对 $x\in\mathbf{R}$ 不等式 $k<3^x+\dfrac{2}{3^x}-1$ 恒成立,只要使 $k<2\sqrt{2}-1$.

上述解法是将 k 分离出来,然后用平均值不等式求解,过程简洁,方法新颖.

例 8 已知 $f(x)$ 是单调减函数,值域为$[-1,1]$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$,且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证$\dfrac{1}{4}$ 不在定义域内;

(2) 解不等式$f^{-1}(x)\cdot f^{-1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

解 (1) 用反证法. 若$\dfrac{1}{4}$ 在 $f(x)$ 的定义域内,则

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

这与 $f(x)$ 的值域为$[-1,1]$矛盾. 所以$\frac{1}{4}$不在定义域内.

(2) 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中,令 $x=f^{-1}(u)$,$y=f^{-1}(v)$,得 $f[f^{-1}(u)\cdot f^{-1}(v)]=u+v$,即

$$f^{-1}(u)\cdot f^{-1}(v)=f^{-1}(u+v)$$

又$f^{-1}(1)=\frac{1}{2}$,故所给不等式化为

$$f^{-1}\left(x+\frac{1}{1-x}\right)\leqslant f^{-1}(1)$$

又 $f(x)$ 是单调减函数,所以$f^{-1}(u)$ 在$[-1,1]$上也为减函数. 所给不等式等价于

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{1-x}\geqslant 1\\ -1\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1\end{cases}\text{,解得 } x=0.$$

故所给不等式解集为$\{0\}$.

例 9 设 $f(x)$ 对 $x>0$ 有意义,$f(2)=1$,$f(xy)=f(x)+f(y)$,且 $f(x)>f(y)$ 成立的充要条件是 $x>y>0$. 求:(1) $f(1)$ 和 $f(4)$ 的值;(2) 当 x 在什么范围取值时 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$.

解 (1) 由于 $f(2)=1$,且对于 $x>0$,$y>0$,$f(xy)=f(x)+f(y)$,则令 $x=1$,$y=2$,得 $f(2)=f(1)+f(2)$,即 $f(1)=0$.

令 $x=2$,$y=2$,得 $f(4)=f(2)+f(2)=2$.

(2) 由条件 $f(xy)=f(x)+f(y)$,得

$$f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x).$$

又 $f(4)=2$,则由 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$,得

$$f(x^2-3x)\leqslant f(4).$$

由条件 $f(x)>f(y)$ 成立的充要条件是 $x>y>0$,所以有$\begin{cases}x^2-3x\leqslant 4,\\ x>0,\\ x-3>0,\end{cases}$ 解得 $3<x\leqslant 4$.

评析 题目条件中有函数方程,求解时常让函数方程中的变量取一些特殊值或特殊式,以利于解题.

例 10 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的增函数,且 $f(x)\neq 0$,$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$,

(1) 求证 $f(x)>0$;

(2) 求证 $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$;

(3) 若 $f(1)=2$,解不等式 $f(3x)>4f(x)$.

解 (1) $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0$(因为 $f(x)\neq 0$).

(2) $f(x-y)f(y)=f[(x-y)+y]=f(x)$,变形即得 $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$.

(3) 因为 $f(1)=2$,所以 $f(2)=f(1+1)=f^2(1)=4$.

故 $f(3x)>4f(x)$,即$\frac{f(3x)}{f(x)}>4$ 可化为

$$f(3x-x)>f(2)\Leftrightarrow 3x-x>2$$

解得 $x>1$.

例 11 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:对任意实数 m,n,总有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$,且当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$.

(1) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $A=\{(x,y)\mid f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$,$B=\{(x,y)\mid f(ax-y+\sqrt{2})=1,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,试确定 a 的取值范围.

解 (1) 在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中,令 $m=1,n=0$,得 $f(1)=f(1)\cdot f(0)$,因为 $f(1)\neq 0$,所以 $f(0)=1$.

在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中,令 $m=x,n=-x$

因为当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$,所以当 $x<0$ 时 $-x>0$,$0<f(-x)<1$

而 $f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1>0$

又当 $x=0$ 时,$f(0)=1>0$,所以,综上可知,对于任意 $x\in\mathbf{R}$,均有 $f(x)>0$.

设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$,则 $x_2-x_1>0$,$0<f(x_2-x_1)<1$

所以 $f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)<f(x_1)$

所以 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

(2) 由于函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,所以 $f(x^2)\cdot f(y^2)=f(x^2+y^2)>f(1)$

即有 $x^2+y^2<1$

又 $f(ax-y+\sqrt{2})=1=f(0)$,根据函数的单调性,有 $ax-y+\sqrt{2}=0$

由 $A\cap B=\varnothing$,所以直线 $ax-y+\sqrt{2}=0$ 与圆面 $x^2+y^2<1$ 无公共点. 因此有 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1$,解得 $-3\leqslant a\leqslant 3$.

评析 (1) 要讨论函数的单调性必然涉及两个问题:一是 $f(0)$ 的取值问题,二是 $f(x)>0$ 的结论. 这是解题的关键性步骤,完成这些要在所给函数式中进行. 由特殊到一般的解题思想,联想类比思维都有助于问题的思考和解决.

例 12 设 $f(x)$ 是定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的奇函数,且在$(0,+\infty)$上是增函数.

(1) 判断 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$上的单调性,并用单调函数的定义加以证明;