

新课程同步学案

适用普通高中课程标准实验教科书

(北师大版)

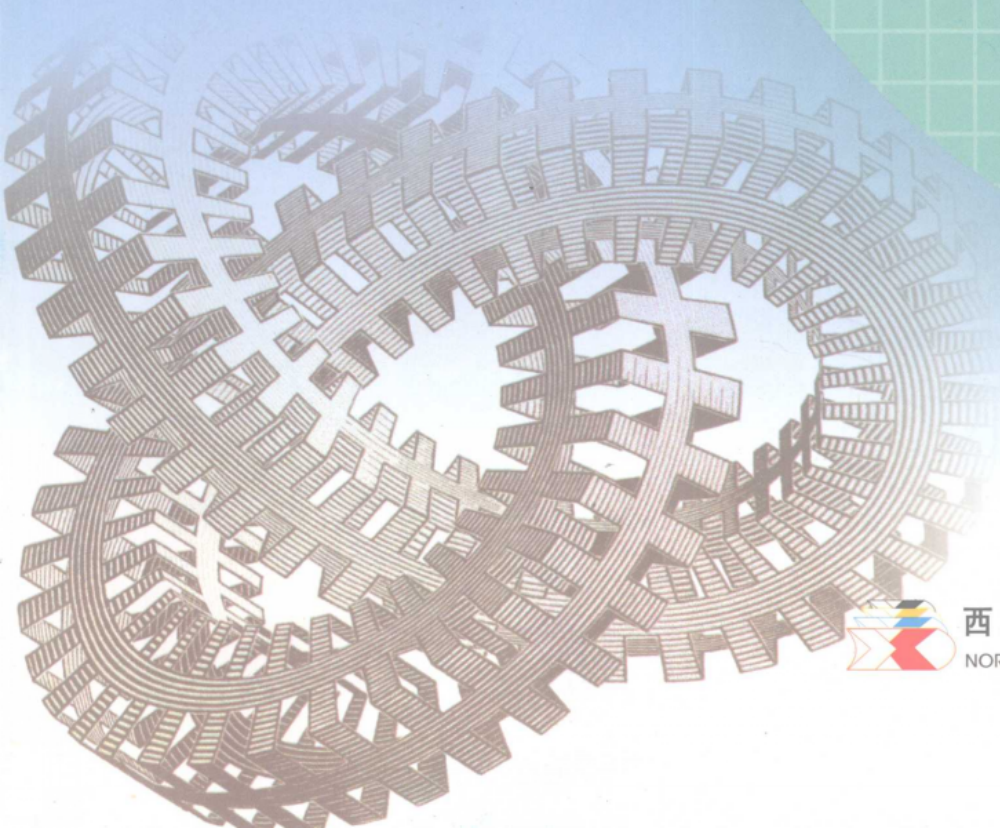
专家

伴读

ZHUANJIABANDU

■ 北京师范大学出版社 组编

数学必修①



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

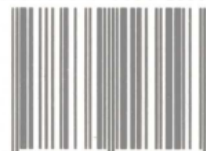
新课程同步学案 ◇ 专家伴读 ◇ 必修

	版别	必修 ①	必修 ②	必修 ③	必修 ④	必修 ⑤
语文	LR	☐	☐	☐	☐	☐
	R	☐	☐	☐	☐	☐
	S	☐	☐	☐	☐	☐
	YW	☐	☐	☐	☐	☐
英语	R	☐	☐	☐	☐	☐
	WY	☐	☐	☐	☐	☐
	JJ	☐	☐	☐	☐	☐
地理	R	☐	☐	☐		
	LJ	☐	☐	☐		
生物	R	☐	☐	☐		
	ZT	☐	☐	☐		
历史	RM	☐	☐	☐		
	R	☐	☐	☐		
	Y	☐	☐	☐		

	版别	必修 ①	必修 ②	必修 ③	必修 ④	必修 ⑤
数学	B	☒	☐	☐	☐	☐
	R _A	☐	☐	☐	☐	☐
	R _B	☐	☐	☐	☐	☐
化学	R	☐	☐			
	LK	☐	☐			
物理	R	☐	☐			
	HK	☐	☐			
思想政治	R	☐	☐	☐	☐	

版别标示	B	R	S	Y	SK	LK	LJ	KM	LK	JJ	WY	LR	ZT
北师版													
人教版													
苏教版													
岳麓版													
沪科版													
鲁教版													
鲁教版													
冀教版													
外研版													
鲁教版													
中图版													

ISBN 978-7-5604-2359-3



9 787560 423593 >

定价: 10.80元

新课程同步学案

专家伴读

ZHUAN JIABANDU

适用普通高中课程标准实验教科书 (北师大版)

■ 北京师范大学出版社 组编

数学必修①



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

适用普通高中课程标准实验教科书（北师大版）

新课程同步学案

专家伴读

数学·必修①

西北大学出版社出版

（西安市太白北路229号 邮政编码：710069）

新华书店经销 陕西天坛福利印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米 1/16开本 印张：8 字数：205千字

2008年8月第2版

2008年8月西安第2次印刷

ISBN 978-7-5604-2359-3

定价：10.80元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与陕西天坛福利印刷厂
质量管理处联系调换。

地址：西安市天坛路10号

邮编：710061

电话：（029）85247324

录目

新课程同步学案·专家伴读·数学必修1

第一章 集合

§1 集合的含义与表示	(1)
§2 集合的基本关系	(4)
§3 集合的基本运算	(8)
3.1 交集与并集	(8)
3.2 全集与补集	(10)
单元测试与评价	(13)

第二章 函数

§1 生活中的变量关系	(16)
§2 对函数的进一步认识	(19)
2.1 函数概念	(19)
2.2 函数的表示法	(22)
2.3 映射	(25)
§3 函数的单调性	(28)
§4 二次函数性质的再研究	(30)
4.1 二次函数的图像	(30)
4.2 二次函数的性质	(33)
§5 简单的幂函数	(36)
单元测试与评价	(39)

第三章 指数函数和对数函数

§1 正整数指数函数	(43)
§2 指数的扩充及其运算性质	(46)
2.1 指数概念的扩充	(46)
2.2 指数运算的性质	(46)
§3 指数函数	(49)
3.1 指数函数的概念	(49)

3.2	指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像和性质	(51)
3.3	指数函数的图像和性质	(53)
§ 4	对数	(56)
4.1	对数及其运算	(56)
4.2	换底公式	(58)
§ 5	对数函数	(60)
5.1	对数函数的概念	(60)
5.2	$y=\log_2 x$ 的图像和性质	(63)
5.3	对数函数的图像和性质	(65)
§ 6	指数函数、幂函数、对数函数增长的比较	(67)
	单元测试与评价	(70)

第四章 函数应用

§ 1	函数与方程	(74)
1.1	利用函数性质判定方程解的存在	(74)
1.2	利用二分法求方程的近似解	(76)
§ 2	实际问题的函数建模	(79)
2.1	实际问题的函数刻画	(79)
2.2	用函数模型解决实际问题	(82)
2.3	函数建模案例	(84)
	单元测试与评价	(87)

模块测试与评价 I	(91)
模块测试与评价 II	(95)
参考答案	(99)



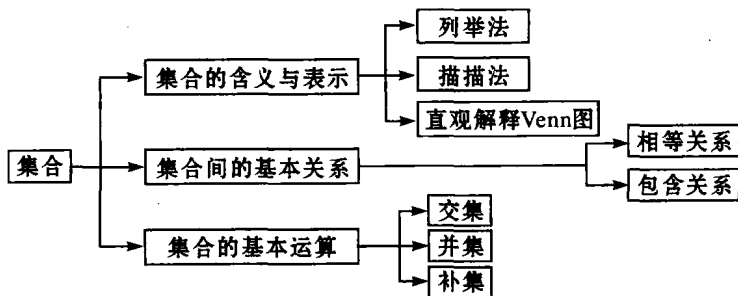
第一章 集合

单元概览

集合论是德国数学家康托在 19 世纪末创立的,集合语言是近代数学的基本语言,利用它可以简洁、准确地描述数学对象.集合是高中数学的起始内容,也是整个中学数学的基础.它的基础性体现在:集合的思想、集合的语言和集合的概念在高中数学的很多内容(如函数、数列、轨迹、方程和不等式、立体几何、解析几何)中都被广泛地使用,同时也是支撑现代数学大厦的基石之一.

本章的内容主要是集合的含义与表示、集合的基本关系、集合的基本运算.

本章知识结构图



§ 1 集合的含义与表示



【专家引领】

1. 注意通过实例了解集合的含义.
2. 注意常用数集的记法,自然数集 $\mathbf{N}$ 包含 0,正整数集 $\mathbf{N}_+$ 不包含 0.
3. 明确有限集、无限集和空集的概念;了解集合中的元素具有确定性、互异性、无序性;了解集合的描述法和列举法的特点和区别.
4. 本节的重点是集合的含义与表示方法,难点是集合表示方法的恰当选择及应用,突破重点与难点的关键:首先理解其含义,其次要结合实例进行体会,要结合它的实际背景与几何意义去理解.

重难点突破:

(1)集合中元素的三个特性

①确定性:任何一个对象都能确定它是不是某一集合的元素,这是集合的最基本特征,没有确定性就不能成为集合,例如“很小的数”、“个子较高的同学”都不能构成集合;②互异性:集

合中的任何两个元素都是不同的对象,即在同一集合里不能重复出现同一个元素,如方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解不能写成 $\{2,1,1\}$,应写成 $\{2,1\}$;③无序性:在同一集合中,通常不考虑元素之间的顺序,如集合 $\{a,b,c\}$ 与集合 $\{b,c,a\}$ 是相同的集合.

(2)集合的表示方法

在集合的表示方法上,有列举法和特征性质描述法,应在正确表示的基础上牢固把握这两种表示方法的模式,深入理解问题的本质,根据具体问题选用合理简洁的表示方法.此外,还要会用 Venn 图的方法直观形象地表示集合.

在集合的表示方法中,对元素公共属性的准确理解是关键,如 $\{y|y=x^2\}$ 表示函数 $y=x^2$ 取值的全体; $\{x|y=x^2\}$ 则表示函数 $y=x^2$ 自变量 x 取值的全体; $\{(x,y)|y=x^2\}$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上点的全体,即整条抛物线; $\{x|x^2-2x=0\}$ 表示方程 $x^2-2x=0$ 的解的集合; $\{x|x-2>0\}$ 表示不等式 $x-2>0$ 的解集;等等.只有准确把握代表元素的意义及其公共属性才能化简集合,从而将集合语言转化为文字语言、图形语言.

(3)从数、形两个角度来理解集合

习惯上借助数轴来表示数的集合,借用平面直角坐标系来表示有序实数对的集合,从而实现数与形的结合,有助于我们分析和解决数学问题.

【案例精讲】

【例 1】下列各组对象中不能构成集合的是().

- A. 高一(1)班全体女生
- B. 高一(1)班全体学生家长
- C. 高一(1)班开设的所有课程
- D. 高一(1)班身高较高的男同学

【精讲】集合是一组对象的全体,因此判断一组对象能否构成集合,关键是看这组对象是否符合集合中元素的三个特性.

解:因为 A、B、C 所给对象都是确定的,从而可以构成集合,而 D 中所给对象不确定,原因是找不到衡量学生身高较高的标准,故不能构成集合,因此答案为 D.

【点评】判断一组对象能否构成集合的关键是看其是否符合集合中元素的三个特性,即看其是否符合确定性、互异性、无序性.

【例 2】用列举法表示下列集合:

- (1) $\{x|(x-1)^2(x-2)=0\}$;
- (2) 自然数中五个最小的完全平方数;
- (3) $\{(x,y)|\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases}\}$.

【精讲】要用列举法准确地写出一个集合,需要求出该集合的所有元素.

解:(1) $\{1,2\}$;(2) $\{0,1,4,9,16\}$;(3) $\{(3,2)\}$.

【点评】解决此类问题的关键是认清代表元素,认清代表元素的属性及范围.

【例 3】由实数构成的集合满足条件:若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

证明:(1)若 $2 \in A$,则集合 A 中必还有另外两个元素;

(2)集合 A 不可能是单元素集;

(3)集合 A 中至少有三个不同的元素.

【精讲】根据集合中元素的属性可解此题.

证明:(1)依题意,若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$. 因为 $2 \in A$, 且 $2 \neq 1$, 所以 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$.

又因为 $-1 \neq 1$, 所以 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$, 如此循环, 故集合 A 还有另外两个元素: $-1, \frac{1}{2}$.

(2)假设集合 A 是单元素集, 则 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$. 但此方程无实根, 因此集合 A 不可能是单元素集.

(3)因为 $a \in A, a \neq 1$, 所以 $\frac{1}{1-a} \in A$. 因为 $\frac{1}{1-a} \neq 1$, 所以 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \in A$. 如此循环, 可

得三个数 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$, 且 $a \neq \frac{1}{1-a} \neq \frac{a-1}{a}$, 所以集合 A 中至少有三个不同的元素.

【点评】解集合题一定要注意集合中元素的互异性.

【三维达标】

一、选择题

1. 集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{(3-t)^2}{t-3}, t \in \mathbf{Z} \right\}$, 若 $x \in M$, 则① $x \in \mathbf{N}$; ② $x \in \mathbf{Q}$; ③ $x \in \mathbf{R}$; ④ $x \in \mathbf{Z}$, 其中正确的个数是().

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 已知 $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\sqrt{2}\}$, $a = \sqrt{17}$, $b = \sqrt{18}$, $c = \sqrt{19}$, 则().

A. $a, b \in M$, 且 $c \notin M$ B. $a, c \in M$, 且 $b \notin M$
C. $b, c \in M$, 且 $a \notin M$ D. $a, b, c \in M$

3. $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$, $0 \in \mathbf{N}_+$, $\sqrt{5} \in \mathbf{Z}$, $0 \in \mathbf{Q}$, $0.7 \in \mathbf{R}$, $3 \in \mathbf{N}$, 其中错误的有().

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

4. 下列各选项中, M 与 N 表示同一集合的是().

A. $M = \{1, -1\}$, $N = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$
B. $M = \{0\}$, $N = \emptyset$
C. $M = \{(1, -1)\}$, $N = \{(-1, 1)\}$
D. $M = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$

二、填空题

5. 被 3 除余 2 的整数集合可表示为_____.

6. 已知三个实数组成的集合既可表示成 $\{x^2, x+y, 0\}$, 也可以表示成 $\left\{x, \frac{y}{x}, 1\right\}$, 则 $x^{2007} + y^{2008}$ 的值为_____.

三、解答题

7. 把下列集合用另一种方法表示出来:

- (1) $\{2, 4, 6, 8\}$;
- (2) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$;
- (3) $\{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$;
- (4) $\{(x, y) \mid x+y=4, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

8. 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, B 表示集合 $\{|a + 3|, 2\}$, 已知 $5 \in A$, 且 $5 \notin B$, 求 a 的值.

【综合跃升】

9. 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数是().

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

10. 把集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}\right\}$ 用列举法表示为_____.

11. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 - 4x + 4 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 则:

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值并求出这个元素;

(2) 若 A 中有两个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若 A 中没有元素, 求 a 的取值范围.

§ 2 集合的基本关系

【专家引领】

1. 注意通过实例理解集合间的包含与相等的概念以及子集与真子集的概念.
2. 能区分“属于”与“包含”, “ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”的差异.
3. 能通过 Venn 图或数轴等直观形式来确定集合间的关系.
4. 本节主要研究集合与集合之间的关系, 学习子集、真子集概念及其相关的性质, 重点是对概念的理解与应用, 难点为上述各概念的区别与联系.

重难点突破:

(1) 两个集合 A 与 B 之间的关系

$$\begin{cases} A \subseteq B & \begin{cases} A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A \\ A \neq B \Rightarrow A \subsetneq B \end{cases} \\ A \not\subseteq B \end{cases}$$

(2) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别

$\in$ 表示的是元素与集合之间的关系, $\subseteq$ 表示的是集合与集合之间的关系.

例: $2 \in \{2, 3, 4\}$, $0 \in \{0\}$, $\{2\} \subseteq \{2, 3, 4\}$, 不能写成 $2 \subseteq \{2, 3, 4\}$, $0 = \{0\}$, $\{2\} \in \{2, 3, 4\}$.

(3) 空集概念的理解

空集中不含有任何元素, 它既不是有限集, 也不是无限集, 不能认为 $\emptyset = \{0\}$, 也不能认为 $\{\emptyset\} = \emptyset$, $\{0\}$ 是由数 0 组成的单元素集, 所以 $0 \in \{0\}$, 但 $0 \notin \emptyset$; 同理, $\{\emptyset\}$ 是由 $\emptyset$ 组成的单元素集, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \not\subseteq \{\emptyset\}$.

(4) 有限集合的子集个数

- ① 含 n 个元素的集合有 2^n 个子集;
- ② 含 n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个真子集;
- ③ 含 n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个非空子集;
- ④ 含 n 个元素的集合有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

【案例精讲】

【例 1】 判断下列说法是否正确, 如果不正确, 请加以改正:

- (1) $\{\emptyset\}$ 表示空集;
- (2) 空集是任何集合的真子集;
- (3) $\{1, 2, 3\}$ 不是 $\{3, 2, 1\}$;
- (4) $\{0, 1\}$ 的所有子集是 $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$;
- (5) 如果 $A \supseteq B$ 且 $A \neq B$, 那么 B 必是 A 的真子集;
- (6) $A \supseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 不能同时成立.

【精讲】 对每个说法按照相关的定义进行解析, 认真与定义中的要素进行对比, 就能判断正误.

(1) $\{\emptyset\}$ 不表示空集, 它表示以空集为元素的集合, 所以 (1) 不正确. 空集有专用的符号“ $\emptyset$ ”, 不能写成 $\{\emptyset\}$, 也不能写成 $\{ \}$.

(2) 不正确. 空集是任何非空集合的真子集, 也就是说空集不能是它自身的真子集. 这是因为空集与空集相等, 而两个相等的集合不能说其中一个是另一个的真子集. 由此可知, 如果一个集合是另一个集合的真子集, 那么这两个集合必不相等.

(3) 不正确. 两个集合是不是相同, 要看其中一个集合的每个元素在另一个集合中是不是都有相同的元素与之对应, 而不必考虑各元素的顺序.

(4) 不正确. 注意到 $\emptyset$ 是任何集合的子集. 所以这个说法不正确.

(5) 正确. $A \supseteq B$ 包括两种情形: $A \supset B$ 和 $A = B$.

(6) 不正确. 当 $A = B$ 时, $A \supseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 能同时成立.

解: (1) 不正确. 应该改为: $\{\emptyset\}$ 表示这个集合的元素是 $\emptyset$.

(2) 不正确. 空集是任何非空集合的真子集.

(3) 不正确. $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 表示同一集合.

(4) 不正确. $\{0, 1\}$ 的所有子集是 $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \emptyset$.

(5) 正确.

(6) 不正确. 当 $A = B$ 时, $A \supseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 能同时成立.

【点评】 对空集、子集、真子集等概念的正确理解和把握是解决此类问题的关键.

【例2】已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, 且 $A \subsetneq M \subseteq B$, 写出满足上述条件的集合 M .

【精讲】要解决这个问题,关键是要搞清楚满足条件 $A \subsetneq M \subseteq B$ 的集合 M 是由哪些元素构成的. $\because A \subsetneq M$, $\therefore M$ 中一定含有 A 的全部元素 $1,2$, 且至少含有一个不属于 A 的元素. 又 $\because M \subseteq B$, $\therefore M$ 中的元素除了含有 B 的元素 $1,2$ 外, 还有元素 $3,4,5$ 中的 1 个、 2 个或 3 个. 故求 M 的问题即可转化为研究集合 $\{3,4,5\}$ 的非空子集的问题, 显然所求集合 M 有 $2^3-1=7$ 个, 按元素的多少把它们一一列举出来即可.

解: 满足条件的集合 M 是 $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$.

【点评】将求 M 的问题转化为研究集合 $\{3,4,5\}$ 非空子集的问题是解决本题的关键.

【例3】设集合 $A=\{x|x^2+4x=0, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值.

【精讲】首先对 $B \subseteq A$ 进行分类讨论, 求出 B ; 然后通过研究 B 中元素所满足的方程的根来求 a .

解: 由 $A=\{x|x^2+4x=0, x \in \mathbf{R}\}$, 得 $A=\{0, -4\}$. 因为 $B \subseteq A$, 于是分类讨论如下:

(1) 当 $B=A$ 时, 有 $B=\{0, -4\}$, 可知 $0, -4$ 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两根, 由根与系数的关系, 得 $\begin{cases} -2(a+1)=-4, \\ a^2-1=0, \end{cases}$ 可解得 $a=1$.

(2) 当 $B \subsetneq A$ 时, 又可分为:

i) $B=\emptyset$ 时, $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$, 解得 $a<-1$.

ii) $B \neq \emptyset$ 时, 若 $B=\{0\}$ 时, $a^2-1=0$, 且 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$, 解得 $a=-1$; 若 $B=\{-4\}$ 时, $16-8(a+1)+a^2-1=0$, 且 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$, 无解.

综合(1)(2)知 $a \leq -1$ 或 $a=1$.

【点评】易漏掉 $B=\emptyset$ 的情况.

【三维达标】

一、选择题

1. 在以下写法: ① $\{2\} \in \{0, 2, 4\}$; ② $\emptyset \subsetneq \{0\}$; ③ $\{0, 1, 2\} \subseteq \{1, 2, 0\}$; ④ $0 \in \emptyset$; ⑤ $1 \in \{1, 2\}$. 其中正确的有().

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 已知集合 $M=\{y|y=x^2-2x-1, x \in \mathbf{R}\}$, $P=\{x|-2 \leq x \leq 4\}$, 则 M 与 P 之间的关系为().

A. $M=P$ B. $M \subsetneq P$ C. $P \subsetneq M$ D. $P \not\subseteq M$

3. 满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 有().

A. 8 个 B. 7 个 C. 4 个 D. 3 个

4. 集合 $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A 是 S 的一个子集. 当 $x \in A$ 时, 若有 $x-1 \in A$, 且 $x+1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 那么 S 中无“孤立元素”的四元子集有().

A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

二、填空题

5. 设集合 $M=\{x|x^2-1=0\}$, $N=\{x|ax-1=0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则 a 的值为_____.

6. 设 $A=\{x|0 < x < 1\}$, $B=\{x|x > a\}$, 若 $A \subsetneq B$, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

7. 已知 $A \subseteq B, A \subseteq C, B = \{1, 2, 3, 5\}, C = \{0, 2, 4, 8\}$, 求 A .

8. 已知 $A = \{x | 3x - 2 < 2x + 1\}, B = \{x | x - a < 0\}$.

(1) 若 $B \subseteq A$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围.

【综合跃升】

9. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}, N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 则().

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. 以上都不对

10. 已知集合 $A \subseteq \{1, 2, 3\}$, 且 A 中至少含有一个奇数, 则这样的集合 A 有().

A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

11. 已知 $A = \{x \mid |x - a| = 4\}, B = \{1, 2, b\}$.

(1) 是否存在实数 a , 使得对于任意实数 b 都有 $A \subseteq B$? 若存在, 求出对应的 a 的值; 若不存在, 说明理由;

(2) 若 $A \subseteq B$ 成立, 求出对应的实数对 (a, b) .

§3 集合的基本运算

3.1 交集与并集

【专家引领】

1. 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.
2. 注意通过具体例子和 Venn 图直观理解交集、并集的概念.
3. 注意把握概念中的关键词,如“所有”“且”“或”等.
4. 本节的重点是对交集、并集概念的理解,难点是交集、并集的区别与联系以及求两个集合的交集、并集,突破重点、难点的关键是正确利用 Venn 图.

重难点突破:

(1) 交集与并集概念的理解

“ $A \cap B$ ”包含两层含义:一层含义是凡是 $A \cap B$ 中的元素都是集合 A, B 的公共元素;另一层含义是 A 与 B 中的所有公共元素,都在 $A \cap B$ 中.

“ $A \cup B$ ”,指的是 $x \in A$ 或 $x \in B$,这里的“或”有三层含义:① $x \in A$,但 $x \notin B$;② $x \in B$,但 $x \notin A$;③ $x \in A$,且 $x \in B$.

(2) 交集与并集的性质

- ① $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$;
- ② $(A \cup B) \supseteq A, (A \cup B) \supseteq B$;
- ③ $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$;
- ④ $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$;
- ⑤ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$;
- ⑥ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- ⑦ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

【案例精讲】

- 【例 1】**(1) 设 $A = \{x | x \geq -2\}, B = \{x | x \leq 3\}$, 求 $A \cap B$;
- (2) 设 $A = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}, B = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}$, 求 $A \cap B$;
- (3) 设 $A = \{4, 5, 6, 8\}, B = \{3, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cup B$.

【精讲】用 Venn 图可直观求解,同时注意集合中的元素没有重复现象,在求并集时,两个集合的公共部分只能出现一次,不允许重复.

解:(1) 由图 1-1 可得 $A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$.

(2) 由图 1-2 可得阴影部分表示 $A \cap B = \{x | x \text{ 是等腰直角三角形}\}$.

(3) 由图 1-3 可得 $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

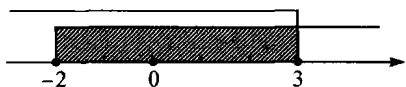


图 1-1

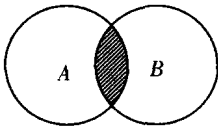


图 1-2

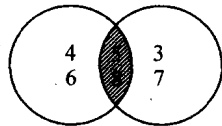


图 1-3

【点评】利用数轴和 Venn 图求交集、并集的方法应熟练掌握.

【例 2】设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}, B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$. 若 $A \cup B = B$, 求 a 的值.

【精讲】注意运用分类讨论的思想.

解: $A = \{x | x^2 + 4x = 0\} = \{-4, 0\}$.

因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$. 又 $A = \{-4, 0\}$, 而 B 中至多有两个元素, 因此, $A = B$, 比较系数可知 $a = 1$.

【点评】 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$ 是常用的两个结论, 应牢记在心.

【三维达标】

一、选择题

1. (2008, 海南、宁夏)(文) 已知集合 $M = \{x | (x+2)(x-1) < 0\}$, $N = \{x | x+1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ().

A. $\{x | -1 < x < 1\}$

B. $\{x | -2 < x < 1\}$

C. $\{x | -2 < x < -1\}$

D. $\{x | 1 < x < 2\}$

2. 已知 $A = \{1, 2, a^2 - 3a - 1\}$, $B = \{-1, 3\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则 a 的值为 ().

A. -4 或 1

B. -1 或 4

C. -1

D. 4

3. 设 $A = \{x | 2x^2 - px + q = 0\}$, $B = \{x | 6x^2 + (p+2)x + 5 + q = 0\}$, 若 $A \cap B = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\left\{-4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

B. $\left\{\frac{1}{2}, -4\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

D. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4. 设 $A = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}_+\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbf{N}_+\}$, 则 ().

A. $A = B$

B. $A \supsetneq B$

C. $A \subsetneq B$

D. $A \cap B = \emptyset$

二、填空题

5. 设 $A = \{\text{平行四边形}\}$, $B = \{\text{矩形}\}$, $C = \{\text{梯形}\}$, 则 $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____; $A \cap C =$ _____; $A \cup C =$ _____.

6. 某班有 50 名学生报名参加两项比赛, 参加 A 项的有 30 人, 参加 B 项的有 33 人, 则只参加 A 项没有参加 B 项的学生有 _____ 人.

三、解答题

7. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 分别求适合下列条件的 a 值:

(1) $9 \in A \cap B$;

(2) $\{9\} = A \cap B$.

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求 a 的值.

【综合跃升】

9. (2008, 广东)(文)第二十九届夏季奥林匹克运动会将于 2008 年 8 月 8 日在北京举行, 若集合 $A = \{\text{参加北京奥运会比赛的运动员}\}$, 集合 $B = \{\text{参加北京奥运会比赛的男运动员}\}$, 集合 $C = \{\text{参加北京奥运会比赛的女运动员}\}$, 则下列关系正确的是().

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq C$ C. $A \cap B = C$ D. $B \cup C = A$

10. (2008, 福建)(理)设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in \mathbf{R}$ 都有 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域; 数集 $F = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ 也是数域. 有下列命题: ① 整数集是数域; ② 若有理数集 $\mathbf{Q} \subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ③ 数域必为无限集; ④ 存在无穷多个数域. 其中正确的命题序号是_____. (把你认为正确的命题序号填上)

11. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$. 当 a 取何实数时, $A \cap B \neq \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 能同时成立?

3.2 全集与补集

【专家引领】

1. 在具体情境中, 了解全集的含义, 理解在给定集合中一个子集的补集的含义, 会求给定子集的补集.

2. 注意利用图形的直观性理解补集的概念; 了解求某一集合的补集前必须明确全集.

3. 借助图形理解: $\complement_U U = \emptyset$, $\complement_U \emptyset = U$.

4. 会运用 $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 解题.

5. 本节的重点是补集的概念和求一个集合的补集, 难点是对补集、全集概念的理解及运用, 关键是利用 Venn 图的直观性.

重难点突破:

全集和补集的相对性.

补集既是集合之间的一种关系, 又是集合的一种运算, 利用定义可直接求出已知集合的补集. 从全集 U 中去掉属于集合 A 的元素后, 由所有剩下的元素组成的集合是 U 中子集 A 的补集.

对于求一个给定集合补集的问题, 一定要注意它是在哪一个全集内求补集, 也就是说同一集合在不同全集中的补集是不相同的.

【案例精讲】

【例 1】 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 且 $A \subseteq U, B \subseteq U, A \cap B = \{2\}, (\complement_U A) \cap B = \{4\}, (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1,5\}$, 则下列结论中正确的是().

A. $3 \in A, 3 \in B$

B. $3 \in (\complement_U A), 3 \in B$

C. $3 \in A, 3 \in (\complement_U B)$

D. $3 \in (\complement_U A), 3 \in (\complement_U B)$

【精讲】 注意补集概念的运用和 Venn 图的灵活使用.

解: 方法一: 由选项 A 知, $3 \in A \cap B$, 与题设 $A \cap B = \{2\}$ 矛盾; 由选项 B 应有 $3 \in (\complement_U A) \cap B$, 与题设 $(\complement_U A) \cap B = \{4\}$ 矛盾; 由选项 D 应有 $3 \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, 与题设 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1,5\}$ 矛盾. 故选 C.

方法二: 由图 1-4 易知, $3 \in A, 3 \in (\complement_U B)$. 故选 C.

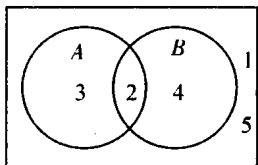


图 1-4

【点评】 Venn 图是解决此类问题的有力工具.

【例 2】 设全集 $U=\mathbf{R}, A=\{x|x>1\}, B=\{x|x+a<0\}, B \subseteq \complement_U A$, 求实数 a 的取值范围.

【精讲】 可借助数轴的直观性解决数集的问题.

解: 因为 $A=\{x|x>1\}$, 用数轴表示 A 如图 1-5, 所以 $\complement_U A=\{x|x \leq 1\}$. 又 $B=\{x|x<-a\}$, 故要使 $B \subseteq \complement_U A$, 需 $-a \leq 1$, 即 $a \geq -1$.

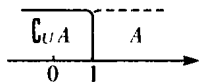


图 1-5

【点评】 应习惯使用数轴解决此类问题.

【例 3】 设全集 $U=\mathbf{R}, A=\{x|x^2+px+12=0\}, B=\{x|x^2-5x+q=0\}$, 若 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}, A \cap (\complement_U B) = \{4\}$, 求 $A \cup B$.

【精讲】 注意集合基本运算的应用和集合之间的关系.

解: 因为 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$, 所以 $2 \in B, 2 \notin A$.

因为 $A \cap (\complement_U B) = \{4\}$, 所以 $4 \in A, 4 \notin B$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 4^2 + 4p + 12 = 0, \\ 2^2 - 10 + q = 0. \end{cases}$$

解得 $p = -7, q = 6$.

所以 $A = \{3, 4\}, B = \{2, 3\}, A \cup B = \{2, 3, 4\}$.

【点评】 本题综合考查了交集、并集、补集的知识.

【三维达标】

一、选择题

1. (2008, 辽宁)(理) 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0\right\}, N = \{x|x \leq -3\}$, 则集合 $\{x|x \geq 1\} = ()$.

A. $M \cap N$

B. $M \cup N$

C. $\complement_M(M \cap N)$

D. $\complement_M(M \cup N)$

2. 设全集 $I=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x \geq -2\}$, 集合 $B=\{x|x < 3\}$, 则 $(\complement_I A) \cap B = ()$.

A. $\{x|-2 \leq x < 3\}$

B. $\{x|x \leq -2\}$

C. $\{x|x < 3\}$

D. $\{x|x < -2\}$

3. 定义 $A-B = \{x|x \in A, \text{且 } x \notin B\}$. 若 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A-B = ()$.

A. A

B. B

C. $\{2\}$

D. $\{1, 7, 9\}$