数学加油站

微分方程

——常微分方程

主　审　王雪生

主　编　杨作东

副主编　杨会生

电子科技大学出版社

数学加油站

微 分 方 程

——常微分方程

主　审　王雪生

主　编　杨作东

副主编　杨会生

编　委（以姓氏笔划为序）

孔祥勤　刘海亮　毕卫萍

张学录　潘　君

电子科技大学出版社

微 分 方 程

——常微分方程

主　审　王雪生

主　编　杨作东

副主编　杨会生

出　　版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)

责任编辑:周清芳

发　　行:电子科技大学出版社

印　　刷:北京市朝教印刷厂

开　　本:850mm×1168mm　1/32　印张:8　字数:220 千字

版　　次:1995 年 7 月第一版

印　　次:2005 年 10 月第二次印刷

书　　号:ISBN 7-81043-232-X/O·9

定　　价:20.00 元

前　言

本书包括绪论、一阶微分方程的初等积分法、一阶微分方程的解的存在定理、线性微分方程(组)的一般理论、线性微分方程(组)的解法、非线性微分方程、一阶偏微分方程初步。各章配有习题,并附有相应的答案。

本书作者是高等院校从事教学工作的教师,根据多年的教学经验,力求使本书做到说理浅显,叙述详细,精选例题,便于教学。本书可作为综合性大学和师范院校数学专业,以及师范专科学校数学科和各类大学数学专业函授以及成人教育的常微分方程课程的教材和自学教材。

参加本书编写工作的作者及章目如下:毕卫萍和孔祥勤(第一章,第六章),杨作东(第二章),张学录(第三章),杨会生(第四章),潘君(第五章),刘海亮(第七章).最后由王雪生审定,杨作东和杨会生统编全书。

限于编者水平,对教材中存在的不妥之处,欢迎广大读者提出批评和指正。

目　录

第一章　绪论 …………………………………………… (1)

§1.1　微分方程　某些实际问题的数学模型 ………… (2)

§1.2　基本概念 ………………………………………… (6)

§1.3　常微分方程的主要任务 ……………………… (14)

第二章　一阶微分方程的初等积分法 ………………… (18)

§2.1　变量分离方程与变量变换 …………………… (18)

§2.2　线性方程与常数变易法 ……………………… (26)

§2.3　恰当方程与积分因子 ………………………… (34)

§2.4　一阶隐方程与参数表示 ……………………… (44)

§2.5　应用举例 ………………………………………… (50)

第三章　一阶微分方程的解的存在定理 ……………… (56)

§3.1　解的存在唯一性定理与逐步逼近法 ………… (57)

§3.2　解的延拓 ………………………………………… (70)

§3.3　解对初值的连续依赖性和可微性 …………… (74)

第四章　线性微分方程(组)的一般理论 ……………… (78)

§4.1　线性微分方程组的存在唯一性定理 ………… (78)

§4.2　线性微分方程组的一般理论 ………………… (91)

§4.3　高阶线性微分方程的一般理论 ……………… (109)

第五章　线性微分方程(组)的解法 ………………………… (120)
　§5.1　常系数线性方程的解法 ………………………… (120)
　§5.2　某些变系数线性方程的解法 …………………… (139)
　§5.3　常系数线性微分方程组的解法 ………………… (147)
　§5.4　应用举例 ……………………………………… (162)

第六章　非线性微分方程 ……………………………… (167)
　§6.1　用降阶法求解高阶非线性方程 ……………… (167)
　§6.2　微分方程组及其首次积分 …………………… (170)
　§6.3　平面定常系统的初等奇点 …………………… (180)
　§6.4　平面定常系统的极限环 ……………………… (193)
　§6.5　按线性近似判定微分方程组解的稳定性 …… (203)
　§6.6　李亚普诺夫第二方法 ………………………… (213)

第七章　一阶偏微分方程初步 ………………………… (223)
　§7.1　基本概念 ……………………………………… (223)
　§7.2　一阶线性偏微分方程与常微分方程的关系
　……………………………………………………………… (226)
　§7.3　一阶齐线性偏微分方程 ……………………… (228)
　§7.4　一阶拟线性偏微分方程 ……………………… (232)
习题答案 ……………………………………………………… (238)

第一章　绪论

我们已经遇到过各种类型的方程，如初等数学中讨论过的代数方程、指数方程、对数方程、三角方程等. 在这些方程中，作为未知量的是一个或若干个数，在数学分析中，我们讨论过函数方程，其未知量已经不是一个数，而是一个函数. 在力学、天文学、物理学及技术科学中，会大量出现另一类方程，虽然它们所含的未知量也是一个函数，但却与一般函数方程不同，即是在这类方程中还包含了未知函数的导数或微分，这类方程就是微分方程.

一般地，我们有如下定义：

定义 1　联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的关系式，称为微分方程. 如果在微分方程中，未知函数的自变量只有一个，我们称这种微分方程为常微分方程；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程.

例如方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + Cy = \sin x \tag{1.2}$$

就是常微分方程，其中 y 是未知函数，x 是自变量.

方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.4}$$

就是偏微分方程，其中 u 为未知函数，x,y,z 都是自变量.

本课程是常微分方程，今后我们把常微分方程简称为“微分方程”，有时更简称为“方程”.

微分方程有着深刻而生动的实际背景，在本章中，我们将建立几个实际问题的数学模型——微分方程，然后介绍一些基本概念.

§1.1 微分方程 某些实际问题的数学模型

例1 上抛运动

我们将质量为 m 的物体，以初速 v_0 竖直向上抛出，假设物体在空气中受到的阻力与物体运动的速度成正比，试求其运动规律.

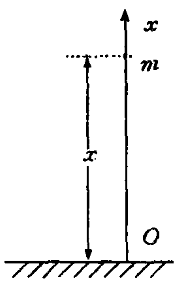


图 1.1

解 为了描述这个运动，如图(1.1)建立坐标系，取物体运动时所沿的垂直于地面的直线为 x 轴，x 轴与地面的交点 O 为坐标原点，且规定背离地心的方向为 x 轴的正向.

设物体在时刻 t 的位置坐标为 $x(t)$，于是物体运动的瞬时速度 v 和瞬时加速度 a 可分别表示为

$$v=\frac{dx}{dt},\quad a=\frac{d^2x}{dt^2}$$

显然，我们现在不能直接找出 x 关于 t 的函数关系式(即物体的运动规律)，但是我们可以根据牛顿第二运动定律

$$ma=\boldsymbol{F} \tag{1.5}$$

及所设条件，得到 $x(t)$ 应满足的关系式.

(1.5)式中的 F 表示物体所受外力的合力，由假设条件，物体受重力及空气阻力两种力的作用. 由于重力方向与 x 轴正向相

反，故所受重力在 x 轴上的投影应为 $F_1=-mg$，其中 g 是重力加速度；由于阻力与运动速度成正比，且阻力方向与速度方向相反，故阻力在 x 轴上的投影应为 $F_2=-k\dfrac{dv}{dt}$，其中常数 $k>0$ 为阻尼系数. 从而物体所受外力的合力在 x 轴上的投影为 $F=F_1+F_2=-(mg+k\dfrac{dv}{dt})$，将 $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 及 $F=-(mg+k\dfrac{dv}{dt})$ 代入(1.5)式，得到

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-(mg+k\frac{dx}{dt})$$

或者

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=-g \tag{1.6}$$

这就是上抛运动规律 $x=x(t)$ 所满足的微分方程.

现在仅讨论 $k=0$ 的情形，即讨论物体在真空中的运动情况. 此时方程变为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g \tag{1.7}$$

对(1.7)式作两次积分，分别得到

$$\frac{dx}{dt}=-gt+C_1 \tag{1.8}$$

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.9}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

显然，物体的运动状态 $x=x(t)$，应与物体的初始状态，即起始时刻 $t=0$ 时的初始位置和初始速度

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0 \tag{1.10}$$

有关，因为从不同高度，以不同速度抛出的物体，其运动状态当然是有差别的，条件(1.10)称为初始条件. 于是，我们现在的问题归结为求微分方程(1.7)满足初始条件(1.10)的未知函数 $x(t)$.

将(1.10)代入(1.8)及(1.9)，得到

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = x_0$$

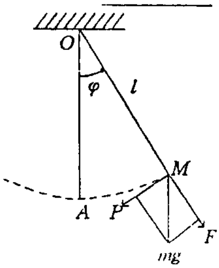
将所得 C_1, C_2 代入(1.9)式,最后得到物体在真空中的运动规律为

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.11}$$

其中 T 为物体落地时间.

例 2　数学摆

质量为 m 的质点 M,用长度为 l 的细线县挂于 O 点,如图(1.2)所示. 如不计细线的质量,在重力作用下,M 在垂直于地面的平面上沿圆周作往复摆动,称为数学摆. 试求摆的运动方程.



图(1.2)

解　取反时针运动方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向. 忽略阻力不计,只考虑在重力作用下摆的运动方程.

质点 M 沿圆周的切向速度 $v = l\dfrac{d\varphi}{dt}$,切向加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = l\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$,使摆作往复运动的力为重力 mg 的切向分力 $\overrightarrow{MP}$. 因为总是使质点 M 向着平衡位置 A 的方向运动,即当角 φ 为正时,向减小 φ 的方向运动;当角 φ 为负时,向增大 φ 的方向运动,所以 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$.

因此,由牛顿第二运动定律,得到摆的运动方程为

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.12}$$

如果只研究摆的微小振动,即 φ 比较小时,以 φ 代替 $\sin\varphi$,我们得到摆的微小振动运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{1.13}$$

如果假设沿着摆的运动方向存在着一个与速度 v 成比例的阻力，假设阻力系数为 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.14}$$

如果沿摆运动方向恒有外力 $F(t)$ 作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=F(t) \tag{1.15}$$

当要确定摆的某一特定运动时，我们应当给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，}\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.16}$$

其中 φ_0 表示摆的初始位置，ω_0 表示摆的初始角速度.

例 3　镭的衰变

放射性元素镭，因不断地放射出各种射线，故其质量随着时间的增加而逐渐减少（这种现象称为衰变）. 由实验可知，镭的衰变规律是：衰变速度与它剩余的质量成正比. 已知在某一时刻 $t=t_0$ 时镭的质量为 R_0，试求它在任何时刻 t 的质量 $R(t)$.

解　由于镭的质量 $R(t)$ 随着时间 t 的增加而减少，故 $R(t)$ 是减函数，因而镭的衰变速度及 $R'(t)$ 应是负的，由镭的衰变规律得到

$$\frac{dR}{dt}=-kR \tag{1.17}$$

其中 $k>0$ 为比例常数. 这就是 $R(t)$ 所满足的微分方程. 显然，镭的质量 $R(t)$ 还依赖于初始时刻 $t=t_0$ 时的质量 R_0，即与初始条件

$$R(t_0)=R_0 \tag{1.18}$$

有关，于是，问题归结为求方程(1.17)满足初始条件(1.18)的未知函数 $R(t)$.

例 4 一个几何问题

设曲线上任一点的切线在 x 轴上的截距等于切点纵坐标的立方. 试建立曲线所满足的微分方程.

解 设所求平面曲线的方程为 $y=y(x)$. 过曲线上任一点 (x,y) 的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

其中 x,Y 为切线上的流动坐标. 令 $Y=0$,得到切线在 x 轴上的截距为 $x-\frac{y}{y'}$,由题设条件得到

$$x - \frac{y}{y'} = y^3$$

即
$$y' = \frac{y}{x - y^3} \tag{1.19}$$

这就是该曲线所满足的微分方程.

从上面的例子可以看出,微分方程与许多实际问题之间有着密切的联系. 这是因为在寻求某些变量之间的函数关系时,往往不易或不能直接找到这些函数关系,但是却能建立有关变量和它们的导数(或微分)之间的关系,即微分方程. 这是用微分方程解决实际问题的首要步骤、同时我们也看到,建立实际问题的数学模型——微分方程,也不是轻而易举的事. 在建立微分方程时,不仅需要一定的数学知识,而且还要掌握与实际问题有关的专业知识,以后我们还要介绍若干实际例子,以便逐步提高解决实际问题的能力.

§1.2 基本概念

前面我们已经介绍了微分方程、常微分方程和偏微分方程的概念. 本节我们将介绍微分方程中出现的一些基本概念.

1.2.1 微分方程的阶

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶. 例如(1.1)和(1.2)分别为一阶、三阶常微分方程，而(1.3)和(1.4)分别为一阶、二阶偏微分方程.

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1.20}$$

其中 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$是 x、y、$\frac{dy}{dx}$、$\cdots$、$\frac{d^ny}{dx^n}$的已知函数，x 为自变量，y 为未知函数，这里的 F 必须明显地包含有 n 阶导数 $\frac{d^ny}{dx^n}$，至于低于 n 阶的导数，未知函数以及自变量可能不出现于 F 的表达式中.

1.2.2 线性与非线性微分方程

如果微分方程(1.20)的左端是关于 $y,\frac{dy}{dx},\cdots\frac{d^ny}{dx^n}$的一次有理整式，则称它为线性微分方程，否则，称为非线性微分方程.

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1.21}$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x)$和 $f(x)$为 x 的已知函数.

例如，方程(1.2)是三阶线性微分方程，方程(1.6)、(1.13)、(1.14)和(1.15)都是二阶线性微分方程，而方程(1.12)为二阶非线性微分方程.

1.2.3 微分方程的解与通解

微分方程的主要问题之一是要求出其中的未知函数，此函数就称为微分方程的解，确切地说，有

定义 2 假设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.20)后，使其在 I 内关于自变量 x 变为恒等式

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.20)的解，并把区间 I 称为解 $y=\varphi(x)$ 的定义区间.

简单地说，所谓微分方程的解是指这样的函数，将它代入方程后，能使方程变为恒等式.

例 5 试验证函数

$$y=\mathrm{tg}x,\qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

是方程

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

的解.

解 显然 $y=tgx$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上可导，将 $y=tgx$ 及 $\frac{dy}{dx}=sec^2x=1+tg^2x$ 代入方程后，有

$$1+\mathrm{tg}^2x\equiv 1+\mathrm{tg}^2x$$

所以，$y=tgx$ 是该方程的解.

由于微分方程的解是函数，而函数的表达形式有显式 $y=\varphi(x)$ 及隐式 $\Phi(x,y)=0$，故其解的表达式也有隐式形式.

如果由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.20)的解，则称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程(1.20)的隐式解(或称为积分).

例 6 试验证

$$y^2-x^2=1$$

是方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

的隐式解.

解 根据隐函数求导规则,我们知道由 $y^2-x^2=1$ 所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}=-\frac{-2x}{2y}=\frac{x}{y}$,代入方程后,使其变为恒等式$\frac{x}{y}\equiv\frac{x}{y}$,故 $y^2-x^2=1$ 是该方程的隐式解.

为了简单起见,我们以后对解与隐式解不加区别,统称为方程的解.

我们在例 1 中出现的含有两个任意常数 C_1 和 C_2 的函数(1.9)是二阶方程(1.7)的解,这种解称为通解,一般地,有

定义 3 如果 n 阶方程(1.20)的解 $y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$含有 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,则称它为方程(1.20)的通解,所谓 n 个常数 $C_1,C_2,\cdots C_n$ 是独立的,是指 $\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}$ 关于 C_1,$C_2\cdots,C_n$ 的雅可比($Jacobi$)行列式

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.22}$$

其中 $\varphi^{(k)}(k=1,2\cdots,n-1)$表示 φ 对 x 的 k 阶导数.

容易验证,函数(1.9)是方程(1.7)的通解.

类似地，可以定义 n 阶方程(1.20)的隐式通解(也称通积分)．我们以后对通解与隐式通解不加区别，统称为通解．

1.2.4 初始条件与特解

从第一节的例题中我们已经看到，在实际应用中，往往是要求出微分方程满足某种特定条件的解．这种特定的条件称为定解条件，常见的定解条件有初始条件和边界条件．求微分方程满足定解条件的解，就是所谓定解问题，定解条件为初始条件的定解问题，称为初值问题，我们在本课程中仅讨论初值问题．

n 阶方程(1.20)的初始条件是指如下的 n 个条件：

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时，} y = y_0,\ \frac{dy}{dx} = y'_0, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \tag{1.23}$$

其中 $x_0, y_0, y'_0, \cdots y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数，初始条件(1.23)也可写为

$$y(x_0) = y_0 \text{ 时，} \frac{dy(x_0)}{dx} = y'_0, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \tag{1.24}$$

定义 4 我们把方程(1.20)满足初始条件(1.24)的解称为特解．

一般地，当我们知道了方程的通解后，利用初始条件确定出通解中任意常数的值，即可得到满足初始条件的特解．

例 7 容易验证，函数

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} \tag{1.25}$$

是三阶微分方程

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \tag{1.26}$$

的通解．其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数，试求满足初始条件

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1 \tag{1.27}$$

的特解．

解 由(1.25)可得

$$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x}$$

$$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{-2x} + 9C_3e^{3x}$$

利用初始条件(1.27)，得到关于，C_1，C_2，C_3 的方程组

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 1 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases}$$

解之得：$C_1=0$，$C_2=-\frac{1}{5}$，$C_3=\frac{1}{5}$．从而得到方程(1.26)满足方程初始条件(1.27)的解为

$$y = -\frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}.$$

1.2.5 积分曲线和方向场

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.28}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 的几何图象是 xy 平面上的一条曲线，我们称它为微分方程(1.28)的积分曲线．方程的通解 $y=\varphi(x,C)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线，我们称这族曲线为方程(1.28)的积分曲线族，满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点(x_0,y_0)的一条积分曲线．

微分方程(1.28)的右端是已知函数 $f(x,y)$，而左端表示在(x,y)点处积分曲线的切线斜率．因此，微分方程(1.28)建立了点的坐标与该点处积分曲线的的切斜率$\frac{dy}{dx}$之间的关系．

设函数 $f(x,y)$的定义域为 D，在 D 内每一点(x,y)处，以 $f(x,y)$的值为斜率，画上一个小直线段．我们把带有这种小直线