

耿柳娜◎著

数学问题
解决

策略

黑龙江人民出版社

数学问题解决策略

耿柳娜 著

黑龙江人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学问题解决策略/耿柳娜著. —哈尔滨: 黑龙江人民出版社, 2008. 4

ISBN 978 - 7 - 207 - 07744 - 8

I. 数… II. 耿… III. 数学问题 - 研究 IV. 01 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 029762 号

责任编辑: 安晓峰 崔冉

封面设计: 邬颖华

数学问题解决策略

Shuxue Wenti Jiejue Celüe

耿柳娜 著

出版发行	黑龙江人民出版社
通讯地址	哈尔滨市南岗区宣庆小区 1 号楼
邮 编	150008
电子邮箱	hljrmcbs@yeah.net
网 址	www.longpress.com
印 刷	黑龙江神龙联合制版印务有限责任公司
开 本	787 × 1092 毫米 1/16
印 张	15
字 数	180 千
版 次	2008 年 4 月第 1 版 2008 年 4 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 207 - 07744 - 8/O · 20
定 价	25.00 元

(如发现本书有印刷质量问题, 印刷厂负责调换)

本社常年法律顾问: 北京市大成律师事务所哈尔滨分所律师赵学利、赵景波

序

问题解决作为教育心理学、认知心理学和发展心理学的重要课题一直倍受关注。近些年来，问题解决研究从生疏领域（人工概念）向个体熟悉的领域转化，如对拼写、阅读、推理等领域的问题解决进行了探索。当前问题解决研究的趋向是重视策略在问题解决中的作用以及焦虑等情绪变量对问题解决的影响。

我十分欣赏耿柳娜博士近几年所做的有关问题解决的系列研究。耿柳娜博士自1998年起，以概念研究为突破口在问题解决领域里进行了很有意义的探索；2001年至2004年间作为我的博士生参与了我主持的多项国家级和省部级有关问题解决的课题研究工作，包括国家自然科学基金和教育部人文社会科学基金重大项目；在这之后，她又自己独立主持了几项与问题解决策略有关的课题研究，获得了有意义的研究结果。看到她将这几年的研究成果整理成专著出版，我感到由衷地高兴。

这本书不仅结构严谨、语言流畅，更重要的是在观点、方法和内容上也都有所创新。第一，早期的一些研究者用某一种特性来描述个体问题解决策略的发展，认为个体在认知发展的某一阶段仅使用某一种策略来解决问题。作者认为个体问题解决策略呈现出多样性和差异性、竞争性和适应性、突变性和渐进性并存的特点，在观点上有一定的创新性。第二，近年来，研究者越来越关注外部策略在个体问题解决策略发展中的作用，作者采用内隐

和外显相结合的方法，考察个体内外部策略的表现，突破以往仅用口语报告考察内部问题解决策略的局限。第三，以前有关问题解决的研究，大多只是由单一任务便得出结论。作者所做的研究将认知任务的范围进行了扩展，采用多重任务，试图从更全面的角度探讨问题解决策略的发展特点。第四，以前研究者大多从个性、社会性的角度出发研究个体的数学焦虑，此书从认知的角度研究数学焦虑对问题解决策略的影响。这种从认知角度探讨情绪变量对个体思维影响的研究具有创新性。另外，该著作为数学教学，尤其是数学问题解决策略方面，提供了一种重要的心理学的依据。

衷心希望广大读者能喜欢这本著作，与作者一同探索数学问题解决策略的理论与实践研究，并希望指出本书的不足之处，帮助作者提高。

是为序。

陈英和

2007年12月于北京师范大学

自序

问题解决是人类适应环境、解决生存与发展中各种问题的基本方式，其重要性不言而喻。策略是指向认知目标的一种心理操作，主体通过使用策略，可以达到解决问题的目的。策略由美国心理学家、教育学家布鲁纳于1956年在人工概念的研究中首先提出。问题解决策略是衡量个体认知发展水平和个体差异的重要指标。近几十年来，策略的研究作为教育心理学、认知心理学和发展心理学的重要课题受到了多方位的关注，研究者从阅读、拼写、数学、记忆等领域对问题解决策略的研究进行了探索，并取得了有价值的研究成果。在这些领域中，数学问题解决策略的研究倍受重视。数学是人们生活、劳动和学习必不可少的工具，能够帮助人们处理数据、计算、推理和证明，数学模型可以有效地描述自然现象和社会现象；数学为其他科学提供了语言、思想和方法，是一切重大技术发展的基础；数学在提高人的推理能力、抽象能力、想象力和创造力等方面有着独特的作用；数学是人类的一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。基于对过去半个世纪里有关数学问题解决策略的大量文献分析发现，已有的研究主要集中于对某个维度或某个问题进行考察，这些结果虽然能在一定程度上说明数学问题解决策略的某些特点，但并不能全面系统地揭示个体数学问题解决策略发展的规律与过程。

数学问题解决策略受多方面因素的影响,其中数学焦虑是最重要的影响因素之一。数学焦虑是个体在处理数字、使用数学概念、学习数学知识或参加数学考试时所产生的不安、紧张、畏惧等焦虑状态,是一种消极的情绪。里查德森和苏伊尼于1972年对数学焦虑进行了开创性的研究。随后,心理学研究者对数学焦虑进行了广泛的研究,并取得了一些有意义的研究成果,如数学焦虑会使个体对数学刺激产生负面的生理反应,对自己解决数学问题的能力怀有错误的信念和消极的态度,最终的结果是数学焦虑者会回避需要应用数学技能的环境和职业,因而高数学焦虑者的数学学业成绩一般都较低。但在相当长的一段时间内,研究者主要从个体社会性的角度研究数学焦虑,数学焦虑和数学认知是被作为两个分离的课题进行研究的。从认知心理学的角度来看,数学焦虑与数学问题解决策略有怎样的相互关系,还有待于深入研究。

鉴于此,本书设计了三项相对独立且具有内部逻辑关联的子研究,拟对个体数学问题解决策略发展特点及其与数学焦虑的关系进行全面、系统的探讨。进行此领域的研究,一方面有助于进一步探索个体数学思维过程及其发展规律;另一方面能为进一步探明促进个体数学问题解决策略形成和发展的教学模型,为更好地改进数学教学提供实证材料。此外,该研究在优化基础教育课堂教学、提高教学效率和质量、提高学生的自学能力,培养创新人才等方面具有积极的意义。

研究 I 数学问题解决中策略的选择:一项数计算研究。选取90名小学1~3年级学生为被试,用计算机呈现数学问题(包括两个数和三个数的算术题),对其问题解决策略选择的发展特点进行了考察。结果表明,个体数学问题解决策略选择表现出多样性的特点。体现在能运用多种策略解决问题,以及在解决同一

题时能同时运用多种策略,各策略的选择率和执行正确率也呈现出多样性的变化特点;随着年龄的增长,个体使用策略更加经济有效,即策略使用数目越来越少,且正确率越来越高;根据题目类型不同,个体的策略选择率和执行正确率体现出适应性的特点;不同工作记忆容量的被试策略总目的选择和执行存在差异,工作记忆容量高的个体选择的策略总目最多,策略的执行正确率也最高。

研究Ⅱ 数学问题解决中的策略发现:概念理解的中介作用。选取36名小学2年级学生为被试,用计算机呈现成对相继出现、且有联系的算术题,以及采用随后测查的算术判断题考察个体是否会用转换性原则和联合性原则来解决数学问题,以测查策略发现中概念性知识理解的特点。结果表明,概念性理解好的个体,在提取策略的应用、问题解决速度和问题解决正确性上都表现得好;以转换性原则为基础的概念性理解与换位策略的应用有关;以联合性原则为基础的概念性理解与分解策略的应用有关;针对不同类型题目的概念性理解具有显著差异。连加题的概念性理解最好,连减题次之,加减混合题最差;概念性理解好的个体,其概念性理解迁移能力也好。

研究Ⅲ 数学问题解决与焦虑的关系:一项有关数学焦虑的研究。对不同数学焦虑水平的90名小学1~3年级学生的数学问题解决策略的表现进行了初步探索。随后以其中30名小学3年级学生为对照组被试(高、中、低数学焦虑组被试各10名);实验组被试为另外选取的30名3年级学生(高、中、低数学焦虑组被试各10名),采用“双重任务”模式考察在即时数学焦虑状态下,个体数学问题解决策略的表现。结果表明,在一般数学焦虑状态下,数学焦虑对个体问题解决策略的影响较弱,只对个别策略的选择和执行产生影响。题目类型对两个数题策略的选

择没有影响,而对策略的执行有影响。题目类型对三个数题策略选择和执行都有影响;在即时数学焦虑状态下,不同数学焦虑水平个体策略的选择和执行都有显著差异,在进位加法、借位减法和三个数题中多种策略执行的差异体现得更明显;在即时数学焦虑状态下,个体在不同题型的策略选择和执行上更易受数学焦虑的影响。

在综合讨论中,根据上述三个研究及有关文献,从理论方面重点说明了数学问题解决策略的发展是具有不同层次的,如果只考察单一层次的策略,不足以总揽数学问题解决策略的全貌。从这个意义上讲,策略的有效性是一个比问题特征更好的预测指标,因为它更准确地说明了个体的内部心理加工过程;数学问题解决策略的发展具有多样性和层次性、共同性和差异性、竞争性和适应性等特点;在数学认知领域,典型的策略发展和选择应包括不同知识类型的相互作用。事实性知识、程序性知识和概念性知识这三类知识之间的关系应当相互促进、相辅相成,缺一不可的;数学焦虑水平对数学问题解决策略有影响,高数学焦虑个体通常使用低效策略较多,策略执行的正确率也低,造成这种情况的原因是,数学焦虑情绪大量占用了本应用于解决数学问题的记忆资源。从实践教育层面分析了教育评价中的过程评定不容忽视。目前有关对个体思维、智力或学习成绩的测量和评定,更多的是结果性评定,即个体是否正确解决了问题,引入以策略考察为中心的过程性评定将改变这种单一化的评定方式,对个体的思维智力水平和学习成绩好坏做出更全面和客观的评定。最后列举了本研究得到的主要结论。

目 录

第一章 研究背景和问题提出	1
一、问题解决概述	2
二、问题解决策略研究的进程及研究意义	8
三、数学问题解决策略研究的有关理论回顾	16
四、数学问题解决策略研究的机制理论	29
五、数学问题解决策略与工作记忆	34
六、数学问题解决策略与数学焦虑	47
七、数学问题解决策略的研究方法	53
八、本研究的问题与方法	59
第二章 研究 I 数学问题解决中策略的选择:	
一项数计算研究	63
一、问题提出	63
二、研究方法	66
三、结果与分析	69
四、讨论	108
五、研究结论	117
第三章 研究 II 数学问题解决中的策略发现:	
概念理解的中介作用	118
一、问题提出	118
二、研究方法	121

三、结果与分析·····	126
四、讨论·····	134
五、研究结论·····	137
第四章 研究Ⅲ 数学问题解决与焦虑的关系:	
一项有关数学焦虑的研究·····	138
实验一 ·····	138
一、问题提出·····	138
二、研究方法·····	139
三、结果与分析·····	143
四、研究结论·····	154
实验二 ·····	155
一、问题提出·····	155
二、研究方法·····	156
三、结果与分析·····	159
四、研究结论·····	175
讨论(实验一和实验二合并讨论)·····	175
第五章 综合讨论 ·····	180
一、数学问题解决策略的分类与层次·····	180
二、数学问题解决策略的发展特点与机制·····	181
三、数学问题解决策略与工作记忆·····	188
四、数学问题解决策略与数学焦虑·····	191
五、数学问题解决策略的评估·····	193
六、数学问题解决策略研究的方法学思考·····	193
七、教育启示·····	194
八、后继研究和再思考·····	195
第六章 研究结论 ·····	197
参考文献 ·····	199

附录.....	217
后记.....	226

第一章 研究背景和问题提出

问题解决是人类适应环境、解决生存与发展中各种问题的基本方式，其重要性不言而喻。策略是指向认知目标的一种心理操作，主体通过使用策略，可以达到解决问题的目的。策略由美国心理学家、教育学家布鲁纳于 1956 年在人工概念的研究中首先提出。问题解决策略是衡量个体认知发展水平和个体差异的重要指标。近几十年来，策略的研究作为教育心理学、认知心理学和发展心理学的重要课题受到了多方位的关注，研究者从阅读、拼写、数学、记忆等领域对问题解决策略的研究进行了探索，并取得了有价值的研究成果。在这些领域中，数学问题解决策略的研究倍受重视。数学是人们生活、劳动和学习必不可少的工具，能够帮助人们处理数据、计算、推理和证明，数学模型可以有效地描述自然现象和社会现象；数学为其他科学提供了语言、思想和方法，是一切重大技术发展的基础；数学在提高人的推理能力、抽象能力、想象力和创造力等方面有着独特的作用；数学是人类的一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。基于对过去半个世纪里有关数学问题解决策略的大量文献分析发现，已有的研究主要集中于对某个维度或某个问题进行考察，这些结果虽然能在一定程度上说明数学问题解决策略的某些特点，但并不能全面系统地揭示个体数学问题解决策略发展的规律与过程。

数学问题解决策略受多方面因素的影响,其中数学焦虑是最重要的影响因素之一。数学焦虑是个体在处理数字、使用数学概念、学习数学知识或参加数学考试时所产生的不安、紧张、畏惧等焦虑状态,是一种消极的情绪。里查德森和苏伊尼于1972年对数学焦虑进行了开创性的研究。随后,心理学研究者对数学焦虑进行了广泛的研究,并取得了一些有意义的研究成果,如数学焦虑会使个体对数学刺激产生负面的生理反应,对自己解决数学问题的能力怀有错误的信念和消极的态度,最终的结果是数学焦虑者会回避需要应用数学技能的环境和职业,因而高数学焦虑者的数学学业成绩一般都较低。但在相当长的一段时间内,研究者主要从个体社会性的角度研究数学焦虑,数学焦虑和数学认知是被作为两个分离的课题进行研究的。从认知心理学的角度来看,数学焦虑与数学问题解决策略有怎样的相互关系,还有待于深入研究。

鉴于此,本研究设计了三项相对独立且具有内部逻辑关联的子研究,拟对个体数学问题解决策略发展特点及其与数学焦虑的关系进行全面、系统的探讨。进行此领域的研究,一方面有助于进一步探索个体数学思维过程及其发展规律;另一方面能为进一步探明促进个体数学问题解决策略形成和发展的教学模型,为更好地改进数学教学提供实证材料。此外,该研究在优化基础教育课堂教学、提高教学效率和质量、提高学生的自学能力、培养创新人才等方面具有积极的意义。

一、问题解决概述

(一) 问题和问题解决的含义

在提及问题解决之前,首先要明确的基本问题是“问题是什么?”格式塔心理学家唐克尔(Dunker)在1945年提供的一

个定义直到现在仍可用,“当一个有机体有一个目标,但又不知道如何达到目标时,就产生了问题”。实际上,这个定义包含了如下三个方面的内容。第一,实验者使用的实验任务,对一个特定的被试而言不一定是个问题,实验任务是否构成问题依赖于被试的知识及使用相关知识的能力。第二,如果一个人改变了目标,该问题就不再存在,或者不用解决了。第三,只有当这个人辨别出他的目标与其所处情境有差异时,才真正形成问题(辛自强,2005)。

通常而言,问题是给定的信息和目标之间有某些障碍需要加以克服的情境。所有的问题有三个基本成分:第一,给定条件,即关于问题的一系列描述;第二,目标,关于问题结论的描述;第三,障碍,即问题和目标之间的中间环节,这些障碍往往是隐含的。作为问题必须满足这三个条件,否则不是问题。

安德森(Anderson, 1980)认为,尽管问题多种多样,但所有问题解决都有一些共同的基本特征:第一,目的性。问题解决必须具有明确的目的,无明确目的的不是问题解决。第二,操作序列,即包括一系列的心理操作。有些活动尽管有目的,如回忆朋友的电话号码,只需要记忆恢复,没有心理操作,也称不上问题解决。第三,认知操作。问题解决活动必须有认知成分参加,它的活动依赖于认知操作来进行。有些活动,如打领结、分桥牌,虽然也有目的,也有一系列的操作,但没有认知操作的参与,因此也不是问题解决。

(二) 问题的类型

问题根据不同的标准可以划分为不同的类型。

格里诺(Greeno, 1978)根据解决问题过程的特征将问题分成三种类型:一是归纳结构问题,即给出几个条件,问题解决者必须发现隐含在条件中的形式,例如系列填空题,类推问题

等；二是转换问题，即给出一个初始状态，问题解决者必须发现一系列产生目标状态的操作，通过这些操作，使最初状态不断向目标状态转化，最终达到总目标，如量水问题、河内塔问题、过河问题等；三是排列问题，即给出所有的成分，而问题解决者必须以一事实上的方式排列出它们，通过排列达到目标状态，如字谜问题、算术代码问题等。

雷特曼（Reitman, 1964）则根据问题的确定性程度，把问题分为两大类：第一类是明确规定的问题，这类问题对给定的目标和条件均有清楚的说明。例如，你去超市买东西，了解你所购买商品的价格，以及购买商品的数量，最后运用乘法和加法运算，算出你所应支付的款额。因而，这类问题较容易呈现，无需花数周或更长的时间去解决，很容易记录，也容易修改。第二类是没有明确规定的问题，这类问题中给出的信息、能使用的操作，以及达到的目标，都有很大的不确定性。如创作一部电影，想办法提高儿童的智力等。我们认为这两种分类具有互补性，在实验研究中的问题大多数是确定性问题，而日常工作中的许多问题具有不确定性。

还有一种广泛的分类法是将问题分为专门领域的问题和非专门领域的问题。当代大多数问题解决的研究所涉及的多是非专门领域问题，这类问题有明确的答案，但对问题解答不要求有专业培训。如河内塔问题、各种各样的过河问题都属于这一类。这些问题的特点是：一、通常比较复杂，足以对大多数人构成挑战，但并不是不能解决；二、这类问题容易用形式的方式加以详细描述，可以揭示问题解决规律的普遍性。而领域专门问题是与问题解决者的知识基础和教育训练有关的问题，如推理问题、数学问题。

在本研究中，主要采用明确规定的问题，这些问题的解决都

是以相应的数学知识为基础的，因而均属于领域专门问题。

（三）问题解决研究的历史发展

问题解决作为心理学的一个传统的研究领域，一直受到广泛关注，心理学家从各自的观点、理论框架和研究方法出发力图探讨问题解决的内在机制，取得了一系列有意义的成果。因而，问题解决领域的研究也深深地打上了心理学历史发展的烙印。

1. 联想主义时期

早期的联想主义者认为问题解决是尝试——错误学习的结果或者是对先前习得性反应的再现（Hull, 1930, 1931; Maltzman, 1955; Thorndike, 1911）。桑代克通过对猫的一个著名的实验，为尝试——错误说提供了强有力的证据支持。桑代克把饥饿的猫放在一个封闭的笼子里，笼子外摆着一盘可望但不可及的食物。这个笼子的门是需要三个分离的动作才能从里面打开的：两个门栓都必须提起，一个要按压带有铁链的台板，另一个要抓外露的绳索，而门外的板条之一必须转到垂直角度。这时门便会自动开启，因为有一重物系于一条拴在门外的绳索上，可以施加拉力于门。他把猫放进箱中，观察猫的行为。开始，猫是无意识的、无目的地乱抓，但当偶然碰到那条绳索或拉环或触及按钮后，门就自动打开，然后，就用食物予以强化。经过几次反复后，多余的动作越来越少，最后，猫学会了解决打开门的问题。

2. 格式塔时期

格式塔理论的代表人物苛勒（Klahr）从一开始就反对桑代克的联想主义，认为动物的问题解决不是简单的尝试——错误学习或再现学习，而是以事物的整体结构特征来理解心理，认为问题解决过程是一个顿悟的过程。苛勒（1913—1917）对黑猩猩的研究最典型。在对黑猩猩的研究里，苛勒布置了两种作业：一种作业是在房间里放着一些木箱，房间的天花板上吊着一串香