华章数学译丛

40

Algebra

代数

（美）Michael Artin 著
麻省理工学院
郭晋云 译

HZ BOOKS
PEARSON Prentice Hall
机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

40

Algebra

代数

(美) Michael Artin 麻省理工学院 著

郭晋云 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是一本代数学的经典著作，既介绍了矩阵运算、群、向量空间、线性变换、对称等较为基本的内容，又介绍了环、模、域、伽罗瓦理论等较为高深的内容，对于提高数学理解能力、增强对代数的兴趣是非常有益处的.

本书是一本有深度、有特点的著作，适合数学工作者以及基础数学、应用数学等专业的学生阅读.

本书版权登记号：图字：01-2005-[illegible]

图书在版编目(CIP)数据

代数/(美)阿廷(Artin, M.)著；郭晋云译．—北京：机械工业出版社，2009.1

(华章数学译丛)

书名原文：Algebra

ISBN 978-7-111-25356-3

Ⅰ．代…　Ⅱ．①阿…　②郭…　Ⅲ．代数　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 161443 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行

2009 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm・30.5 印张

标准书号：ISBN 978-7-111-25356-3

定价：69.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译者序

美国数学学会在2002年授予Michael Artin教授Steele终身成就奖时，在评价中有这样一段话："许多年来他的代数课程是麻省理工学院教育的一个特色，现在全世界都可以通过他的教科书分享其中的一些见解."本书就是这本教科书的中译本.

这是一本很有特色的代数书. 自1965年Serge Lang的《Algebra》以来，本科生和研究生层次的代数教材出了不少，但内容和架构不出Serge Lang书的范围. 这并不是说那些书都不好，而是Serge Lang的代数书确实是一个经典. Serge Lang的书以培养抽象化思维能力为基点，书中的内容大多从纯粹抽象代数的观点出发，结合数论中的一些方法，尽管把抽象代数的内容进行了统一的抽象处理，但并没有把代数同其他数学分支广泛联系起来. Michael Artin所著的这本书脱开了Serge Lang的桎梏. 作为一个代数几何学家(偏向代数的背景)，他在本书中尽力强调代数同其他数学分支的联系，尤其是同拓扑以及代数几何的联系，书中的很多章节都对抽象的概念进行了直观的解释或者给出了形象的例子，使读者能看到一个个用抽象定义的概念背后的图形，并体会到代数在其他分支中的威力和另一种风格的数学美.

对于希望以后攻读代数的学生，这本书能开阔他们的视野. 对于其他分支的学生，这本书中的代数知识是成为一个数学家所必须具备的基础知识.

历时1年译完这本原著近600页的书后，我有两点遗憾，一是我没能在25年之前看到这本书，二是只有1年的时间来进行翻译. 25年前是我上大学的时候，假如那时我读了这本书，应该会有更高的数学品位，对数学特别是对代数及其意义会有一个更为全面和深入的认识，避免一些走过的弯路. 1年的时间实在太短，但愿我粗拙的汉语表达不致影响你对大师数学思想之美的欣赏.

前 言

虽然时新的和孜孜以来追求公理化和一般化的激情，
带给我们的一般概念和命题可能是重要的，
而且这在代数学中也许胜于任何其他领域，
但是我坚信，各种特殊的问题以其极端的复杂性构成数学的基干和核心，
而掌握其难点从整体上需要更刻苦地工作。

Herman Weyl

本书源于大约20年前我的代数课补充讲义．我那时想比教材中更为详细地讨论如对称、线性群和四元数域等具体内容，而将群论的重点由置换群转到矩阵群．格——另一个常见的主题，让它很自然地出现．我的希望是具体的东西会使学生感兴趣且会使抽象更易理解，简言之，他们可同时学习二者而学得更深．这项工作进行得很顺利．我花了很长时间来确定加上些什么，我逐渐写出了更多的讲义而最终仅用讲义而不用其他教材．这种办法形成了一本我认为与已有的书都有所不同的书．然而，当我把材料汇总起来时遇到了不少头疼的事，因而我不推荐以这样的方式开始写书．

本书最突出的特点是加大对特殊主题的强调．每次重写这些章节时，它们都在膨胀．因为多年来我注意到，与抽象概念不同，学生对于具体的数学题材是多多益善．结果，上面提到的这些东西成了本书的主体．另外，书中也有一些不常见的主题，如托德-考克斯特算法和 PSL_2 的单性．

在写本书时，我尽力遵循下面的原则：

1．主要例子应放在抽象定义之前．

2．本书不是作为一本“服务教程”(手册、指南或诸如此类的书)，因此技巧只应在用到的时候提及．

3．所有讨论的主题对于一般的数学工作者而言都应是重要的．

虽然这些原则听起来像是写书的本源和路标，但我发现把它们讲出来是很有用的，要记住，“按你所教的写”并不在这些原则之中．当然，我有时也会违反这些原则．

目录给出了本书主题内容的很好的线索，不过乍一看会使你认为本书包含了代数入门课程的所有标准材料或者更多．但更仔细看一看，你会发现不时会有一些东西被省去而让位给特别的主题．上面的原则是我的指南．在进入抽象内容之前给出主要例子，使得一些抽象能被处理得更简洁．在学生克服固有的概念性困难以后再进行某些讨论，还使我压缩了一些东西．如第十章佩亚诺公理的讨论，就被减到两页[⊖]．虽然其讨论是相当不完整的，但我的经验是这已经

⊖ 这是指原英文书．——编辑注

足以使学生体会到整数算术公理化的发展．如果把它放到书的前面，就需要进行更为广泛的讨论，为此而花费时间是不值得的．有时推后的内容可以一直推下去，那不是本质的．例如，对偶空间和多线性代数，根据第二条原则被搁置起来．对于一些概念，比如极小多项式，我最终认为将它们包括进入门性代数书中的主要目的是提供方便的练习来源．

本书各章按照我通常教课的顺序安排．线性代数、群论和几何构成第一学期的内容．环在第十章才引入，虽然该章在逻辑上独立于前面许多章节．我采用这种非常规安排的原因是我想从一开始就强调代数与几何的联系，而且也是因为前面几章的内容对其他领域的人来说毕竟是最重要的．缺点是计算受到忽视．后面几章中向计算的倾斜，是对此的补偿．在后面的几章里，几何又以格、对称和代数几何的面貌多次出现．

Michael Artin

1990 年 12 月

给教师的话

本书需一些预备知识. 学生应熟悉微积分、复数的基本性质和数学归纳法. 了解证明肯定是有用的，但不是必不可少的. 第八章用到的拓扑学概念并不作为预备知识要求，附录介绍了这些概念，但太简短，不宜作教材.

不要试图在一学年讲完本书，除非你的学生已学过一学期的代数课程(如线性代数)，而且数学上相当成熟. 大约三分之一的内容可略去(而不影响连贯性)，如果需要，还可省去更多. 下列章节可以构成一门连贯的课程：

第一章，第二章，第三章的第一节～第四节，第四章，第五章的第一节～第七节，第六章的第一节和第二节，第七章的第一节～第六节，第八章的第一节～第三节和第五节，第十章的第一节～第七节，第十一章的第一节～第八节，第十二章的第一节～第七节，第十三章的第一节～第六节.

这一选择包括一些有意义的特殊主题：平面图形的对称，SU_2 的几何，虚二次数域的算术. 如果你不想讨论这些主题，那么这本书不适合你.

用一个学期来学前面四章是容易的，但这样将偏离本书的目标. 因为真正有意义的内容从第五章开始，坚持下去很重要. 如果你计划逐章学习，可以保持轻松的节奏尽可能快地进入第五章. 把注意力放在具体例子上会很有帮助，这对于一开始对证明的构成没有明确概念的学生而言是特别重要的.

与后面几章相比，第一章不那么吸引人，因此应快速讲完. 本书以它开始的原因是我想从一开始就强调一般线性群，而不是按通常做法将例子基于对称群. 这个决定的根据是前言中的第三条原则：一般线性群更重要.

下面是关于第二章的一些建议：

1. 对抽象的材料浅尝辄止，你在第五、六章还会遇到它们.

2. 例如，注重矩阵群，置换群只是一带而过. 由于其固有的记号上的困难，对称的例子(比如二面体群)最好推迟到第五章讲授.

3. 不要在算术上花太多时间，本书中其自然的位置是第十、十一章.

4. 不强调商群构造.

商群在教学上有问题. 虽然其构造在概念上很难，但在大多数初等例子中，商群很容易表示为同态的象，因而不需要抽象定义. 模算术几乎是其仅有的反例. 但模 n 的整数构成一个环，对于群的商，模算术不是理想的具有启发性的例子. 第一次真正使用商群是在第六章讨论生成元和关系时，本书早期手稿中，我曾把商群放在那里介绍. 由于担心引起代数界的不满，我最后把它放到第二章. 总之，如果你不打算在课程中讲授生成元与关系，那么可将商的深入讨论推迟到第十章(环论)，它在那里起着至关重要的作用，而且在那里模算术成为了极佳的具

有启发性的例子.

在第三章(向量空间)中，我试图建立这样一种用基计算的方式，它使学生不会为保持下标一致而产生麻烦. 我也许并不成功，但全书都使用该记号，建议最好采用.

因为后面要用到，所以第四章关于线性算子在旋转和线性微分方程组的应用应加以讨论，但不要陷入过多讲授微分方程的诱惑. 因为你在教代数课程，这种信念应被原谅.

在前面几章里，复杂程度逐渐增加，但第五章的内容有些跳跃. 如果不是有这个跳跃，我会尽可能把对称群放在前面讲述. 记住对称是一个困难的概念.

除了前两节，第六章的内容是可选的. 最后一节关于托德-考克斯特算法的内容不是标准的，把它放进来是用于为生成元和关系的讨论提供实例，否则没什么用.

关于双线性型的第七章没有什么特别的. 我没能解决这部分内容的主要问题，即对同一主题有太多的变化，但通过集中于实的和复的情形，我试图使讨论尽量简短.

在关于线性群的第八章，计划把时间花在 SU_2 的几何上. 在我扩充关于 SU_2 一节之前，我的学生每年都抱怨，之后他们开始要求补充读物，想学更多的东西. 许多学生在上这门课时不熟悉拓扑概念，因而这些概念需要过一下. 但我发现学生不熟悉拓扑概念所带来的困难是可以克服的. 的确，这里是他们学习流形是什么的好地方. 可是，我不知道有什么可以作为继续阅读的令人满意的参考文献.

关于群表示的第九章是可选的. 若干年来我一直反对包括这一主题，因为它太难了. 但学生常常要求学习这一主题，我也一直问自己：如果化学家能教，我们为什么不能呢？最终，根据本书的结构要求，还是纳入了群表示这一主题. 正由于此，埃尔米特型有了一个应用.

第十一章中非同寻常的主题是二次数域的算术. 你会发现，对于一般的代数课程来说，其讨论太长. 基于这种考虑，我将第八节(理想因子分解)作为一个自然的结束点.

在入门级的代数课程中，似乎应提及域的最重要的例子，因此第十三章讨论了有关函数域的内容.

伽罗瓦理论是否应放到本科课程中一直是一个有争议的问题. 虽然它的应用没有本书其他大部分主题那样广泛，但由于伽罗瓦理论是对称讨论的高潮，故把它作为一个可选主题. 我通常至少会花一些时间在第十四章上.

我曾考虑将练习根据其难度分级，但我发现无法保持一致，因而只在一些较难的题上用星号标记. 我相信已有足够多的难题，但当然我们总需要有更多有意义、容易的题目.

虽然我教了多年代数，但本书的若干方面仍是实验性的，我非常感谢使用本书的人提出的批评和建议.

"一、二、三、五、四……"

"不！爸爸，是一、二、三、四、五."

"哎，如果我想说一、二、三、五、四，为什么不行呢?"

"不是那样数数的."

致 谢

我主要想感谢多年来上我课的学生，他们使得这门课程令人激动．请原谅这里没有单独提到其中许多人的名字．

不少人在课堂上用过我的讲义并提出了有价值的建议，其中有 Jay Goldman、Steve Kleiman、Richard Schafer 及 Joe Silverman．Harold Stark 在数论方面以及 Gil Strang 在线性代数方面向我提供了帮助．此外，下列诸位阅读并评论了本书的手稿：Ellen Kirkman、Al Levine、Barbara Peskin 及 John Tate．我特别要感谢 Barbara Peskin 在生命的最后一年还把整本书读了两遍．

书中精确的数学图是 George Fann 和 Bill Schelter 利用计算机制作的．凭我一己之力无法完成．

感谢 Marge Zabierek，大约八年她每年都重录一次手稿，这样我才能在计算机上进行修改，还要感谢 Mary Roybal 对手稿进行仔细和专业的加工．

我在写本书时对其他书参考得不多，但伯克霍夫和麦克莱恩的经典著作以及师从范德瓦尔登的学习对我影响很大．Herstein 的书也一样，我曾多年用之作为教材．在 Noble 的书以及 Paley 和 Weichsel 的书中我发现一些关于练习的好的想法．

一些引文(大都与内容无关)散布于书中．我从阿诺尔德(V. I. Arnold)处得知第五章和第六章结束处的莱布尼茨和罗素的引文，从克莱因(Morris Klein)的《Mathematical Thought from Ancient to Modern Times》(古今数学思想)一书中看到第八章开始处外尔(Weyl)的引文．

目 录

第一章 矩阵运算

有了一些增加或减少，

或在上面添加一点或拿走一点，

人们在第一眼还是会说大小没变.

Leonhard Euler

矩阵是本书中心角色．它是理论的重要组成部分，并且许多具体例子都基于矩阵．因而，发展处理矩阵的方法是非常重要的．因为矩阵遍及大部分数学学科，所以这里用到的技巧在其他地方也一定会有用．

需要通过实践掌握的概念有矩阵乘法和行列式．

第一节 基本运算

设 m，n 为正整数．一个 $m\times n$ 矩阵是按矩形阵列排列的 mn 个数：

【1.1】
$$\begin{array}{cc} & n\text{ 列} \\ m\text{ 行} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \end{array}$$

例如，$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$是 2×3 矩阵．

矩阵中的数称为矩阵元素，用 a_{ij} 表示，其中 i，j 为指标(整数)，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$．指标 i 称为行指标，而 j 称为列指标．因而 a_{ij} 是位于矩阵 i 行 j 列的元素： 1

$$\begin{array}{cc} & j \\ & \vdots \\ i & \begin{bmatrix} & & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}. \end{array}$$

在上面的例子中，$a_{11}=2$，$a_{13}=0$，而 $a_{23}=5$．

我们通常用记号 A 表示矩阵，或者也可以把它写作(a_{ij})．

$1\times n$ 矩阵称为 n 维行向量．当 $m=1$ 时我们去掉指标 i 而将行向量写作

【1.2】
$$A=[a_1\ \cdots\ a_n] \quad \text{或} \quad A=(a_1,\cdots,a_n).$$

行向量中的逗号可有可无．类似地，$m\times 1$ 矩阵是 m 维列向量：

【1.3】
$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

1×1 矩阵$[a]$仅含有一个数，我们不区分这样的矩阵和它的元素．

【1.4】矩阵的加法是向量相加：

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(s_{ij}),$$

其中对所有 i，j，有 $a_{ij}+b_{ij}=s_{ij}$. 这样

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\4 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\5 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

只有当两个矩阵 A，B 具有相同的形状，即它们都是 $m\times n$ 矩阵时，才能定义它们的和.

【1.5】矩阵与数的标量乘法定义与向量的标量乘法一样. 数 c 与矩阵(a_{ij})相乘的结果是另一个矩阵：

$$c(a_{ij})=(b_{ij}),$$

其中对所有 i，j，有 $b_{ij}=ca_{ij}$. 于是

$$2\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 6\\4 & 2\end{bmatrix}.$$

2 数也称为标量.

矩阵乘法是一个复杂的概念. 我们先学习同样大小(即 $m=n$)的一个行向量 A(上面的(1.2))和一个列向量 B(上面的(1.3))的积 AB. AB 是1×1矩阵，即标量

【1.6】
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m.$$

(这个积通常叫做这两个向量的“点积”.)这样

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 4=10.$$

当我们把 A，B 看成带有下标的量时，这个定义的作用是很明显的. 例如，考虑含有 m 种成分的糖果条，用 a_i 表示每一糖果条中(成分)$_i$ 的克数，b_i 表示每克(成分)$_i$ 的价格，则矩阵乘积 $AB=C$算出每个糖果条的价格：

$$(\text{克}/\text{条})\cdot(\text{价格}/\text{克})=(\text{价格}/\text{条}).$$

另一方面，这是任意选择的行列乘积的定义.

一般地，对于两个矩阵 A 与 B，只有当 A 的列数等于 B 的行数时它们的积才有定义. 比如说，A 是一个 $\ell\times m$ 矩阵，而 B 是一个 $m\times n$ 矩阵. 这时积是一个 $\ell\times n$ 矩阵. 从符号上看，有$(\ell\times m)\cdot(m\times n)=(\ell\times n)$. 利用上面(1.6)的规则，积矩阵的元素通过将 A 的每一行与 B 的每一列相乘得到. 因此，若用 P 表示积 AB，则

【1.7】
$$p_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}.$$

下面是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的积.

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\boxed{a_{i1}\cdots a_{im}}\cdot\begin{array}{c} j \\ \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj}\end{matrix}}\end{array}=\boxed{\begin{matrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{matrix}}$$

例如， 3

【1.8】
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵乘法的这种定义方法提供了非常方便的计算工具.

回到糖果条例子，设有 ℓ 种糖果条，则可构造一个矩阵 A，使其第 i 行给出(条)$_i$ 的各成分的克数. 如果要算 n 年中每一年的价格，则可以构造一个矩阵 B，使其第 j 列是(年)$_j$ 的各成分的价格值. 矩阵乘积 $AB=P$ 算出糖果条的价格：$p_{ij}=$(条)$_i$ 在(年)$_j$ 的价格.

矩阵的概念是 19 世纪为了提供一个书写线性方程组的简明形式而引入的. 线性方程组

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

可利用矩阵记号写为

【1.9】
$$AX=B,$$

其中 A 为系数矩阵(a_{ij})，X 和 B 为列向量，而 AX 为矩阵乘积

$$\boxed{\quad A \quad}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

这样矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

表示如下的三个未知量的线性方程组：

$$\begin{array}{ccccccc} & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 1. \end{array}$$

方程(1.8)给出其一个解：$x_1=1$，$x_2=4$，$x_3=3$.

公式(1.7)定义的积也可用求和符号表示为

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k}a_{ik}b_{kj}.$$ 4

每一个这样的表达式都是(1.7)积矩阵定义中和的简化形式.

我们处理数集最重要的两个记号是上面所用的$\sum$(或求和记号)和矩阵记号. 实际上，记号$\sum$更为常用. 但由于矩阵记号更为紧凑，我们将尽可能地使用矩阵记号. 在后面几章中，我们的任务之一就是把复杂的数学结构转换成矩阵记号，从而方便地处理它们.

3 矩阵运算满足一些等式，如分配律

【1.10】
$$A(B+B')=AB+AB' \quad 和 \quad (A+A')B=AB+A'B$$

以及结合律

【1.11】
$$(AB)C=A(BC).$$

只要矩阵有适当的行列数使得运算能够进行，这些运算律就成立. 例如，对于结合律，要有正整数ℓ，m，n，p，使行列数为$A=\ell\times m$，$B=m\times n$，$C=n\times p$. 因为(1.11)中的两个积相等，所以括号可以省去而记为ABC. 这样三个矩阵的积ABC是一个$\ell\times p$矩阵. 例如，计算矩阵乘积

$$ABC=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

的两种方式为

$$(AB)C=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$$

和

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}.$$

标量乘法与矩阵乘法相容，即有

【1.12】
$$c(AB)=(cA)B=A(cB).$$

这些等式的证明是很简单的，没有多大意义.

和结合律不同，矩阵乘法的交换律不成立；也就是说，

【1.13】
$$通常\ AB\neq BA.$$

事实上，若A是$\ell\times m$矩阵，而B是$m\times\ell$矩阵，则AB和BA都有定义，但AB是$\ell\times\ell$矩阵而BA是$m\times m$矩阵. 即使是两个方阵，比如说$m\times m$矩阵，两个乘积也会不同. 例如，

5
$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \quad 而 \quad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

矩阵乘法不可交换，在讨论矩阵方程时要多加注意. 当乘积有定义时，可以在方程$B=C$的两边左乘矩阵A而得到$AB=AC$. 同样，在乘积有定义时也可得到$BA=CA$. 但我们不能由$B=C$而得到$AB=CA$!

对任意大小的矩阵，如果其元素都是0，则称之为**零矩阵**，记为0. 也许记为$0_{m\times n}$更好.

4 矩阵A的元素a_{ii}称为**对角元素**，一个非零元素都是对角元素的矩阵称为**对角矩阵**.

非零元素是对角元素且每一个非零元素都为1的 $n\times n$ 方阵

【1.14】
$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

称为 $n\times n$ 单位矩阵．它在乘法中的作用就像1一样：若 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则有

$$I_mA=A\quad 而\quad AI_n=A.$$

下面是两种表示单位矩阵 I_n 的简单方法：

$$I_n=\begin{bmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}.$$

我们常用一块空白或单独一个0来表示矩阵中一整块为零的区域．

我们用 * 表示矩阵中任意的未定元素．这样

$$\begin{bmatrix}*&&*\\&\ddots&\\0&&*\end{bmatrix}$$

表示一个对角线下面元素为0，而其他元素未定的矩阵．这样的矩阵称为上三角矩阵．

设 A 是一个 $n\times n$ 方阵．若有矩阵 B 使得

【1.15】
$$AB=I_n\quad 且\quad BA=I_n,$$

则 B 称为 A 的逆，记作 A^{-1}：

【1.16】
$$A^{-1}A=I_n=AA^{-1}.$$

当 A 有逆时，称 A 为可逆矩阵．例如，矩阵 $\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$ 可逆．其逆为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$，直接计算 AA^{-1} 和 $A^{-1}A$ 就可以验证这一点．另外两个例子是 6

$$\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\\&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad 和\quad \begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\&1\end{bmatrix}.$$

我们后面将看到，如果存在矩阵 B 使 $AB=I_n$ 和 $BA=I_n$ 这两个关系之一成立，则 A 可逆，并且 B 就是 A 的逆[见(2.23)]．由于矩阵乘法是不可交换的，所以这并不是显而易见的．当矩阵不是方阵时就不成立．例如，设 $A=[1\quad 2]$，$B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，则有 $AB=[1]=I_1$，但 $BA=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\neq I_2$.

另一方面，逆只要存在就是唯一的．换言之，只能有唯一的逆．设 B，B' 为两个对同一个矩阵 A 满足(1.15)的矩阵．我们仅需知道 $AB=I_n$（B 是右逆）和 $B'A=I_n$（B' 是左逆）．由结合律，$B'(AB)=(B'A)B$．于是

【1.17】
$$B'=B'I=B'(AB)=(B'A)B=IB=B,$$

因此 $B'=B$.