




全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数 第二版

张洪谦 主编

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

第 二 版

张洪谦 主编

中国 农业 出版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数 / 张洪谦主编. —2 版. —北京: 中国农业出版社, 2009. 7

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-13368-6

I. 线… II. 张… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 010437 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

责任编辑 龙永志 刘新团

北京智力达印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2006 年 9 月第 1 版 2009 年 7 月第 2 版

2009 年 7 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本: 720mm×960mm 1/16 印张: 12.75

字数: 220 千字

定价: 19.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

全国高等院校“十一五”精品课程系列教材

内 容 简 介

本书较全面地介绍了线性代数的主要内容。全书共分七章，分别介绍了行列式、 n 维向量、矩阵、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及线性空间与线性变换。每章末配有一定数量的习题，并附有习题参考答案。每章后面都附加一篇阅读材料，或介绍一则基础知识，或给出一种重要方法，以便于查阅和开阔视野。

本书可作为高等院校线性代数教材，也可供自学者和科技工作者参考使用。

机械工业出版社

第 二 版 编 写 人 员

主 编	张洪谦	参 编	主 审
副主编	孙丹娜	刘桂阳	沙荣方
	黄凯美	魏云超	王兆玲
参 编	刘 倩	许 洋	辛永训
	吴 慧	李福乐	杨 雪
	赵 静	徐 英	
主 审	任明荣		

第 一 版 编 写 人 员

主 编	任明荣	张洪谦	兼 主
副主编	孙丹娜	刘桂阳	沙荣方
黄凯美	魏云超		
参 考			
主			

第 二 版 前 言

除对初版中的个别错误和不当之处做了必要的改正和修正外，相对初版主要做了以下工作：

1. 作为矩阵初等变换和齐次线性方程组解的理论的应用，将向量组的极大线性无关组的求法放在了线性方程组一章中，并加了一个支撑性定理。

2. 化二次型为标准形的初等变换法可以看作配方法的矩阵表达式，它们解决了同类型的标准形的化法问题，因此将初等变换法列为选学内容。而正交变换法由于所化标准形唯一，且保持了几何性质不变，因此被列为必学内容；

向量的内积作为向量的重要运算被列为必学内容；

对称矩阵的正交对角化列为必学内容。

3. 克莱姆法则是行列式的典型应用，将它放在行列式的重要计算方法——展开定理之后。

4. 修正了个别定理的证明方法。

5. 调整了部分例题和习题。

6. 书末给出了七套自我检测题且附以较详细的解答，以便于初学者自我检查基本内容的掌握情况。

张洪谦

2009年3月于青岛

第 一 版 前 言

本书是由在农、林、水等高等院校从事数学教学工作多年的第一线教师集体编写。根据农、林、医、生物类《线性代数》的基本要求，面对相应学生的实际情况，经参编同志的反复讨论，写就目前这一体系。

考虑到农、林、医、生物类专业之间的差异，打“※”部分可由执教老师自定取舍。习题画线之前的部分，作为教学必须掌握内容的相应练习。画线之后的部分供有余力的学生自我提高练习之用。为了拓展学生视野以及提高学生兴趣，每章末编写了阅读材料，希望有益于本课程的学习。

魏云超老师编写了第一章，沙荣方老师编写了第二章，任明荣老师编写了第三章，刘桂阳老师编写了第四章，孙丹娜老师编写了第五章，黄凯美老师编写了第六章，张洪谦老师编写了第七章。同时，张洪谦老师编写了全部的阅读材料。张洪谦、魏云超两位老师对书稿的最后编排，付出了大量的劳动。

上海水产大学教务处、莱阳农学院教务处对于本教材的出版，给予了积极的支持和帮助，在此表示感谢。

由于水平所限，不当之处在所难免，敬请专家和读者批评指正，不吝赐教。

编 者

2006年7月于青岛

郑 重 声 明

中国农业出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 65005894, 59194974, 59194971

传 真：(010) 65005926

E - mail: wlxyaya@sohu.com

通信地址：北京市朝阳区农展馆北路2号中国农业出版社教材出版中心

邮 编：100125

购书请拨打电话：(010) 59194972, 59195117, 59195127

数码防伪说明：

本图书采用出版物数码防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪，同时您将有机会参加鼓励使用正版图书的抽奖活动，赢取各类奖项，详情请查询中国扫黄打非网 (<http://www.shdf.gov.cn>)。

短信反盗版举报：编辑短信“JB，图书名称，出版社，购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话：(010) 58582300/58582301

目 录

第二版前言	1
第一版前言	1
第一章 行列式	1
§ 1 行列式的概念	1
一、排列和逆序数	1
二、二阶与三阶行列式	2
三、 n 阶行列式	3
§ 2 行列式的性质	5
一、排列的对换	5
二、行列式的性质	6
§ 3 行列式的展开定理	10
§ 4 克莱姆法则	13
§ 5* 拉普拉斯定理与行列式的乘法	15
一、拉普拉斯定理	15
二、行列式的乘法	17
习题一	17
阅读材料 1: 连加号“ \sum ”与连乘号“ \prod ”	19
第二章 n 维向量	22
§ 1 n 维向量的定义和运算	22
一、 n 维向量的定义	22
二、向量的加法	23
三、向量的数量乘法	24
§ 2 向量的线性相关性	25
一、线性相关性	25
二、极大线性无关组和秩	31

§ 3 向量的内积	34
一、内积及其性质	34
二、长度、距离和夹角	35
三、正交向量组	37
习题二	39
阅读材料 2: 数域和数环	40
第三章 矩阵	42
§ 1 矩阵的基本概念	42
§ 2 矩阵的基本运算	44
一、矩阵的加法	44
二、数与矩阵相乘	44
三、矩阵与矩阵相乘	45
四、矩阵的转置	47
五、关于方阵的两个问题	48
§ 3 逆矩阵	50
一、逆矩阵的定义及性质	50
二、方阵 A 可逆的充要条件	51
§ 4 矩阵的初等变换与初等矩阵	54
一、矩阵的初等变换	54
二、初等矩阵	58
三、用初等变换求逆阵	60
§ 5 矩阵的秩	61
§ 6 分块矩阵	65
一、分块矩阵的概念	65
二、分块矩阵的运算	66
三、两种特殊分块及其应用	69
习题三	71
阅读材料 3: 分块矩阵的初等变换及其应用	74
第四章 线性方程组	77
§ 1 基本概念	77
一、线性方程组的三种表示形式	77
二、解与解集	78

三、有解判别条件	78
§ 2 齐次线性方程组	79
一、齐次线性方程组解的讨论	79
二、向量组的极大线性无关组的求法	83
§ 3 非齐次线性方程组	84
习题四	87
阅读材料 4: 无解线性方程组的最小二乘解	90
第五章 方阵的特征值和特征向量	93
§ 1 定义与求法	93
一、定义和基本性质	93
二、特征值和特征向量的求法	94
§ 2 方阵的相似关系和对角化问题	98
一、相似关系的定义与性质	98
二、相似对角化及其应用	98
§ 3 实对称矩阵的正交对角化	100
一、正交矩阵	100
二、实对称矩阵的正交对角化	101
习题五	104
阅读材料 5: 若当 (Jordan) 标准形介绍	106
第六章 二次型	109
§ 1 二次型及其矩阵表示	109
§ 2 标准形及其求法	112
一、配方法	112
二、初等变换法 (也称为合同变换法)*	114
三、正交变换法	116
§ 3 正定二次型和正定矩阵	119
习题六	121
阅读材料 6: 正定二次型及其他	122
第七章* 线性空间与线性变换	124
§ 1 线性空间的基本概念	124
一、线性空间的定义和基本性质	124

二、子空间及其充要条件	126
§ 2 基与坐标	127
一、基与维数	127
二、坐标	128
三、同构	130
§ 3 基变换与坐标变换	130
一、过渡矩阵	130
二、坐标变换公式	131
§ 4 线性变换	134
一、定义与例子	134
二、基本性质	135
§ 5 线性变换的矩阵	136
一、定义与例子	136
二、同一线性变换关于不同基的矩阵	139
三、线性变换的秩和零度	140
习题七	140
阅读材料 7: 集合与映射	142
习题参考答案	144
自我检测题	154
主要参考文献	189

第一章 行列式

中学数学中一个非常重要的内容就是一次方程(组),从一元一次方程、二元一次方程组、三元一次方程组到较为多元的一次方程组,解法往往是换元、替代或高斯消元,但是对于多元一次方程组而言,用中学的方法求解显然是比较繁杂的,所以进一步研究一次方程组的解法是很有必要的,而行列式是研究一次方程组的重要数学工具之一.本章在对行列式概念和性质讨论的基础上,会深入阐述克莱姆法则和行列式的展开定理,并介绍拉普拉斯定理与行列式乘法.

§ 1 行列式的概念

一、排列和逆序数

在给出行列式定义之前,首先介绍排列的有关概念和结论.先看一个例子.

例 1 用 1、2、3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 有 6 个不同的三位数,它们是: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

同理,对于 n 个不同的数字,也可以作类似的排列.

定义 1 由前 n 个正整数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列.

一般常用 $j_1 j_2 \dots j_n$ 表示一个 n 元排列,其中 j_1 是该排列的第 1 个数, j_2 是该排列的第 2 个数,依此类推.显然,由数集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 组成的所有排列的种数为 $n!$.下面用逆序来对排列进行分类.

定义 2 在一个排列中,若有一个大数排在一个小数之前(即左边),则称这两个数构成该排列的一个逆序(反序).一个排列中逆序的总数,称为该排列的逆序数(反序数),记作 $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$.如果逆序数是偶数称为偶排列,逆序数是奇数称为奇排列.

现在来讨论排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 的逆序数的计算.考虑排列中的第 i 个位置上的数 $j_i (i=1, 2, \dots, n)$,如果比 j_i 大的且排在 j_i 前面的数有 a_i 个,则由 j_i 构成的逆序数就是 a_i ,由此可得该排列的逆序数就是:

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

例 2 求排列 24135 的逆序数.

解 在该排列中, 2 排在首位, 逆序数 $a_1=0$; 4 的前面比 4 大的数没有, 逆序数 $a_2=0$; 1 的前面比 1 大的数有 2 和 4, 逆序数 $a_3=2$; 3 的前面比 3 大的数有 4, 逆序数 $a_4=1$; 5 的前面比 5 大的数没有, 逆序数 $a_5=0$. 所以该排列的逆序数 $a=a_1+a_2+\cdots+a_5=3$.

二、二阶与三阶行列式

在线性代数发展的过程中, 行列式的研究源于对线性方程组的研究. 例如, 在中学时求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

用加减消元法不难求出, 当 $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ 时, 得到解

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (2)$$

现把方程组 (1) 式中的未知数系数按照下标次序排列在一起

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}, \quad (3)$$

从 (2) 式的结果可以看出, 分母正好是 (3) 式排列的对角线乘积之差.

定义 3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做一个二阶行列式, 它的值定义为:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

其中, a_{ij} 表示第 i 行第 j 列 (i, j 分别为行标和列标) 位置上的元素.

由此, 若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, 则 (2) 式可写成

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}.$$

用这个公式可以求解二元一次方程组, 读者自己去检验.

注意, 在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 里, 从 $a_{11}a_{22}$ 到 $-a_{12}a_{21}$, 行标顺序没有变, 而列标的顺序颠倒了, 并且 $a_{11}a_{22}$ 中的列标逆序为 0 (偶数), 它的系数就为正数;

反之 $-a_{12}a_{21}$ 的列标逆序为1(奇数),它的系数为负,这是巧合吗?下面来看三阶行列式.

定义 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做一个三阶行列式,它的值定义为:

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \text{ 中其} \\ \text{即 } & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

其中 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 表示第 i 行第 j 列 (i, j 分别为行标和列标) 位置上的元素.

例 3 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 按三阶行列式的定义代入便有:

$$\begin{aligned} D &= 4 \times 3 \times (-1) + (-7) \times 6 \times 1 + 2 \times 5 \times 1 - 4 \times 6 \times 1 \\ &\quad - (-7) \times 5 \times (-1) - 1 \times 3 \times 2 \\ &= -12 - 42 + 10 - 24 - 35 - 6 = -109. \end{aligned}$$

同理, 在 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 里从正项到负项每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 行标的顺序没有变,而列标的顺序变了,并且正项的列标逆序为偶数,负项的列标逆序为奇数,这看来不是巧合.这样三阶行列式可表示为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三元排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.由此可以给出 n 阶行列式的定义.

三、 n 阶行列式

定义 5 将 n^2 个数按 n 行 n 列排列为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做一个 n 阶

行列式, 它的值定义为

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

例 4 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 我们关心的是 D 的展开式中不为零的那些项. D 的一般项是

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由于 D 的第 n 行元素除去 a_{nn} 外全是零, 所以只要考虑 $j_n = n$ 的那些项; 同理, D 的第 $(n-1)$ 行只要考虑 $j_{n-1} = n-1$. 这样逐步推导下去易得, 在 D 的展开中, 除去 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这项外, 其余项全为零, 且此项前的系数为 $(-1)^{\tau(12 \cdots n)} = 1$.

另外, 由这个结论可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理可推得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

和

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2, n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}.$$