高校电子信息类专业主干课“十一五”规划教材

# 电磁场与电磁波

吕芳 杜永兴 辛莉◎编著

## Electromagnetic Field and Electromagnetic Wave

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高校电子信息类专业主干课“十一五”规划教材

# 电磁场与电磁波

◆吕 芳 杜永兴 辛 莉 编著

东南大学出版社
·南京·

## 内 容 提 要

本书是为高等院校电子信息类专业基础课“电磁场与电磁波”课程编写的本科生教材，主要介绍电磁场与电磁波的基本特性及规律，以 MAXWELL 方程组为主线阐述电磁场及基本规律是本书的特色。

本书从矢量分析与场论入手，着重讨论电磁场的基本理论的内容。全书共分八章，内容包括矢量分析与场论、宏观电磁现象的基本原理、静电场和恒定电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射。书末有附录（有关物理常数、重要的矢量公式、电磁波的波段划分及其主要应用）、各章习题参考答案、参考文献等。

在编写过程中注意强调基本概念和典型问题的解决方法，增加了部分工程应用方面的内容。

**图书在版编目(CIP)数据**

电磁场与电磁波/吕芳，杜永兴，辛莉编著. —南京：东南大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-5641-1437-4

Ⅰ.电… Ⅱ.①吕…②杜…③辛… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 011982 号

**电磁场与电磁波**

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 东南大学出版社 |
| 出 版 人 | 江 汉 |
| 社 址 | 江苏省南京市玄武区四牌楼 2 号 |
| 邮 编 | 210096 |
| 经 销 | 江苏省新华书店 |
| 印 刷 | 南京京新印刷厂 |
| 开 本 | 700 mm×1000 mm 1/16 |
| 印 张 | 15.50 |
| 字 数 | 358 千字 |
| 书 号 | ISBN 978-7-5641-1437-4/O·92 |
| 版 次 | 2009 年 1 月第 1 版 |
| 印 次 | 2009 年 1 月第 1 次印刷 |
| 印 数 | 1—3000 册 |
| 定 价 | 28.00 元 |

（凡有印装质量问题，请与我社读者服务部联系。电话：025—83792328）

# 前　言

现代电子技术如通讯、广播、电视、导航、雷达、遥感、测控、电子对抗、电子仪器和测量系统，都离不开电磁波的发射、控制、传播和接收；从家用电器、工业自动化到地质勘探，从工业、农业到医疗卫生等国民经济领域，几乎全都涉及电磁场理论的应用。

本书是为高等院校电子信息类专业基础课“电磁场与电磁波”课程编写的本科生教材，主要介绍电磁场与电磁波的基本特性及规律，以 MAXWELL 方程组为主线阐述电磁场及其基本规律是本书的特色。

本书从麦克斯韦方程出发，先论述时变电磁场，而将其他静态场作为时变场的特例来处理，由一般到特殊，更易于理解。这样可以压缩静态场，充实时变场的内容，也避免了大学物理课程的许多重复，节省了学时。

本书注重基本理论与实际相融合，以增加学生的学习兴趣。为了培养学生分析与解决问题的能力，加深所述内容的理解，在书中给出了一些例题、一定数量的思考题和习题；结合电磁场的基本物理概念讲解矢量的分析方法，有的放矢。同时还列出了一些相关物理量的英文表述，意在熟悉并掌握一些专业术语。

全书共分八章，内容包括矢量分析与场论、宏观电磁现象的基本原理、静电场和恒定电场、恒定电流的磁场、时变电磁波、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射。书末有附录(有关物理常数、重要的矢量公式、电磁波的波段划分及其主要应用)、各章习题参考答案、参考文献等。

本书内容安排合理，文字表述明了，物理概念清晰，数学推导易懂，并结合大量的例题说明解题的方法和要点。

在编写中，吸收了其他院校部分讲课教师的意见和建议，同时融入了作者长期讲授该课程的教学经验和体会，也结合了电子信息类专业后续课程知识的需求(如移动通信、天线技术、光纤通信等)。

其中第 1、2、5、6 章由吕芳编写，第 3、4 章由杜永兴编写，第 7、8 章由辛莉编写，最后由吕芳负责全书的统稿工作。本书在编写过程中得到了许多老师的大力支持与帮助，在此深表谢意。

书中不妥之处敬请广大读者提出宝贵意见。

作　者

2008.10

# CONTENTS 目　录


1　矢量分析与场论……（1）

1.1　矢量分析 ……（1）

1.1.1　标量和矢量 ……（1）

1.1.2　矢量的代数运算 ……（2）

1.1.3　矢量的标积与矢积……（2）

1.2　常用的正交坐标系 ……（3）

1.2.1　直角坐标系 ……（3）

1.2.2　圆柱坐标系 ……（4）

1.2.3　球坐标系 ……（6）

1.3　标量场 ……（8）

1.3.1　标量场的等值面 ……（8）

1.3.2　标量场的方向导数和梯度 ……（9）

1.4　矢量场的通量和散度 ……（12）

1.4.1　矢量场的矢量线 ……（12）

1.4.2　通量 ……（13）

1.4.3　散度 ……（14）

1.5　矢量场的环量及旋度 ……（16）

1.5.1　环量 ……（16）

1.5.2　旋度 ……（17）

1.5.3　斯托克斯定理 ……（18）

本章提要……（19）

思考题……（20）

习　题……（21）

2　宏观电磁现象的基本原理……（24）

2.1　基本电磁物理量 ……（24）




此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2.2 电磁场基本定律 …… (33)
2.3 麦克斯韦方程组的积分形式 …… (43)
2.4 麦克斯韦方程组的微分形式 …… (48)
2.5 时变电磁场的边界条件 …… (50)
本章提要 …… (54)
思考题 …… (55)
习 题 …… (56)
**3 静电场和恒定电场** …… (59)
3.1 静电场的基本方程 …… (59)
3.2 高斯定律的应用 …… (60)
3.3 电位与电位梯度 …… (62)
3.4 静电场中导体的性质 …… (66)
3.5 导体的电容 …… (69)
3.5.1 孤立导体电容 …… (69)
3.5.2 双导体电容 …… (70)
3.5.3 多导体系统的电容 …… (70)
3.6 静电场的边界条件 …… (73)
3.7 镜像法 …… (75)
3.7.1 导电平面上方点电荷的电场 …… (76)
3.7.2 导体球附近点电荷的电场 …… (78)
3.7.3 无限大介质平面上点电荷的电场 …… (79)
3.8 恒定电场 …… (80)
3.8.1 恒定电流场方程 …… (81)
3.8.2 恒定电流场的边界条件 …… (81)
3.9 分离变量法 …… (83)
3.9.1 直角坐标系中的分离变量法 …… (83)
3.9.2 圆柱坐标系中的分离变量法 …… (86)
3.10 电场能量 …… (88)
3.10.1 静电场的能量 …… (88)
3.10.2 恒定电流场的能量损耗 …… (89)
本章提要 …… (90)
思考题 …… (92)
习 题 …… (93)
**4 恒定电流的磁场** …… (96)
4.1 静磁场的基本方程 …… (96)
4.2 安培环路定律的应用 …… (99)

4.3　导体的自感和互感 …… (100)
4.4　恒定磁场的边界条件 …… (104)
4.5　静磁场的能量 …… (107)
本章提要 …… (110)
思考题 …… (110)
习　题 …… (111)
**5　时变电磁场** …… (113)
5.1　时变电磁场的波动性 …… (113)
5.2　电磁场的能量守恒——坡印廷定理 …… (114)
5.3　时变电磁场惟一性定理 …… (117)
5.4　正弦电磁场 …… (119)
5.4.1　麦克斯韦方程的复矢量形式 …… (120)
5.4.2　复数形式的坡印廷定理 …… (122)
本章提要 …… (124)
思考题 …… (126)
习　题 …… (126)
**6　平面电磁波** …… (128)
6.1　理想介质中的平面波 …… (128)
6.1.1　均匀平面波的分析 …… (128)
6.1.2　均匀平面波的传播特性 …… (132)
6.2　导电媒质中的平面波 …… (134)
6.2.1　导电媒质中平面波的传播特性 …… (135)
6.2.2　趋肤效应 …… (138)
*6.3　等离子体中的平面波 …… (142)
6.4　电磁波的色散和群速 …… (144)
6.5　电磁波的极化 …… (145)
6.5.1　线极化 …… (145)
6.5.2　圆极化 …… (146)
6.5.3　椭圆极化 …… (147)
6.5.4　极化技术的应用 …… (148)
6.6　平面波向平面边界的垂直入射 …… (149)
6.6.1　平面波向理想导体的垂直入射 …… (149)
6.6.2　平面波向理想介质的垂直入射 …… (153)
6.7　平面电磁波向平面边界的斜入射 …… (157)
6.7.1　平面电磁波向理想介质的斜入射 …… (157)
6.7.2　平面电磁波向理想导体平面的斜入射 …… (164)

本章提要……(168)
思考题……(171)
习　题……(172)
7　导行电磁波……(176)
7.1　导波的基本原理……(176)
7.2　矩形波导……(181)
7.3　波导的激励与耦合……(185)
7.4　传输线……(186)
7.4.1　传输线的分布参数……(187)
7.4.2　传输线方程及其解……(188)
7.4.3　入射波和反射波的叠加……(190)
7.4.4　传输线的基本特性……(191)
7.4.5　均匀无损耗传输线的工作状态分析……(196)
本章提要……(202)
思考题……(204)
习　题……(204)
8　电磁辐射……(206)
8.1　电偶极子的辐射……(207)
8.2　电与磁的对偶性……(209)
8.3　磁偶极子的辐射……(210)
8.4　天线的基本电参数……(211)
8.5　对称振子……(218)
8.5.1　对称振子的辐射场……(218)
8.5.2　对称振子的输入阻抗……(219)
8.6　天线阵……(220)
本章提要……(223)
思考题……(224)
习　题……(224)
附　录……(225)
各章习题参考答案……(228)
参考文献……(238)

# 1 矢量分析与场论

电磁场(Electromagnetic Field)是分布在三维空间的矢量场,矢量分析是学习场论的基础。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述,而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。本章首先介绍标量和矢量及标量场和矢量场的概念,给出常用坐标系,然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律,在此基础上介绍斯托克斯定理。

## 1.1 矢量分析

### 1.1.1 标量和矢量

电磁场中遇到的绝大多数物理量,能够容易地区分为标量(Scalar)和矢量(Vector)。一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量,例如,电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上,所有实数都是标量。标量的空间分布构成标量场。

在二维空间或三维空间内的任一点 $P$,它是一个既存在大小(或称为模)又有方向特性的量,称为矢量,用黑体 $\boldsymbol{A}$ 表示,而白体 $A$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的大小(即 $\boldsymbol{A}$ 的模)。若用几何图形表示,它是从该点出发的一条有向线段,如图 1.1 所示。线段的长度表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模,箭头的指向表示该矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向。如电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 等等。矢量的空间分布构成矢量场。

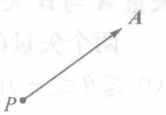



图 1.1 矢量的表示

若场中的物理量在各点处的对应值不随时间变化,则称该场为稳定场。否则,称为不稳定场。

一个模为 1 的矢量称为单位矢量(Unit Vector)。用 $\boldsymbol{e}_A$ 表示,即

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \tag{1.1}$$

式中,$A$ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A \tag{1.2}$$

### 1.1.2 矢量的代数运算

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加，可按平行四边形得到：从同一点画出矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，构成一个平行四边形，其对角线矢量即为和矢量，如图 1.2 所示。

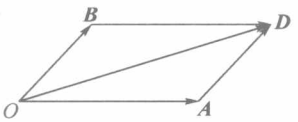



图 1.2 矢量的加法

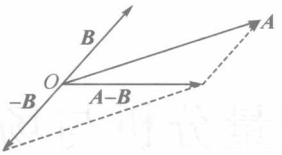



图 1.3 矢量的减法

矢量的加法服从交换律和结合律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad \text{（交换律）} \tag{1.3}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \quad \text{（结合律）} \tag{1.4}$$

矢量减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1.5}$$

式中 $-\boldsymbol{B}$ 的大小与 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等，但与 $\boldsymbol{B}$ 的方向相反，如图 1.3 所示。

### 1.1.3 矢量的标积与矢积

一个标量 $k$ 与一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积仍为一个矢量，用 $|k|\boldsymbol{A}$ 表示。如 $k>0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同方向；如 $k<0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 反方向。

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 标积(Scalar Product)，称为点积(或内积)，以“$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$”表示。两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 矢积，称为叉积(Cross Product)(或外积)，以“$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$”表示。

两个矢量的点积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一个标量，定义为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小与它们之间较小的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的余弦之积，如图 1.4 所示，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.6}$$

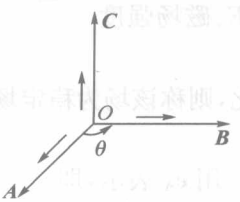



图 1.4 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 点积

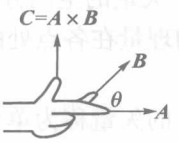



图 1.5 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 叉积

矢量的点积服从交换律和分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \quad \text{（交换律）} \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\quad(\text{分配律})\tag{1.8}$$

两个矢量的叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，它垂直于包含矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面，其大小定义为 $AB\sin\theta$，方向为当右手四个手指从矢量 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 旋转 $\theta$ 时大拇指的方向，如图 1.5 所示，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_c AB\sin\theta\tag{1.9}$$

由矢积定义知

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\tag{1.10}$$

因此，矢积不服从交换律，而服从分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\quad(\text{分配律})\tag{1.11}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的点积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为标量三重积，它具有如下运算性质：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\tag{1.12}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的叉积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为矢量三重积，它具有如下运算性质：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\tag{1.13}$$

## 1.2 常用的正交坐标系

为了定量地分析矢量场，需要建立参考坐标系，以表示空间的位置及矢量的方向。当对电磁问题进行分析时，根据物体不同的几何形状，采用不同的坐标系将会给我们的分析工作带来很大方便。例如，对平面矩形和长方体形物体，采用直角坐标系分析比较方便；对平面圆形和圆柱形物体，采用圆柱坐标系比较方便；而对球形和圆锥形物体，则采用球坐标系比较方便。在电磁场理论中，最常用的坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

### 1.2.1 直角坐标系

如图 1.6 所示，直角坐标系中的 3 个坐标变量是 $x$、$y$ 和 $z$，它们的变化范围分别是 $-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$，$-\infty<z<\infty$，空间任一点是 3 个坐标曲面 $x=x_0$、$y=y_0$ 和 $z=z_0$ 的交点。

在直角坐标系中，过空间任一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 分别是 $x$、$y$ 和 $z$ 增加的方向，且遵循右手螺旋法则：

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\tag{1.14}$$

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z\tag{1.15}$$

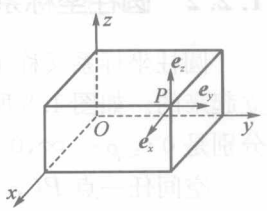



图 1.6 直角坐标系



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

其中 $A_x$、$A_y$、$A_z$ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影，如图 1.7 所示。

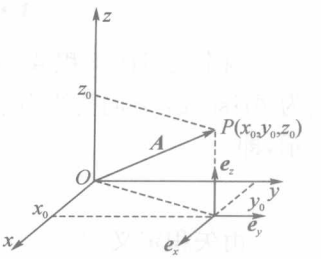



图 1.7　直角坐标系中一点的投影

两个矢量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$ 与 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$ 的和等于对应分量之和，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{e}_x+(A_y+B_y)\boldsymbol{e}_y+(A_z+B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{1.16}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z)\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned} \tag{1.17}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)\times(B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z)\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.18}$$

在直角坐标系中，位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z \tag{1.19}$$

其微分为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1.20}$$

而与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}S_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\mathrm{d}S_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.21}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.22}$$

### 1.2.2　圆柱坐标系

圆柱坐标系又称半极坐标系，它是由平面极坐标系与空间直角坐标系中的部分建立起来的。如图 1.8 所示，圆柱坐标系由 $\rho$、$\phi$ 和 $z$ 三个坐标变量组成，它们的变化范围分别是 $0\leqslant\rho<\infty$，$0\leqslant\phi<2\pi$，$-\infty<z<\infty$。

空间任一点 $P(\rho_0,\phi_0,z_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点：$\rho=\rho_0$ 的圆柱面、包含 $z$ 轴并与 $xz$ 平面构成夹角为 $\phi=\phi_0$ 的半平面、在 $z=z_0$ 的平面。

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系：

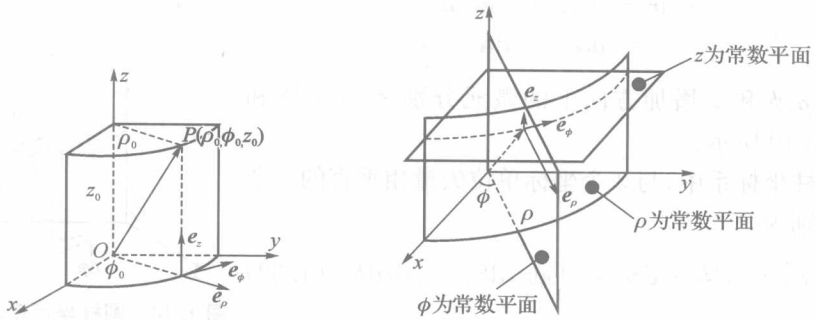



图 1.8 圆柱坐标系

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\phi=\arctan(y/x),z=z \tag{1.23}$$

或

$$x=\rho\cos\phi,y=\rho\sin\phi,z=z \tag{1.24}$$

在圆柱坐标系中，过空间任一点 $P(\rho_0,\phi_0,z_0)$ 的 3 个坐标单位矢量表示为 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$，它们相互正交且遵循右手螺旋法则，即

$$\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_z、\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_\rho、\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.25}$$

在这 3 个单位矢量中除了 $\boldsymbol{e}_z$ 的方向始终不变以外，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向均随空间坐标变化。由图 1.9 可得到 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi$ 与直角坐标系之间的变换关系为

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_\phi=-\sin\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z \tag{1.26}$$

或

$$\boldsymbol{e}_x=\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_y=\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z \tag{1.27}$$

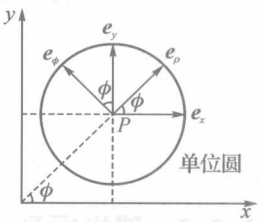



图 1.9 直角坐标系与圆柱坐标系的单位矢量的关系

由式(1.26)可看出 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 是随 $\phi$ 变化的，且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\phi}=-\sin\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\phi\\[2ex]\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi}=-\cos\phi\boldsymbol{e}_x-\sin\phi\boldsymbol{e}_y=-\boldsymbol{e}_\rho\end{cases} \tag{1.28}$$

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系中可以表示为

$$\boldsymbol{A}=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi+A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.29}$$

其中 $A_\rho$、$A_\phi$ 和 $A_z$ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影。

在圆柱坐标系中，位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z \tag{1.30}$$

其微分元

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \mathrm{d}(\rho\boldsymbol{e}_\rho) + \mathrm{d}(z\boldsymbol{e}_z) = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \\ &= \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{1.31}$$

它在 $\rho$、$\phi$ 和 $z$ 增加方向上的微元分别是 $\mathrm{d}\rho$，$\rho\mathrm{d}\phi$ 和 $\mathrm{d}z$，如图 1.10 所示。

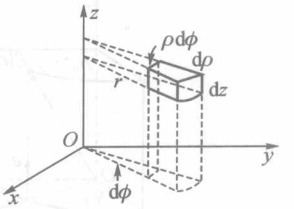



图 1.10　圆柱坐标系的长度元、面积元和体积元

在圆柱坐标系中，与 3 个坐标单位矢量相垂直的 3 个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_\rho = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z, \mathrm{d}S_\phi = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z, \mathrm{d}S_z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \tag{1.32}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \tag{1.33}$$

矢量 $\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z$ 与矢量 $\boldsymbol{B} = B_\rho\boldsymbol{e}_\rho + B_\phi\boldsymbol{e}_\phi + B_z\boldsymbol{e}_z$ 的和为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_\rho + B_\rho)\boldsymbol{e}_\rho + (A_\phi + B_\phi)\boldsymbol{e}_\phi + (A_z + B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{1.34}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点积为

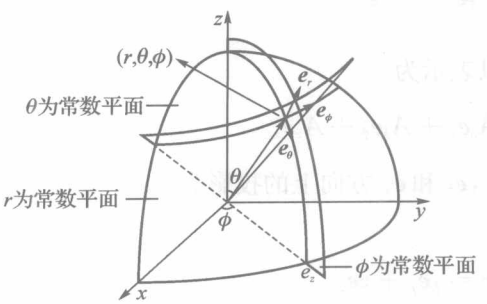
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(B_\rho\boldsymbol{e}_\rho + B_\phi\boldsymbol{e}_\phi + B_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z \end{aligned} \tag{1.35}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi + A_z\boldsymbol{e}_z)\times(B_\rho\boldsymbol{e}_\rho + B_\phi\boldsymbol{e}_\phi + B_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= (A_\phi B_z - A_z B_\phi)\boldsymbol{e}_\rho + (A_z B_\rho - A_\rho B_z)\boldsymbol{e}_\phi + (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho)\boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.36}$$

### 1.2.3　球坐标系

如图 1.11 所示，球坐标系中表示空间位置点的 3 个坐标变量是 $r$、$\theta$ 和 $\phi$，它们的变化范围分别是



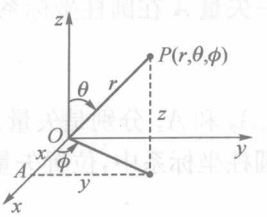




图 1.11　球坐标系

$$0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

其中 $r$ 表示该点到坐标原点的距离，即位置矢量的长度；$\theta$ 表示该点的位置矢量与 $z$ 轴的夹角，称为极角或纬度角；$\phi$ 表示过该点和 $z$ 轴的平面与 $xz$ 平面的夹角，称为方位角或经度角。

球坐标系与直角坐标系之间的变换关系：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \phi = \arctan(y/x) \tag{1.37}$$

或

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta \tag{1.38}$$

在球坐标系中，过空间任一点 $P(r_0, \theta_0, \phi_0)$ 的 3 个坐标单位矢量表示为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$，它们相互正交且遵循右手螺旋法则，即

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi、\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r、\boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \tag{1.39}$$

它们与直角坐标系之间的变换关系：

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y \end{cases} \tag{1.40}$$

或

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_y = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \tag{1.41}$$

球坐标系中的坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 都不是常矢量，且

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi} = \sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{e}_r, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\phi} = \cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\theta} = 0, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\phi}{\partial\phi} = -\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \tag{1.42}$$

任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在球坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.43}$$

其中 $A_r$、$A_\theta$ 和 $A_\phi$ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向上的投影。

位置矢量

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.44}$$

其微分元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)=\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r+r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\sin\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.45}$$

即在球坐标系中沿 3 个坐标的长度元为 $\mathrm{d}r$、$r\mathrm{d}\theta$ 和 $r\sin\theta\mathrm{d}\phi$，如图 1.12 所示。

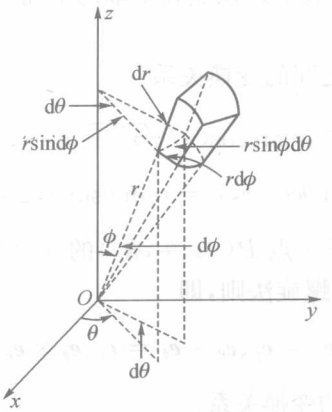



**图 1.12　球坐标系中的长度元、面积元和体积元**

在球坐标系中，3 个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}S_\theta=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}S_\phi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

体积元为

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

矢量 $\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ 与矢量 $\boldsymbol{B}=B_r\boldsymbol{e}_r+B_\theta\boldsymbol{e}_\theta+B_\phi\boldsymbol{e}_\phi$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_r+B_r)\boldsymbol{e}_r+(A_\theta+B_\theta)\boldsymbol{e}_\theta+(A_\phi+B_\phi)\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.46}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点积为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_rB_r+A_\theta B_\theta+A_\phi B_\phi \tag{1.47}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_\theta B_\phi-A_\phi B_\theta)\boldsymbol{e}_r+(A_\phi B_r-A_r B_\phi)\boldsymbol{e}_\theta+(A_r B_\theta-A_\theta B_r)\boldsymbol{e}_\phi\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r&\boldsymbol{e}_\theta&\boldsymbol{e}_\phi\\A_r&A_\theta&A_\phi\\B_r&B_\theta&B_\phi\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.48}$$

## 1.3　标量场

### 1.3.1　标量场的等值面

由标量场(Scalar Field)的定义可知，分布在标量场中各点处的数值 $u$ 是场中一点 $M$ 的函数 $u=u(M)$，当取定了 $Oxyz$ 直角坐标系以后，它就成为点 $M(x,y,z)$ 的坐标的函数，即

$$u=u(x,y,z) \tag{1.49}$$

可见，一个标量场可以用一个数性函数来表示。后面若无特别声明，则总假定这函数单值、连续且有一阶连续偏导数。

在标量场中，为了直观地研究标量 $u$ 在场中的分布状况，给出等值面的概念。等值面是指在场中使函数 $u$ 取相同数值的点所组成的曲面。例如温度场的等值面，是由温度相同的点组成的等温面；电位场中的等值面，是由电位相同的点组成的等位面。

$$u(x,y,z)=c(c \text{ 为常数})$$

在上式中给常数 $c$ 以不同的数值，就得到不同的等值面，如图 1.13 所示。这族等值面充满了数量场所在的空间，而且互不相交。这是因为在数量场中的每一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 都有一个等值面

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0) \tag{1.50}$$

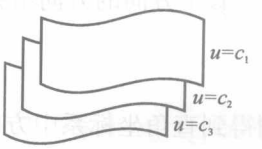



图 1.13 标量场的等值面

通过；而且由于函数 $u$ 为单值，一个点就只能在一个等值面上。

标量场的等值面，可以直观地帮助了解场中物理量的分布状况。

### 1.3.2 标量场的方向导数和梯度

1) 方向导数的概念

在标量场中，标量 $u=u(P)$ 的分布状况，可以借助于等值面来进行了解，但只能大致地了解到标量 $u$ 在场中的总的分布情况，是一种整体性地了解。而研究标量场还要对它作局部性地了解，也就是要考察标量 $u$ 在场中各个点处的邻域内沿每一方向的变化情况。为此，引入方向导数(Directional Derivative)的概念。标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向的变化率。

设 $P_0$ 为标量场 $u=u(P)$ 中的一点，从点 $P_0$ 出发引出一条射线 $l$，如图 1.14 所示。在 $l$ 上 $P_0$ 点邻近取一点 $P$，记线段 $P_0P=\Delta l$，如果当 $P\to P_0$ 时极限存在，则称它为函数 $u(P)$ 在点 $P_0$ 处沿 $l$ 方向的方向导数，记为

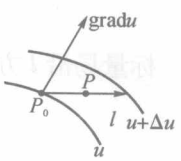



图 1.14 方向导数

$$\left.\frac{\Delta u}{\Delta l}\right|_{P_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\Delta l}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\Delta l} \tag{1.51}$$

当 $\frac{\partial u}{\partial l}>0$ 时，标量场 $u(P)$ 沿 $l$ 方向是增加的，当 $\frac{\partial u}{\partial l}<0$ 时，标量场 $u(P)$ 沿 $l$ 方向是减少的；当 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$ 时，标量场 $u(P)$ 沿 $l$ 方向无变化。

方向导数值既与点 $P_0$ 有关，也与 $l$ 方向有关。因此，标量场中，在一个给定点 $P_0$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com