“全国优秀博士学位论文”

半线性分布参数系统的精确能控性

Exact Controllability of Semi-linear Distributed Parameter Systems

张 旭 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

半线性分布参数系统的精确能控性

Exact Controllability of Semi-linear Distributed Parameter Systems

张 旭 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书讨论半线性分布参数系统的精确能控性问题以及一些相关的问题，如半线性分布参数系统的能观性问题，线性系统的唯一延拓性质问题等。全书共分三章。在第一章，用抽象分析的方法得出：半线性系统的线性化系统的对偶系统的能观性在一定条件下蕴涵原半线性系统的精确能控性。在第二章，主要讨论高维半线性波方程的精确能控性。在第三章，主要讨论高维半线性板方程的精确能控性。后两章的方法是首先给出主型微分算子的一个恰当的逐点估计，然后用 Carleman 型估计结合通常的能量估计方法直接得到所需的能观性不等式。

图书在版编目（CIP）数据

半线性分布参数系统的精确能控性 / 张旭著. —北京：高等教育出版社，2004.1
ISBN 7-04-012953-1

Ⅰ.半... Ⅱ.张... Ⅲ.分布参数系统—可控性—研究 Ⅳ.0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 109860 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004年1月第1版
印　　张	4.75	印　　次	2004年1月第1次印刷
字　　数	110 000	定　　价	10.60元
插　　页	1		

作者介绍

张　旭　男，四川大学教授。1968年11月出生于四川省平昌县。1985年9月入四川大学数学系，1989年7月毕业并获应用数学学士学位。1989年7月至1993年9月在四川省达县师范专科学校任教。1993年9月考入复旦大学数学研究所作研究生，导师为雍炯敏教授，并同时得到李训经教授的指导，硕博连读，于1999年1月获运筹学与控制论专业博士学位。1998年12月至2000年5月在四川大学数学学院博士后流动站工作，出站后留四川大学任教至今，其间于2000年7月至2001年8月在西班牙Complutense大学作博士后，于2001年9月至11月在法国CNRS访问。作者已完成20余篇文章，大都发表在国际核心期刊上。文章已被国际同行引用20余次。目前，作者主持一项国家自然科学基金及一个来自西班牙科技部的Ramony Cajal项目。作者的主要科研成果有两项：一是博士学位论文中提出的能观性估计的直接方法，该工作在2000年中国控制会议（香港）上报告后获中国自动化学会第六届关肇直奖；二是（与E.Zuazua合作）发现一类偏微分方程的柯西问题具有奇异现象，即其解惟一与否依赖于其低阶项的系数，即使所有的系数都解析亦如此。

导师简介

雍炯敏　复旦大学教授，博士生导师，现任复旦大学数学系主任，复旦大学数学研究所所长。1982年在复旦大学获理学学士学位，1986年在美国Purdue大学获Ph.D.学位，1991年起为复旦大学教授，1993年起为博士生导师。目前，他是美国“SIAM Journal on Control and Optimization”，“Applied Mathematics and Stochastic Analysis”的Associate Editor，国内《数学学报》、《应用数学学报》等6家杂志的编委。他主要从事微分对策理论、无限维系统最优控制理论、数学金融学等方面的研究。迄今，在国内外学术杂志上发表论文80余篇，出版专著4本。他曾获得1992年“霍英东基金”，1994年“国家教委跨世纪人才基金”和1997年“国家杰出青年基金”。他还曾获得“上海高校优秀青年教师”称号（1991年）、“中国青年科技奖”（1992年）、“有突出贡献的中青年专家”称号（1992年），“全国优秀教师”称号（1995年）、“上海市自然科学牡丹奖”（1996年）、美国李氏基金会“杰出成就奖”（1997/1998年度）、“上海市科技进步一等奖”（1999年）、香港求是基金会“杰出青年学者奖”（2000年）、“上海市科技精英”（2001年）。

策划编辑　李　蕊
责任编辑　郭思旭
封面设计　张　楠
责任印制　宋克学

前 言

能控性理论是 R. E. Kalman 于上世纪 60 年代初首先针对有限维线性系统提出的。它与能观性理论和反馈镇定理论一起构成了线性控制系统的结构理论的基本内容。这一理论很快被推广到非线性系统，分布参数系统，甚至随机系统的情形。只是这些推广的理论还远不如 Kalman 原来的理论来得漂亮。

分布参数系统的能控性理论始于上世纪 60 年代 Yu. V. Egorov, H. O. Fattorini 和 D. L. Russell 等人的工作。1978 年，Russell 的综述文章 [R2] 概述了该领域当时的主要工作。 1988 年， J. L. Lions 出版了专著 [L2]，这是该领域最重要的文献。他所倡导的 Hilbert 空间唯一性方法极大地刺激了能控性理论的发展并吸引了众多学者投入其中的研究。在 Lions 之后，重要的进展包括 C. Bardos, J. M. Coron, O. Yu. Imanuvilov, I. Lasiecka, G. Lebeau, D. Tataru, R. Triggiani, E. Zuazua 等人的工作。

作者在其博士论文 [Za1] 中发展了一套系统的处理线性及半线性分布参数系统的精确能控性理论的方法。我们的方法避开了传统的紧性唯一性推理的框架。我们的方法是基于对偶方法 (即将问题转化为某种能观性估计) 和整体 Carleman 型估计。其特色是可以给出显式的能观性估计。

本书是以 [Za1] 为蓝本写成的。但除开第一章外，本书与 [Za1] 有很大的不同。对第二章，联系到作者的后续工作，作了较大的改写。 [Za1] 的第三章是关于线性 Maxwell 方程的精确能控性 (亦见 [Za3])，似乎不十分靠近本书的主题，在本书中我们将它换成半线性板方程的精确能控性。

本书的目的是以尽可能短的篇幅讲述作者本人在能控性理论方面的主要工作。作者与他人合作的工作大都没有写进本书，否则将大大增加本书的篇幅。在书中，罗列了大量的未解决问题。相信这对有兴趣的读者迅速进入前沿领域开展工作是有益的。

作者深深地感谢其导师雍炯敏教授。作者亦特别怀念已故的李训经教授。作者在复旦求学时，实际上同时得到两位恩师的指导。多年来，他们给予作者许多无价的帮助。

作者还要感谢 E. Fernández-Cara 教授，郭宝珠教授，I. Lasiecka 教授，刘康生教授，潘立平博士， K. D. Phung 博士，饶伯鹏教授， R. Triggiani 教授，汪更生教授， M. Yamamoto 教授，姚鹏飞教授， E. Zuazua 教授等 (以其姓氏英文字母为序) 。与他们的合作或讨论使作者受益颇多。

作者也要感谢其家人多年来的关心与支持。

本书受国家自然科学基金 (批准号： 19901024), 全国优秀博士学位论文作者专项资金资助项目 (项目编号： 200119) 和西班牙科学技术部基金 (批准号： BFM2002-03345 (MCYT)) 及西班牙科学技术部 “Ramón y Cajal” 项目的部分资助。在此一并致谢。

张 旭

2002 年 8 月于四川大学数学学院

目 录

绪 论

在本书中，我们将主要研究半线性发展型分布参数系统的精确能控性。我们也将讨论一些与之相关的问题，如半线性分布参数系统的能观性问题，线性系统的唯一延拓性质问题等。

我们考虑下面的受控系统

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x_t(t) = \mathcal{A}x(t) + f(x(t)) + \mathcal{B}u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

其中 $x(t)$ 是系统的 *状态*, 它取值于某个 Hilbert 空间 X, $x_t = \frac{dx}{dt}$; $\mathcal{A}$ 是 X 上某 C_0 半群 $e^{\mathcal{A}t}$ 的生成元； $f(\cdot)$ 是 X 上的一个非线性算子； $u(t)$ 表示 *控制*, 它取值于另一个 Hilbert 空间 U; $\mathcal{B}$ 是从 U 到 X 的一个映射。于是， X 和 U 分别是系统 (S) 的 *状态空间* 和 *控制空间* 。

粗略的说，精确能控性问题可以叙述如下：对系统 (S), 给定起点 $x_0 \in X$ 及目标 $x_1 \in X$, 问能否找到时间区间 $(0,T)$ 和控制 $u(\cdot)$ 使得系统 (S) 的轨线 $x(\cdot)$ 在时刻 T 击中 x_1, 即满足 $x(T) = x_1$ 。如将要求 $x(T) = x_1$ 放宽，则可给出各种各样的能控性概念 (如近似能控性等) 。换句话说，我们的问题是，我们期望所考察的系统的行为能完全或至少近似地按我们的要求变化。上述问题在科学技术及工程实践甚至我们的日常生活中处处可见。例如，我们希望系统的温度 (或压强) 等于或接近于给定值；机器人中可变结构的控制；航天器的设计与控制等等。其实，每一个正常的人每天所做的每一件事，都自觉或不自觉地运用了上述能控性概念。

历史上，有限维线性系统的能控性概念是 Kalman ([Kal]) 于上世纪 60 年代初提出的。其后，许多学者致力于这一概念的推广，比

如推广到无限维情形及非线性情形 (见: [DM], [F1], [L1], [L2], [M], [R2], [Su] 及其所引文献) 。本书中，我们将只研究无限维系统，即 X 为无限维空间的情形。而且我们将仅仅讨论精确能控性问题。

如果 $f(\cdot) \equiv 0$, 系统 (S) 是线性时不变系统。对这类系统的精确能控性问题已有大量的研究工作 (见: [BLR], [CP], [FeZ], [FI], [Ko], [La2], [LY], [L1], [L2], [Li], [R2], [T1], [Y] 及其所引文献) 。据作者所知，线性分布参数系统的能控性理论始于上世纪 60 年代 Egorov([E]), Fattorini ([F3]) 和 Russell([R1]) 等人的工作。 1978 年， Russell 在其综述文章 [R2] 中概括了该领域当时所能见到的主要工作。在这篇经典文献中， Russell 描述了研究能控性问题的诸多工具和方法，比如乘子方法，矩量方法，非调和傅里叶级数等等。[R2] 中引入的最重要的一个思想即是“由能稳推能控”。1988 年， Lions([L1]) 引入所谓的 Hilbert 空间唯一性方法(简称 *HUM*方法, 其实质即 对偶方法), 该方法已成为目前该领域熟知的工具。在这篇著名的文章中， Lions 把精确能控性约化到相应系统的唯一性。这一方法引起了诸多关注及兴趣 ((见： [Ko], [La2], [L2], [Zu5] 及其所引文献) 。 Komornik ([Ko]) 和 Lions ([L2]) 等人的专著，及 Zuazua 的综述文章 [Zu5] 展示了运用 HUM 方法在该领域所得的主要结果。上述工作主要考虑的是常系数线性系统。关于变系数线性系统的精确能控性，也有一些文献 (见： [BLR], [FI], [Ki1], [LT4], [T1], [T2], [Y] 等) 。在过去的几年里，为解决能控性问题，人们使用了一些深刻的工具和方法。其一是基于拟微分算子和微局部分析 (见： [BLR], [T2]) 。其二是基于 Carleman 型不等式 (见： [FI], [LT4], [T1], [T2]) 。我们注意到这些方法或者对所涉及的系统的系数假定了较高的光滑性，或者需要相应系统的唯一延拓性质等。

关于半线性系统 (S) 的精确能控性，亦可找到一些文献 (见： [Ch], [F2], [He], [M], [S], [Zu2], [Zu3], [Zu4] 及所引文献) 。利用隐函数存在定理， Markus ([M]) 得到某些常微分方程的局部能控性。Chewning ([Ch]) 和 Fattorini ([F2]) 把这一技术加以改造并用于波

方程。证明半线性系统精确能控性的一个基本方法是使用不动点技术。对半线性分布参数系统， Seidman ([S]) 用 Schauder 不动点定理对一类双曲系统证明了，在具次线性增长的半线性扰动下，其能达集的不变性。最近，结合 HUM 方法和 (Leray-)Schauder 不动点定理， Zuazua 得到一系列关于半线性波方程的精确能控性结果 ([Zu2], [Zu3], [Zu4]) 。其它一些有关的结果可以在 [Co1], [Co2], [FI], [FPZ], [Zh] 等中找到。

与线性时不变情形不同，我们注意到线性 时变 系统和 半线性系统的精确能控性尚不令人满意，特别是线性时变双曲系统和半线性双曲型系统等情形。例如，前人的工作仅考虑了半线性双曲型方程的局部精确能控性 ([Lw], [Zu2] 等), 或者，要求控制作用分布在 整个边界上 时，线性时变双曲型方程及半线性双曲型方程的整体精确能控性 ([LT3], [T1], [T2], [Zu3] 等) 。

作者在其博士论文 ([Za1]) 中，建立了一套适合于解决半线性分布参数系统的精确能控性问题的一般方法。它构成了本书第一章的内容。我们的方法受启发于 Lions 的 (关于线性问题的) 对偶方法。事实上，我们的方法可以看作是非线性的对偶方法。我们方法的关键是将半线性系统的精确能控性问题转换成它的线性化系统对偶系统的能观性估计。

由我们的抽象结果，可以清晰地看到半线性系统精确能控性理论的主要问题是如何建立时变线性系统的能观性估计. 在文献中，人们可以发现两种推导此类估计式的重要方法。第一种是 “乘子法 + 紧性和唯一性推理方法 ”(见 [BLR], [Ho], [Ko], [L1], [L2] 和 [Y] 及其所引文献); 第二种方法是 “Carleman 类型估计 + 紧性和唯一性推理方法 ”(见 [FI], [LT4], [T1] 和 [T2]). 这两种方法的共同特点是人们先建立含有低阶项的能观性不等式，然后，利用紧性和唯一性推理将低阶项吸收。因此，除个别特殊情形外，上述两种方法均依赖于某种唯一性，即线性系统的唯一延拓性质 (简称 UCP) 。我们注意到，具体问题所需要的线性系统的 UCP 常常并不是已知

的。当然，有关 UCP 有大量的文献 ([Hö], [T3], [T4] 等等) 。但是，我们知道那些 UCP 结果不能直接用于许多能控性和能观性问题。首先，上面提及的大多数 UCP 结果是局部的，而我们需要的是整体的 UCP 结果。自然的想法是期望将局部的 UCP 拼接成整体的 UCP 。但这需要具体去实现，而且这常常并不是一件容易的事。其次，几乎所有迄今为止的 UCP 的结果都至少需要关于系数的部分解析性。这非常严重地限制了这些结果的适用范围。事实上，当人们处理非线性系统精确能控性问题时，无法期望线性化系统的系数有足够的光滑性。进一步，有些线性系统的 UCP 还完全是未知的。例如，据我们所知，至今还没有关于具有 (长时间) 记忆的或有非局部项的系统的 UCP 结果。另一方面，我们注意到，上述的两种方法无法给出任何能观性不等式中出现的常数的显式估计，因为它们是采用反证法来吸收低阶项的。然而，这些常数的显式估计对有些精确能控性问题是非常关键的。例如，为了研究一维具有超线性增长非线性项的半线性波动方程的精确能控性问题， Zuazua 需要一个关于能观性常数的关键的显式估计 ([Zu4]) 。本书第二章和第三章在研究高维半线性波动方程和板方程精确能控性时就用到了这种显式估计。另一个典型例子是当我们研究精确能控性的奇异摄动问题时 (见作者及其与 Lopez 和 Zuazua 的工作 [LZZ] 和 [Za8]), 我们甚至需要一个更强的能观性常数的显式估计。

在 [Za1] 里，我们发展了一个新的方法，即，用 “Carleman 型估计 + 通常能量估计 ” 方法直接推导期望的能观性不等式。我们的方法可以描述成下述的主要步骤：

(1) 我们对主型微分算子作了一个仔细的逐点估计。这一步的关键是在逐点估计式中，在一个适当的时空乘积空间中的集合上，得到一个具有恰好正负号 (或者至少不那么 “坏 ”) 的受控低阶项。

(2) 对于主型微分算子，我们运用 Carleman 型估计，即一种带权

的能量估计。这一步的目的是在带权的 Hilbert 空间中，使得“能量”可以被含有主算子的项(这也可以包含一些不希望有的低阶项)来控制。由步骤(1)的结果，那些低阶项并不太坏。

(3) 最后，利用原来的方程，通过通常的能量估计，我们能够吸收低阶项，从而得到所期望的能观性不等式。

我们的方法受 Lavrentév, Romanov 和 Shishataskii ([LRS]) 及 Kazami 和 Klibanov ([KK]) 的工作的启发。不过他们的工作是有关不同问题的。我们的方法具有下述优点： 1) 能够给出能观性常数的显式估计； 2) 不需要任何先验的 UCP 。事实上， UCP 反而是我们能观性不等式的一个副产品。我们的方法本质上是基于 整体Carleman 型估计。

全书共分三章。

在第一章，在不同于 Carmichael 和 Quinn ([CQ]), Lasiecka 和 Triggiani ([LT3]), 及 Seidman([S]) 等人所假定的条件下，我们得到了几个关于半线性分布参数系统的精确能控性的抽象结论，即我们用压缩映射原理证明了一阶半线性系统的零局部精确能控性 (此时我们未假定任何紧性)，用 Schauder 不动点定理证明了二阶半线性系统的整体精确能控性及零局部精确能控性 (此时我们仅假定有关的空间的嵌入有一定的紧性，这是许多具体问题所允许的) 。我们的抽象结论表明：半线性系统的线性化系统的对偶系统的能观性在一定条件下蕴涵原半线性系统的精确能控性。而前人只对线性系统给出了相应的结论。

在第二章，我们主要讨论高维半线性波方程的精确边界能控性和内部能控性，且我们仅要求控制分别作用在部分边界上或者在包含部分边界的边界层内。作为比较，对边界能控性问题， Zuazua ([Zu3]) 要求控制作用在整个边界上；对内部能控性问题，他只考虑了一维的情形 ([Zu4]) 。由第一章的抽象结果，我们需要建立其

线性化系统的对偶系统 (即一个具有低阶项的线性波方程，且其低阶项的系数同时依赖于时间变量和空间变量但没有足够的光滑性) 的能观性不等式。本章的主要贡献是利用上述 “Carleman 型估计 + 通常能量估计” 方法直接得到了两个关于带 时变 低阶项的线性波方程的 显式 的能观性估计 (即，边界能观性估计和内部能观性估计)。作为这些能观性估计的应用，我们得到一些关于线性波方程的唯一延拓性质，及关于半线性波方程的精确能控性和能观性，改进或推广 (或部分改进及推广) 了潘立平等人 ([PTZ]), Ruiz ([R]), Tataru ([T3], [T4]) 和 Zuazua ([Zu2], [Zu3], [Zu4]) 等的一些结果。其次，我们在一些从物理学的观点看来合理的条件下，得到半线性波方程的快速精确能控性。此时，为了得到关于线性 时变 波方程的快速能观性估计，我们只用到通常的能量方法。接着，我们研究了当非线性函数在无穷远处超线性增长时高维半线性波方程的精确内部能控性。最后，我们给出了半线性波方程的精确能控性问题的一般提法并罗列了其中的主要未解决问题。

在第三章，我们主要讨论当非线性函数在无穷远处超线性增长时高维半线性板方程的整体精确边界能控性和内部能控性。为此，我们需要一些准备工作。其一是关于 Schrödinger 算子的逐点估计；其二是关于具无界低阶项系数的线性板方程的显式能观性估计。这些准备工作的某些部分本身也有着独立的兴趣。有了这些准备工作，再应用不动点技术，即可得到所需的整体能控性结果。

第一章

半线性分布参数系统的精确能控性：抽象空间中的结果

§1. 引言

在本章，我们考虑如下的定义在某个 Hilbert 空间上的抽象受控发展系统：

$$(1.1)\qquad \begin{cases} x_t(t) = \mathcal{A}x(t) + f(x(t)) + \mathcal{B}u(t), & t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

其中，$x(\cdot)$ 是系统的*状态*，$u(\cdot)$ 是*控制*。许多重要的方程例如半线性热方程，半线性波方程，半线性板方程等，都可以写成系统 (1.1) 的形式 (见：[CP], [LY], [P])。特别地，置 $x = (y, y_t)$，则如下的二阶受控系统可写成 (1.1) 的形式：

$$(1.2)\qquad \begin{cases} y_{tt}(t) + Ay(t) = g(y(t)) + Bu(t), & t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y_t(0) = y_1. \end{cases}$$

(其中，$\mathcal{A}, A, \mathcal{B}$ 和 B 皆是线性算子，$f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 皆是非线性算子，其条件将在第二节及第三节给出)。

本章的目的是研究系统 (1.1)(及其特殊情形 (1.2)) 的*精确能控性*。粗糙地说，我们的问题是，对任意给定的起点 x_0 和目标 x_1，能否找到一个时刻 T 及控制 $u(\cdot)$，使得系统 (1.1) 的轨线 $x(\cdot)$ 在该控制的作用下在时刻 T 击中目标 x_1(严格的定义见第二节)。