成人(网络)教育系列规划教材

CHENGREN (WANGLUO) JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

线性代数简明教程

XIANXING DAISHU JIANMING JIAOCHENG

主　编　李捷　涂晓青

西南财经大学出版社

Southwestern University of Finance & Economics Press

成人(网络)教育系列规划教材

CHENGREN (WANGLUO) JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

线性代数简明教程

XIANXING DAISHU JIANMING JIAOCHENG

主　编　李捷　涂晓青

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/李捷,涂晓青主编.—成都:西南财经大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-81138-379-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①李…②涂… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 106524 号

线性代数简明教程

主编:李捷　涂晓青

责任编辑:张访

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.bookcj.com
电子邮件:	bookcj@foxmail.com
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	185mm×260mm
印　　张:	13.5
字　　数:	300 千字
版　　次:	2009 年 7 月第 1 版
印　　次:	2009 年 7 月第 1 次印刷
印　　数:	1—5000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-379-9
定　　价:	25.00 元

成人（网络）教育系列规划教材
编 审 委 员 会

总序

随着全民终身学习型社会的不断建立和完善，业余成人（网络）学历教育学生对教材的质量要求越来越高。为了帮助他们更好地学习、进一步提高我校成人（网络）教育的人才培养质量，依据西南财经大学成人（网络）教育人才培养目标、成人学习特点及规律，西南财经大学成人（网络）教育学院和西南财经大学出版社共同规划，依托学校各专业学院的骨干教师资源，致力于开发适合成人（网络）学生学习高质量的优秀系列规划教材。

西南财经大学成人（网络）教育学院和西南财经大学出版社按照成人（网络）教育人才培养方案，建设其专科及专升本公共基础课、专业基础课、专业主干课和部分选修课教材，以完善成人（网络）教育教材体系。鉴于成人自考所使用的教材为全国统编，因此，本系列教材只涉及成人（网络）学历教育专科及专升本的公共基础课、专业基础课、专业课及部分选修课。

由于本系列教材的读者是在职人员，他们具有一定的社会实践经验和理论知识、个性化学习诉求突出，学习针对性明确，学习目的很强。为此，本系列教材编写突出了基础性、职业性、实践性及综合性，教材体系和内容结构具有新颖、实用、简明、易懂等特点；对重难点问题的阐述深入浅出、形象直观，对定理和概念的论述简明扼要。

为了编好本次系列规划教材，在学校领导、出版社和其他学院的大力支持下，首先成立了由学校副校长、博士生导师丁任重教授任主任，成人（网络）教育学院院长唐旭辉研究员和出版社社长、博士生导师冯建教授任副主任，其他部分学院领导参加的编审委员会。在编审委员会的协调、组织下，经过广泛深入的调查研究，制定了我校成人（网络）教育教材建设规划，明确了建设目标，计划用2年时间分期分批建设。其次，为保证教材的编写质量，在编审委员会的协调下，组织各学院具有丰富成人（网络）教学经验并有教授或副教授职称的教师担任主编，由各书主编组织成立教材编写团队、制定教材编写大纲、实施计划及人员分工等，经编审委员会审核每门教材编写大纲后再编写。

经过多方的努力，本系列规划教材终于与读者见面了。在此之际，我们对各学院领导的大力支持、各位作者的辛勤劳动以及西南财经大学出版社的鼎力相助表示衷心的感谢！在今后教材的使用过程中，我们将听取各方面的意见，不断修订、完善教材，使之发挥更大的作用。

西南财经大学成人（网络）教育学院

2009年6月

前 言

线性代数是大学数学课程的重要组成部分，是高等财经院校的一门主干基础课程。线性代数首先运用一些基本工具，如行列式、矩阵与向量等研究生产实际和经济管理中大量出现的线性方程组解的判定、解的结构和应用问题，并在此基础上进一步地研究向量的内积、正交矩阵、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容。近年来，随着计算机技术的普及和数学软件的推广，线性代数在生产实际和经济管理中日益得到广泛应用，如投入产出分析，线性规划模型，层次分析模型等都是以线性代数为基础。

通过本课程的学习，一方面可以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力，初步掌握用数学方法进行科学地分析实际问题的能力；另一方面可以学会运用线性代数方法分析和解决实际问题，对后续课程的学习起着非常重要的作用。

本课程共分为6章，每章都围绕基本概念、基本理论和基本方法，按照教学要求和内容，贯彻由浅入深、循序渐进和融会贯通的原则，力求既注重基本概念、基本理论和基本方法的阐述，又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养。

本书由李捷和涂晓青执笔编写，全书由李捷统稿，涂晓青参与了部分统稿工作。

本书是在西南财经大学成人（网络）教育学院和西南财经大学出版社的关心和支持下完成的，西南财经大学经济数学学院的老师们也对本书的编写提供了很多非常好的建议，编者借此一并致谢。

限于编者水平所限，本书中疏漏与不当之处在所难免，恳请同行及广大读者指正。

编 者

2009 年 6 月

目 录

第一章　行列式

内容提要

一、逆序与逆序数的定义及性质

二、二阶、三阶行列式和 n 阶行列式的定义及性质

三、余子式和代数余子式的定义及行列式的展开定理

四、行列式的计算方法

五、克莱姆法则及 n 元线性方程组的求解

行列式理论是线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组的有力工具，它在生产实际和经济管理中有着广泛的应用．本章从行列式的概念出发，介绍行列式的性质和计算方法，并提供求解一类线性方程组的方法——克莱姆(Gramer)法则．

§1.1　行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题．为此，需要回顾初等代数中二、三元线性方程组的求解过程，从中引出二、三阶行列式的概念．

设含有两个未知量 x_1, x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

利用加减消元法，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

为便于研究，我们可以将(1-2)式的分母记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**．其中横排称为**行**，纵排称为**列**．

二阶行列式的计算方法可用图 1 - 1 来帮助记忆．

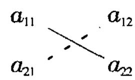

图 1 - 1

图 1 - 1 说明二阶行列式的值等于实线上两个元素乘积与虚线上两个元素乘积的差．

例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$$

利用上述定义，(1 - 2) 式中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \qquad (1-4)$$

因此，对二元线性方程组(1 - 1)，在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad (1-5)$$

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

解 根据二元线性方程组的求解公式(1 - 5)，有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{1} = -1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

类似地，为求解含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1-6)$$

我们记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1-7}$$

称为**三阶行列式**.

在(1－7)式中,元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 所在的对角线称为**主对角线**,a_{13}, a_{22}, a_{31} 所在的对角线称为**副对角线**.

三阶行列式的计算方法可用图 1－2 来帮助记忆.

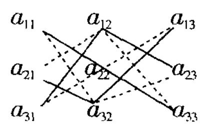

图 1－2

图 1－2 表明:沿各实线上三个元素的乘积取正号;沿虚线上三个元素的乘积取负号. 它们的代数和就是三阶行列式(1－7)的值.

由此关于三元线性方程组(1－6),当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,如果记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1－6)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1-8}$$

一般地,称 D 为方程组(1－6)的**系数行列式**,而 D_1, D_2, D_3 是分别把 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列中的各数换成常数项 b_1, b_2, b_3 构成的.

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D = 2 \times 2 \times 2 + (-1) \times 1 \times 3 + 4 \times (-1) \times 1 - 3 \times 2 \times 4 - 1 \times 1 \times 2$

$$-2\times(-1)\times(-1)$$
$$=-27$$

例 3 当 x 为何值时,行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 5 & x\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}=2.$$

解 $\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 5 & x\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}=3\times5\times2+2\times3\times(-1)+2\times1\times x-(-1)\times5\times2$

$$-x\times3\times3-2\times1\times2$$
$$=30-7x=2$$

解得

$$x=4.$$

故当 $x=4$ 时,行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 5 & x\\2 & 3 & 2\end{vmatrix}=2.$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=a\\-x_1+x_2+x_3=b\\x_1-x_2+x_3=c\end{cases}$$

解 由系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}a & 1 & -1\\b & 1 & 1\\c & -1 & 1\end{vmatrix}=2(a+c),D_2=\begin{vmatrix}1 & a & -1\\-1 & b & 1\\1 & c & 1\end{vmatrix}=2(a+b)$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\-1 & 1 & b\\1 & -1 & c\end{vmatrix}=2(b+c)$$

故方程组有唯一解,由(1-8)式可知

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1}{2}(a+c) \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{2}(a+b) \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{1}{2}(b+c) \end{cases}$$

二、排列中的逆序与逆序数

为了获得 n 阶行列式的定义，需介绍排列及其有关的概念.

定义 1.1　把 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 排成一个有序数组

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

称为 n **级排列**，简称**排列**.

例如，12345，42351 是 5 级排列，21458673 是 8 级排列.

一般地，n 级排列的总数为 $n!$ 种. 例如 3 级排列的总的排列方法有 $3!=6$ 种，即 123；132；213；231；312；321.

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $s<t$ 时，$i_s>i_t$，即一对数的前后位置与大小顺序相反，则称数对 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为 n 级排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

例如，在 5 级排列 42351 中，构成逆序的数对有 42，43，41，21，31，51 共 6 个. 故 $\tau(42351)=6$. 而在 n 级排列 $123\cdots n$ 中，没有构成逆序的数对，故 $\tau(123\cdots n)=0$. 我们称这种逆序数为零的排列为 n 级**自然排列**.

如果一个 n 级排列的逆序数为偶数，则称之为**偶排列**，显然 5 级排列 42351 是偶排列. 如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，则称之为**奇排列**，如 5 级排列 24135 是奇排列，因为 $\tau(24135)=3$.

定义 1.3　在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置，其余各数位置不变，就得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的互换称为排列的一次**对换**，记作 (i_s,i_t). 特别地，若互换的是相邻的两个元素，则称为**相邻对换**.

例如：$42351 \xrightarrow{(3,1)} 42153$.

对换有如下重要性质：

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性.

证　（1）如果对换是相邻对换，在排列

$$i_1 i_2\cdots i_s i_t\cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1 i_2\cdots i_t i_s\cdots i_n$$

因为对换后除了 i_s 与 i_t 外，其余任意两数间的序数都未动，所以当 $i_s<i_t$ 时，对换后排列仅增加一个逆序，当 $i_s>i_t$ 时，对换后排列仅减少一个逆序. 因此经相邻对换后排列的逆序数增加或减少 1 个，故相邻对换改变排列的奇偶性.

（2）如果对换不是相邻对换，在排列

$$i_1i_2\cdots i_sa_1a_2\cdots a_ki_t\cdots i_n$$

中，将 i_s 与 i_t 对换，得

$$i_1i_2\cdots i_ta_1a_2\cdots a_ki_s\cdots i_n$$

该排列可以看成由原排列中的 i_t 依次和前面的数作 $k+1$ 次相邻对换，变成

$$i_1i_2\cdots i_ti_sa_1a_2\cdots a_k\cdots i_n$$

后，再让 i_s 依次和它后面的数作 k 次相邻对换得到的，即对换后的排列可由原排列经 $2k+1$ 次相邻对换得到．所以非相邻对换亦改变排列的奇偶性．

综上所述：对换改变排列的奇偶性．

进一步可以证明，任意一个 n 级排列，经过有限次对换总可变成自然排列．而且还有如下结论：

定理 1.2　在所有 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数相同，各为$\frac{n!}{2}$个．

三、n 阶行列式的定义

实际中，除了二阶、三阶行列式外，常常还会遇到阶数较高的行列式，为此我们需要定义更具普遍意义的 n 阶行列式．

再来考察三阶行列式(1－8)．由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

容易看到三阶行列式具有如下特征：

1. 三阶行列式表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和．3 个元素的乘积称为行列式的项，可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-9}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 遍取了 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项（不包含符号），共为 $3!=6$ 项．

2. 每一项都带有符号．项中行下标成自然排列时，当其列下标 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，项(1－9)取正号；当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，项(1－9)就取负号．因此，称 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 为行列式的一般项．

所以三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示遍取所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 时，对一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

求和.

显然，二阶行列式也符合这些特征，并可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

根据二、三阶行列式的特征，可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

称为 n **阶行列式**（其中横排称为**行**，纵排称为**列**，元素 a_{ij} 的第一下标和第二下标分别表示元素所处的行和列，称为**行标**和**列标**），它表示为所有取自不同行及不同列的 n 个数乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

的代数和. 各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号是：行标依次构成自然排列时，若列标构成的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，(1-11) 式取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，(1-11) 式取负号. 即 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-12}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 级排列求和，共有 $n!$ 项.

显然，由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是其自身，即 $|a_{11}|=a_{11}$.

例如，一个 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

所表示的代数和中有 $4!=24$ 项.

其中乘积$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$的各元素的行标已经是4级自然排列1234，列标也构成4级自然排列1234，其逆序数为$\tau(1234)=0$，且$(-1)^{\tau(1234)}=(-1)^0=1$，故此项的符号为正号. 乘积$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$的各元素的行标也已经是4级自然排列1234，各元素的列标构成4级排列2413，其逆序数为$\tau(2413)=3$. 故此项的符号为负号. 而乘积$a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$有两个元素取自第1列，故它不是行列式的一个乘积项.

例5 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},(a_{ii}\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$$

解 根据行列式的定义1.4，得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为在D的一般项中，只有当

$$j_n=n,j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$$

时，乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

才不等于零. 所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上述行列式称为**上三角行列式**，其特征为主对角线以下的元素全为零，主对角线以上的元素不全为零. 例5说明上三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积.

作为例5的特殊情况，如下行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角行列式**.

例6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据行列式的定义1.4,得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中的各项,除

$$a_{11}a_{2n}\cdots a_{\overline{n-1}\,3}a_{n2}$$

外,其余全部为零,所以

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{\tau[1n(n-1)\cdots 2]}n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\\&=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!\end{aligned}$$

下面不加证明的给出 n 阶行列式的等价表达形式：

定理1.3 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 中的一般项可以表示成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-13}$$

或

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-14}$$

(1-13)式为列标是自然排列,行标是 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 时的一般项,而(1-14)式为行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列的一般项.

(1-13)式和(1-14)式的价值在于丰富了用定义计算行列式的方法,即不一定只用行标是自然排列、列标是 n 级排列来计算 n 阶行列式. 也可用列标是自然排列、行标是 n 级排列,或行标、列标都是 n 级排列来计算 n 阶行列式.

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&0&0&0\\0&0&0&b\\0&c&0&0\\0&0&d&0\end{vmatrix}$$

既可按(1-12)式计算：

$$D=(-1)^{\tau(1423)}abcd=abcd$$

也可按(1-13)式计算：

$$D=(-1)^{\tau(1342)}acdb=abcd$$

甚至还可以按(1-14)式计算,这种解法留给读者自行完成.