全国高等农林院校"十一五"规划教材

线性代数

第二版

张洪谦 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

第二版

张洪谦　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 张洪谦主编．—2 版．—北京：中国农业出版社，2009.7

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13368-6

Ⅰ．线… Ⅱ．张… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材

Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 010437 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

责任编辑　龙永志　刘新团

北京智力达印刷有限公司印刷　新华书店北京发行所发行

2006 年 9 月第 1 版　2009 年 7 月第 2 版

2009 年 7 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：12.75

字数：220 千字

定价：19.00 元

内容简介

本书较全面地介绍了线性代数的主要内容。全书共分七章，分别介绍了行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及线性空间与线性变换。每章末配有一定数量的习题，并附有习题参考答案。每章后面都附加一篇阅读材料，或介绍一则基础知识，或给出一种重要方法，以便于查阅和开阔视野。

本书可作为高等院校线性代数教材，也可供自学者和科技工作者参考使用。

第二版编写人员

主　编　张洪谦

副主编　孙丹娜　刘桂阳　沙荣方　黄凯美　魏云超　王兆玲

参　编　刘　倩　许　洋　辛永训　吴　慧　李福乐　杨　雪　赵　静　徐　英

主　审　任明荣

第一版编写人员

主　编　任明荣　张洪谦

副主编　孙丹娜　刘桂阳　沙荣方

　　　　　　黄凯美　魏云超

第二版前言

除对初版中的个别错误和不当之处做了必要的改正和修正外，相对初版主要做了以下工作：

1. 作为矩阵初等变换和齐次线性方程组解的理论的应用，将向量组的极大线性无关组的求法放在了线性方程组一章中，并加了一个支撑性定理。

2. 化二次型为标准形的初等变换法可以看作配方法的矩阵表达形式，它们解决了同种类型的标准形的化法问题，因此将初等变换法列为选学内容。而正交变换法由于所化标准形唯一，且保持了几何性质不变，因此被列为必学内容；

向量的内积作为向量的重要运算被列为必学内容；

对称矩阵的正交对角化列为必学内容。

3. 克莱姆法则是行列式的典型应用，将它放在行列式的重要计算方法——展开定理之后。

4. 修正了个别定理的证明方法。

5. 调整了部分例题和习题。

6. 书末给出了七套自我检测题且附以较详细的解答，以便于初学者自我检查基本内容的掌握情况。

张洪谦

2009 年 3 月于青岛

第一版前言

本书是由在农、林、水等高等院校从事数学教学工作多年的第一线教师集体编写。根据农、林、医、生物类《线性代数》的基本要求，面对相应学生的实际情况，经参编同志的反复讨论，写就目前这一体系。

考虑到农、林、医、生物类专业之间的差异，打“※”部分可由执教老师自定取舍。习题画线之前的部分，作为教学必须掌握内容的相应练习。画线之后的部分供有余力的学生自我提高练习之用。为了拓展学生视野以及提高学生兴趣，每章末编写了阅读材料，希望有益于本课程的学习。

魏云超老师编写了第一章，沙荣方老师编写了第二章，任明荣老师编写了第三章，刘桂阳老师编写了第四章，孙丹娜老师编写了第五章，黄凯美老师编写了第六章，张洪谦老师编写了第七章。同时，张洪谦老师编写了全部的阅读材料。张洪谦、魏云超两位老师对书稿的最后编排，付出了大量的劳动。

上海水产大学教务处、莱阳农学院教务处对于本教材的出版，给予了积极的支持和帮助，在此表示感谢。

由于水平所限，不当之处在所难免，敬请专家和读者批评指正，不吝赐教。

编　者

2006 年 7 月于青岛

郑 重 声 明

目录

第一章　行列式

中学数学中一个非常重要的内容就是一次方程（组），从一元一次方程、二元一次方程组、三元一次方程组到较为多元的一次方程组，解法往往是换元、替代或高斯消元，但是对于多元一次方程组而言，用中学的方法求解显然是比较繁杂的，所以进一步研究一次方程组的解法是很有必要的，而行列式是研究一次方程组的重要数学工具之一．本章在对行列式概念和性质讨论的基础上，会深入阐述克莱姆法则和行列式的展开定理，并介绍拉普拉斯定理与行列式乘法．

§1　行列式的概念

一、排列和逆序数

在给出行列式定义之前，首先介绍排列的有关概念和结论．先看一个例子．

例 1　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　有 6 个不同的三位数，它们是：123，132，213，231，312，321．

同理，对于 n 个不同的数字，也可以作类似的排列．

定义 1　由前 n 个正整数 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列．

一般常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示一个 n 元排列，其中 j_1 是该排列的第 1 个数，j_2 是该排列的第 2 个数，依此类推．显然，由数集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 组成的所有排列的种数为 $n!$．下面用逆序来对排列进行分类．

定义 2　在一个排列中，若有一个大数排在一个小数之前（即左边），则称这两个数构成该排列的一个逆序（反序）．一个排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数（反序数），记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．如果逆序数是偶数称为偶排列，逆序数是奇数称为奇排列．

现在来讨论排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的计算．考虑排列中的第 i 个位置上的数 $j_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 j_i 大的且排在 j_i 前面的数有 a_i 个，则由 j_i 构成的逆序数就是 a_i，由此可得该排列的逆序数就是：

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 2 求排列 24135 的逆序数.

解 在该排列中，2 排在首位，逆序数 $a_1=0$；4 的前面比 4 大的数没有，逆序数 $a_2=0$；1 的前面比 1 大的数有 2 和 4，逆序数 $a_3=2$；3 的前面比 3 大的数有 4，逆序数 $a_4=1$；5 的前面比 5 大的数没有，逆序数 $a_5=0$. 所以该排列的逆序数 $a=a_1+a_2+\cdots+a_5=3$.

二、二阶与三阶行列式

在线性代数发展的过程中，行列式的研究源于对线性方程组的研究. 例如，在中学时求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2,\end{cases}\tag{1}$$

用加减消元法不难求出，当 $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$ 时，得到解

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{2}$$

现把方程组 (1) 式中的未知数系数按照下标次序排列在一起

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix},\tag{3}$$

从 (2) 式的结果可以看出，分母正好是 (3) 式排列的对角线乘积之差.

定义 3 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ **叫做一个二阶行列式，它的值定义为：**

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中，a_{ij} 表示第 i 行第 j 列（i，j 分别为行标和列标）位置上的元素.

由此，若记 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$，

则 (2) 式可写成
$$x=\frac{D_1}{D},\ y=\frac{D_2}{D}.$$

用这个公式可以求解二元一次方程组，读者自己去检验.

注意，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 里，从 $a_{11}a_{22}$ 到 $-a_{12}a_{21}$，行标顺序没有变，而列标的顺序颠倒了，并且 $a_{11}a_{22}$ 中的列标逆序为 0（偶数），它的系数就为正数；

反之 $-a_{12}a_{21}$ 的列标逆序为 1（奇数），它的系数为负，这是巧合吗？下面来看三阶行列式．

定义 4
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做一个三阶行列式，它的值定义为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

其中 a_{ij}（i，$j=1$，2，3）表示第 i 行第 j 列（i，j 分别为行标和列标）位置上的元素．

例 3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$．

解 按三阶行列式的定义代入便有：

$$\begin{aligned} D&=4\times3\times(-1)+(-7)\times6\times1+2\times5\times1-4\times6\times1\\ &\quad-(-7)\times5\times(-1)-1\times3\times2\\ &=-12-42+10-24-35-6=-109. \end{aligned}$$

同理，在 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 里从正项到负项每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 行标的顺序没有变，而列标的顺序变了，并且正项的列标逆序为偶数，负项的列标逆序为奇数，这看来不是巧合．这样三阶行列式可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三元排列 $j_1j_2j_3$ 求和．由此可以给出 n 阶行列式的定义．

三、n 阶行列式

定义 5 **将 n^2 个数按 n 行 n 列排列为** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **叫做一个 n 阶**

行列式，它的值定义为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ **表示对所有** n **元排列** $j_1j_2\cdots j_n$ **求和.**

例 4 证明上三角行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 我们关心的是 D 的展开式中不为零的那些项 . D 的一般项是
$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于 D 的第 n 行元素除去 a_{nn} 外全是零，所以只要考虑 $j_n=n$ 的那些项；同理，D 的第（$n-1$）行只要考虑 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步推导下去易得，在 D 的展开中，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这项外，其余项全为零，且此项前的系数为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=1$.

另外，由这个结论可得到
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可推得
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,\ n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$