

管理应用数学基础

● 张典华 主编

四川科学技术出版社



前 言

《管理应用数学基础》是本教研室为我校干部培训班、理论班的数学教学编写的，经过三个学期六个班次的试教，取得较好的效果，专家们和多数学员认为，本书适合于作各级党校、干部培训院校函授及各类成人不脱产学习的院校的经济和管理等专业的教材和参考书。

本书内容包括最常用的数学原理比和比例、指数、对数等，以及线性规划、概率统计和微积分；力求做到理论联系实际，由浅入深，互相连贯，通俗易懂；尽量满足经济管理干部、各类经济专业人员和有关经济、管理学科教学的需要。

参加本书编写的同志有中共湖北省委党校张典华、哈俊文，中共湖北省孝感地委党校胡崇基，中共第一冶金建设公司党校郑金瑞。最后由张典华、胡崇基同志修改总纂。

在编写和出版过程中，得到中共湖北省孝感地委党校、中共湖北省沙市市委党校的领导同志和不少同行专家的热情支持和帮助，本教研室全体同志都为本书编写和早日出版奔忙，在此谨向他们表示由衷的谢意。

中共湖北省委党校管理学教研室

1986年6月

目 录

第一章 代 数

§ 1—1	“ Σ ”的使用方法	1
§ 1—2	比和比例	7
§ 1—3	指数与对数	18
§ 1—4	整式方程	36
§ 1—5	绝对值	44
§ 1—6	直线的倾角和斜率	45
§ 1—7	数 列	49
§ 1—8	排列与组合	68

习 题

第二章 函 数

§ 2—1	实数的概念	93
§ 2—2	函数的概念	96
§ 2—3	基本初等函数及其图形	105
§ 2—4	复合函数、初等函数	111
§ 2—5	平衡分析	112

习 题

第三章 极限与连续

§ 3—1	极限的概念	118
§ 3—2	极限运算法则及其求法	129
§ 3—3	函数的连续性	135
§ 3—4	应用实例	139

习 题

第四章 导数与微分

§ 4—1	导数概念	145
-------	------	-----

§ 4—2	导数的基本公式和运算法则	153
§ 4—3	高阶导数	161
§ 4—4	微分	162
§ 4—5	导数与“边际”概念	170
§ 4—6	导数与“弹性”概念	177
§ 4—7	二阶导数在管理中的意义	182

习 题

第五章 导数在最优化中的应用

§ 5—1	函数的极值	189
§ 5—2	应用实例	198
§ 5—3	应用求最小值法确定经济批量模型	203
§ 5—4	应用求最大值法确定利润最大的产量模型	207
§ 5—5	应用求最小值法确定“经济订购量”模型	209

习 题

第六章 不定积分

§ 6—1	不定积分的概念	217
§ 6—2	不定积分的性质	219
§ 6—3	不定积分的基本公式和法则	220
§ 6—4	应用实例	234

习 题

第七章 定积分

§ 7—1	定积分的概念	241
§ 7—2	定积分的性质	247
§ 7—3	定积分的计算公式	249
§ 7—4	定积分的计算方法	254
§ 7—5	广义积分	266
§ 7—6	定积分的应用	267

习 题

第八章 多元函数微分法

§ 8—1	多元函数的概念	287
§ 8—2	偏导数	291

§ 8—3	二元函数的极值·····	293
§ 8—4	最小二乘法原理·····	294
§ 8—5	曲线回归分析·····	299

习 题

第九章 概率统计初步

§ 9—1	集合概念·····	309
§ 9—2	随机事件·····	313
§ 9—3	事件的概率·····	321
§ 9—4	概率的性质·····	326
§ 9—5	古典概型概率的计算·····	328
§ 9—6	条件概率、事件的独立性及独立重复试验·····	333
§ 9—7	随机变量及其分布·····	338
§ 9—8	随机变量的期望与方差·····	352
§ 9—9	统计初步·····	381

习 题

第十章 线性代数基础

§ 10—1	行列式·····	376
§ 10—2	矩 阵·····	393
§ 10—3	一般线性方程组·····	427

习 题

第十一章 线性规划

§ 11—1	线性规划问题的数学模型·····	448
§ 11—2	线性规划的图解法·····	454
§ 11—3	线性规划数学模型的标准形式·····	459
§ 11—4	线性规划问题的消元迭代解法·····	461
§ 11—5	单纯形法的计算过程·····	466
§ 11—6	罚金法和两阶段法·····	476
§ 11—7	线性规划的对偶问题·····	482
§ 11—8	影子价格问题·····	496

习 题

第十二章 图论及其应用

§ 12—1	图的基本概念	504
§ 12—2	图的中心及其应用	506
§ 12—3	树的基本概念	507
§ 12—4	最小树问题	509
§ 12—5	最短路径问题	510
§ 12—6	最大流问题	516
§ 12—7	割集与最大流问题	519
§ 12—8	最小费用流问题	521

习 题

第十三章 统筹法

§ 13—1	甘特图表和网络计划	527
§ 13—2	网络图及其组成	528
§ 13—3	网络图的绘制	530
§ 13—4	网络时间参数计算	535
§ 13—5	任务完成期的概率分析	545
§ 13—6	网络图的动态调整	549
§ 13—7	资源安排的优化	554
§ 13—8	成本—工期优化	558

习 题

附表:

表一 常用对数表

表二 反对数表

表三 标准正态分布表

表四 希腊字母读音

表五 反函数及其图象

第一章 代 数

§ 1 - 1 “ Σ ” 的使用方法

一、和式记号 “ Σ ”

在数学计算中，经常需要将大量的数值加总，为了使文字表达简洁，数学运算方便，常采用记号 “ Σ ”（希腊字母）。

例如：设有 n 个数值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，则其总和可用下式表示

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

其中 “ Σ ” 是求和的记号，表示连加的意思。读作希格玛。

记号 “ $\sum_{i=1}^n$ ” 表示在它右边出现的代表项，从 $i=1$ 到 $i=n$ 的 n 项的

和，读作 “希格玛 i 从 1 到 n ”。下面举例说明 “ Σ ” 的用法，

例 1 写出 $\sum_{i=1}^n f_i$ 所代表的和

解： $\sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$

例2 写出 $\sum_{i=1}^n x_i f_i$ 所代表的和

解:
$$\sum_{i=1}^n x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n$$

例3 用 Σ 表示算术平均数 $\bar{x}$

解: 根据算术平均数的定义,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

例4 用 Σ 表示加权算术平均数 $\bar{x}$

解: 根据加权算术平均数的定义,

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

二、“ Σ ”的使用规则

$$1. \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$$

* 注: 在《统计学原理》中, 算术平均数和加权算术平均数, 分别简记为

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \text{ 和 } \bar{x} = \frac{\Sigma x f}{\Sigma f}$$

即代数和的总和等于各总和的代数和。

$$2. \sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$$

即总和号下的常数因子可以提出来

$$\begin{aligned} \text{如 } ax_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_n &= a(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

$$3. \sum_{i=1}^n C = nC$$

$$\text{如 } \underbrace{C + C + C + \cdots + C}_{n \uparrow C} = nC = \sum_{i=1}^n C$$

三、双重“ Σ ”

若 x 有 $m \cdot n$ 个值，则

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} \\ &+ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} \\ &+ \cdots \\ &+ \cdots + x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad (\text{双重总和号可以变换顺序}) \end{aligned}$$

四、“ Σ ”的应用

1. 和式能使表达简洁

例5 全车间有工人100名，每人的日产量分别为： $x_1, x_2,$

$x_8, \dots, x_{100}$, 写出全车间的日产量。

解: 设全车间的日产量为 X , 则

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = \sum_{i=1}^{100} x_i$$

例 6 某工厂有三个车间, 它们各季度的产量分别为 a_{ij} (a 代表产量, $i = 1, 2, 3$, 表示车间, $j = 1, 2, 3, 4$, 表示季度) 写出每个车间的年产量, 每个季度工厂的产量, 工厂的全年产量。

解: a_{ij} 表示第 i 个车间第 j 个季度的产量。如 a_{23} 表示第 2 个车间第 3 个季度的产量

第一车间全年产量:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = \sum_{j=1}^4 a_{1j}$$

第二车间全年产量:

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = \sum_{j=1}^4 a_{2j}$$

第三车间全年产量:

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = \sum_{j=1}^4 a_{3j}$$

第一季度全厂产量:

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = \sum_{i=1}^3 a_{i1}$$

第二季度全厂产量:

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} = \sum_{i=1}^3 a_{i2}$$

第三季度全厂产量:

$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = \sum_{i=1}^3 a_{i3}$$

第四季度全厂产量:

$$a_{14} + a_{24} + a_{34} = \sum_{i=1}^3 a_{i4}$$

全厂全年产量为车间之和:

$$\sum_{i=1}^4 a_{1i} + \sum_{i=1}^4 a_{2i} + \sum_{i=1}^4 a_{3i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij}$$

或为季度之和:

$$\sum_{i=1}^3 a_{i1} + \sum_{i=1}^3 a_{i2} + \sum_{i=1}^3 a_{i3} + \sum_{i=1}^3 a_{i4} = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 a_{ij}$$

表示如表 1-1。

表 1-1

季度 (j)	车间 (i)			
	1	2	3	合 计
1	a_{11}	a_{21}	a_{31}	$\sum_{i=1}^3 a_{i1}$
2	a_{12}	a_{22}	a_{32}	$\sum_{i=1}^3 a_{i2}$
3	a_{13}	a_{23}	a_{33}	$\sum_{i=1}^3 a_{i3}$
4	a_{14}	a_{24}	a_{34}	$\sum_{i=1}^3 a_{i4}$
合计	$\sum_{j=1}^4 a_{1j}$	$\sum_{j=1}^4 a_{2j}$	$\sum_{j=1}^4 a_{3j}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij}$

2. 和式能使运算简捷

例7 有产品一批，堆成正棱台形，最高层为 31×31 只，第二层为 32×32 只……最底层为 39×39 只，求这堆产品的总只数。

解：设总只数为 N ，则

$$\begin{aligned} N &= 31^2 + 32^2 + 33^2 + \cdots + 39^2 \\ &= (30+1)^2 + (30+2)^2 + (30+3)^2 + \cdots + (30+9)^2 \\ &= \sum_{i=1}^9 (30+i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^9 (30^2 + 60i + i^2) \\ &= \sum_{i=1}^9 30^2 + 60 \sum_{i=1}^9 i + \sum_{i=1}^9 i^2 \\ &= 9 \times 30^2 + 60 \times 45 + 285 \\ &= 11085 \end{aligned}$$

上面引用了两个公式：

第一个公式 $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\therefore \sum_{i=1}^9 i = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 = 45$$

第二个公式 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\therefore \sum_{i=1}^9 i^2 = \frac{1}{6} \times 9 \times 10 \times 19$$

$$= 285$$

§ 1-2 比 和 比 例

一、比

1. 比的定义

设有两个量 a 和 b ，如果要比较它们的相对倍数，需要作除法“ $a \div b$ ”，则式“ $a \div b$ ”叫做 a 对 b 的比，简称 a 比 b ，记作

$$a:b, \quad \text{或} \quad \frac{a}{b}$$

由定义知， $a \div b = a:b = \frac{a}{b}$ ，它们的形式和名称不同，其数学意义是一样的。

在比式 $a:b$ 中， a 叫比的前项， b 叫比的后项， a 是被比数， b 是比较的标准，又称为基数。它们的商数叫做比值。

2. 比的性质

由分数运算可得比有如下性质：

(1) 比的前项与后项同乘以（或除以）一个不为零的相等数，其比值相等，即

$$a:b = Ka:Kb = \frac{a}{K} : \frac{b}{K}$$

K ——不等于零的实数。

(2) 一个比与它的倒数（反比）之积等于1，即

$$(a:b) \times (b:a) = 1 \quad \text{或}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

(3) n 个循环比之积等于第 n 个固定比，即

$$\frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0}$$

3. 比率

比率就是比值的数字表示形式。它可以用分数、小数表示，也可以用百分数、千分数等形式表示。

例如：基数化为1，叫倍数。

基数化为100，叫百分数、百分比或百分率。

基数化为1000，叫千分数、千分比或千分率。

……等等。

必须注意的是，比率的分母大小要适当，如果被比数远大于基数，宜于用倍数表示。比率的有效数位的多少也要适当，有效数位过多，则数字冗长，不简洁，使人印象模糊；有效数位过少，则准确性不够，使人印象过粗。两个较小的数不宜作百分率，如有两台机床，其中一台损坏，如作比时百分率有50%，容易使人有错觉，认为有不少机床损坏。

4. 应用

例1 在财经管理中的几种比率

$$(1) \text{销售成本率} = \frac{\text{销售成本额}}{\text{销售收入额}}$$

$$\text{毛利率} = \frac{\text{毛利额}}{\text{销售额}}$$

$$\because \text{成本额} + \text{毛利额} = \text{销售额}$$

$$\therefore \text{成本率} + \text{毛利率} = 1$$

$$(2) \text{产品利润率} = \frac{\text{利润额}}{\text{总产值}}$$

$$\text{销售利润额} = \frac{\text{利润额}}{\text{销售额}}$$

$$\text{全部资金利润率} = \frac{\text{利润额}}{\text{平均全部资金}}$$

$$(3) \quad \text{商品流通费用率} = \frac{\text{费用额}}{\text{销售额}}$$

∴ 费用额 + 利润额 = 毛利额 (不计税金及其它收支)

∴ 费用率 + 销售利润率 = 毛利率

$$(4) \quad \text{流动资金率} = \frac{\text{平均流动资金}}{\text{平均全部资金}}$$

$$\text{固定资金率} = \frac{\text{平均固定资金}}{\text{平均全部资金}}$$

∴ 平均流动资金 + 平均固定资金 = 平均全部资金

∴ 流动资金率 + 固定资金率 = 1

$$(5) \quad \text{固定资产动用率} = \frac{\text{动用固定资产}}{\text{全部固定资产}} (\text{原值} \cdot)$$

$$\text{固定资产闲置率} = \frac{\text{闲置固定资产}}{\text{全部固定资产}} (\text{原值})$$

∴ 动用固定资产 + 闲置固定资产 = 全部固定资产

∴ 固定资产动用率 + 固定资产闲置率 = 1

$$(6) \quad \text{产品合格率} = \frac{\text{合格产品数}}{\text{全部产品数}}$$

$$\text{产品不合格率} = \frac{\text{不合格产品数}}{\text{全部产品数}}$$

∴ 合格产品数 + 不合格产品数 = 全部产品数

∴ 产品合格率 + 产品不合格率 = 1

$$(7) \quad \text{产品外销率} = \frac{\text{外销产品}}{\text{销售产品}}$$

$$\text{产品内销率} = \frac{\text{内销产品}}{\text{销售产品}}$$

∴ 外销产品 + 内销产品 = 销售产品

∴ 产品外销率 + 产品内销率 = 1

• 固定资产在会计帐面上有原值和净值之别。

$$(8) \quad \text{流动资金周转率 (次数)}^{**} = \frac{\text{销售额}}{\text{平均流动资金}}$$

$$\text{资金利润率} = \frac{\text{利润额}}{\text{平均流动资金}}$$

$$\text{资金占用率} = \frac{\text{平均流动资金}}{\text{销售额}}$$

$$\text{资金利润率} \times \text{资金占用率} = \text{销售利润率}$$

$$\text{流动资金周转率} \times \text{销售利润率} = \text{资金利润率}$$

$$\text{流动资金周转率} \times \text{资金占用率} = 1$$

$$\text{流动资金周转天数} = \frac{\text{平均流动资金}}{\text{平均每天销售额}}$$

$$\text{流动资金周转天数} \times \text{流动资金周转次数} = \text{报告期天数}$$

$$(9) \quad \text{某项流动资产周转次数} = \frac{\text{该资产本期消耗金额}}{\text{该资产本期平均每天余额}}$$

$$\text{周转次数} \times \text{周转天数} = \text{报告期天数}$$

$$(10) \quad \text{仓库面积利用率} = \frac{\text{可堆货面积}}{\text{仓库实际面积}}$$

$$\text{仓库面积使用率} = \frac{\text{实际堆货面积}}{\text{可堆货面积}}$$

$$\text{仓库空仓率} = \frac{\text{未堆货面积}}{\text{可堆货面积}}$$

$$\therefore \text{实际堆货面积} + \text{未堆货面积} = \text{可堆货面积}$$

$$\therefore \text{仓库面积使用率} + \text{仓库空仓率} = 1$$

例 2 某商店某月销售额 423,749.65 元, 销售成本 361,423.47 元, 产品流通过费用为 20,198.32 元, 试求各项比率 (不计税金)。

** 资金的周转, 有两种表示形式, 即周转次数与周转天数。

解：求各项比率就是成本率、毛利率、费用率、营业利润率等。

$$\text{成本率} = \frac{\text{销售成本额}}{\text{销售收入额}} = \frac{361,423.47}{423,749.65} = 85.29\%$$

$$\begin{aligned}\text{毛利率} &= 1 - \text{成本率} \\ &= 1 - 85.29\% \\ &= 14.71\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{费用率} &= \frac{\text{费用额}}{\text{销售额}} = \frac{20,198.82}{423,749.65} \\ &= 4.77\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{利润率} &= \frac{\text{利润额}}{\text{销售额}} = \frac{\text{毛利额} - \text{费用额}}{\text{销售额}} \\ &= \text{毛利率} - \text{费用率} = 14.71\% - 4.77\% = 9.94\%\end{aligned}$$

例3 某商店全年销售额320万元，平均流动资金40万元，利润额6万元，求各项比率。

解：各项比率是指流动资金周转率的次数和天数，销售利润率，流动资金利润率和流动资金占用率等。

$$\begin{aligned}\text{流动资金周转次数} &= \frac{\text{销售额}}{\text{平均流动资金}} \\ &= \frac{320}{40} = 8 \text{ (次)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{流动资金周转天数} &= \frac{\text{平均流动资金}}{\text{平均每天销售额}} \\ &= \frac{40}{320/360} = \frac{40 \times 360}{320} \\ &= 45 \text{ (天)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{销售利润率} &= \frac{\text{利润额}}{\text{销售额}} = \frac{6}{320} \\ &= 1.88\%\end{aligned}$$