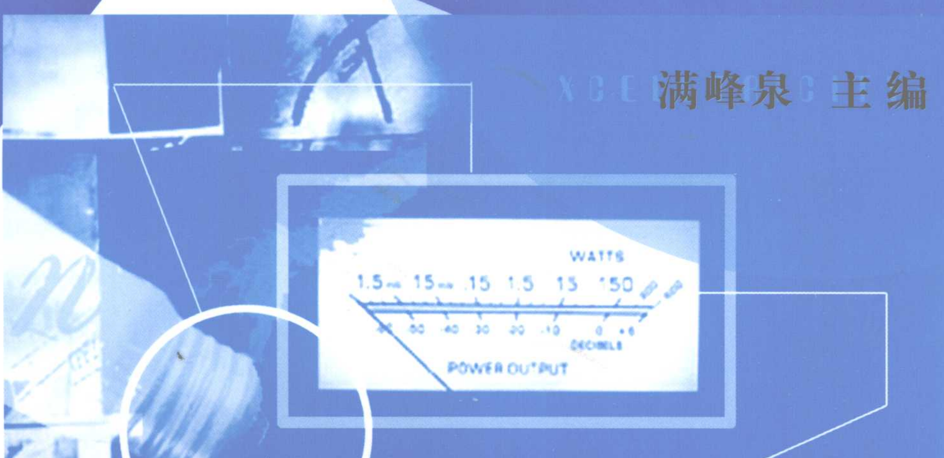
21世纪高等教育规划教材

物理学 学习指导书

满峰泉 主编



西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21 世纪高等教育规划教材

物理学学习指导书

主　编　满峰泉

副主编　卢振亮　王绪安　纪延俊

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目(CIP)数据

物理学学习指导书/满峰泉主编.—成都:西南交通大学出版社,2007.12

21世纪高等教育规划教材

ISBN 978-7-81104-773-8

Ⅰ.物… Ⅱ.满… Ⅲ.物理学—高等学校—教材 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第180186号

21 Shiji Gaodeng Jiaoyu Guihua Jiaocai

21世纪高等教育规划教材

物 理 学 学 习 指 导 书

Wulixue Xuexi Zhidaoshu

主编 满峰泉

*

责任编辑 张华敏

特邀编辑 高青松 翟 瑾

封面设计 水木时代

西南交通大学出版社出版发行

(成都市二环路北一段111号 邮政编码:610031 发行部电话:028-87600564)

http://press.swjtu.edu.cn

北京广达印刷有限公司印刷

*

成品尺寸:170 mm×228 mm 印张:12

字数:214千字

2007年12月第1版 2007年12月第1次印刷

ISBN 978-7-81104-773-8

定价:26.00元

前　言

为了帮助使用刘克哲先生主编的《物理学》(第二版)作为教材的读者更好地掌握教材的主要内容，达到教材规定的基本要求，滨州学院物理与电子科学系的教师编写了这本学习指导书。

本书是按照教材的顺序编写的，每章都由目的与要求、基础知识、难点分析和典型例题四部分组成，在知识体系、内容取舍、文字表述以及例题的选取等方面更趋于完善；同时，本书在明确课程的基本要求、正确理解和掌握基本概念和基本规律、了解解题的基本方法和步骤方面，将起到一定的指导作用。在使用本书的过程中，读者可根据自己的具体情况加以参考。当然，任何指导书都不能代替读者个人的独立思考和刻苦学习，要学好物理学，必须深入钻研、多做多练，丰硕的果实只能来自辛勤的劳动。

本书反映了编者在教学中的一些经验和体会，同时也汲取了相关物理学教学参考书中的精髓，以便使学生在学习过程中能尽量少走弯路，从而达到更好地领会教材、更进一步掌握知识的目的。书中涉及的大量问题，或者来自答疑时学生的提问，或者从学生的提问中得到启发，进一步推想出来的，所以，本书若能对在校学生的学习和教授此课程的教师有参考价值的话，编者将感到十分欣慰。同时，由于编者水平有限，书中一定会有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

在本书的编写过程中，曾得到过我系多位教师的指点和帮助，在此表示深深的谢意！

满峰泉

2007 年 11 月

目　录

第一章　质点的运动

一、目的与要求

(1) 深刻理解描述质点运动及运动变化的基本物理量；掌握位置矢量、位移、速度、加速度的定义和性质，明确其矢量性、相对性和瞬时性。

(2) 熟练掌握质点运动学两类问题，即用微分法由已知的运动学方程求速度、加速度；用积分法由已知的速度或加速度求质点的运动学方程。

(3) 熟悉并掌握在几种常见坐标系(直角坐标系、自然坐标系、极坐标系)下速度、加速度的表达形式。

(4) 掌握圆周运动的角量表示及角量与线量间的关系。

(5) 掌握速度、加速度变换式，并会运用变换式求解质点相对运动类问题。

(6) 准确理解牛顿运动定律的基本内容，熟练掌握用隔离法分析物体受力和解题的基本思路。

二、基础知识

1. 质点和参考系

(1) 质点：没有大小及形状，而只有一定质量的理想物体。

(2) 参考系：描述物体运动时作为参考物的物体或物体群。

(3) 坐标系：为了定量描述质点的运动状态，需在参考系内建立与之保持相对静止的坐标系。常见的有直角坐标系、自然坐标系和极坐标系。

2. 描述质点运动的物理量

(1) 位置矢量：从坐标原点引向质点所在位置的有向线段，用 $\vec{r}$ 表示。

在直角坐标系中：

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

(2) 运动方程：反映质点的位置矢量随时间变化的关系式，用 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 表示。

在直角坐标系中：

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

分量式(也称标量式)：
$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

在自然坐标系中：

$$S=S(t)$$

(3) 位移：由质点的始态位置指向末态位置的有向线段，用 $\Delta\vec{r}$ 表示。

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

在直角坐标系中：

$$\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$$

(4) 路程：质点运动过程中所经轨迹的长度，是标量，用 ΔS 表示。

一般情况下：　$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta S$

(5) 速度：质点位矢对时间的一阶导数，即

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中：

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

速度的大小是速率，是标量，且有

$$v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

(6) 加速度：质点速度对时间的一阶导数或位矢对时间的二阶导数，即

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中：

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}\end{aligned}$$

在自然坐标系中：

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_\mathrm{n}=a_\tau\vec{\tau}_0+a_\mathrm{n}\vec{n}_0=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0$$

式中，ρ 为曲率半径；$\vec{\tau}_0$ 为切向单位矢量；$\vec{n}_0$ 为法向单位矢量。

3. 牛顿运动定律

(1) 牛顿第一定律：任何物体都要保持静止或匀速直线运动状态，直到有外力迫使它改变这种状态为止。

(2) 牛顿第二定律：质点所获得的加速度 $\vec{a}$ 的大小与它所受合外力 $\vec{F}$ 大小成正比，与质点质量 m 成反比，$\vec{a}$ 的方向与合外力 $\vec{F}$ 的方向相同。

数学表达式为为　$\vec{F}=m\vec{a}$

在直角坐标系中：$\begin{cases} F_x = ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y = ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ F_z = ma_z = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$

自然坐标系中：$\begin{cases} F_{\mathrm{n}} = ma_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{\rho} \\ F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

(3) 牛顿第三定律：当物体 A 以力 $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$作用于物体 B 时，物体 B 也必定同时以力 $\vec{F}_{\mathrm{BA}}$作用于物体 A，$\vec{F}_{\mathrm{AB}}$与 $\vec{F}_{\mathrm{BA}}$大小相等，方向相反，共处于同一直线上，即

$$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = \vec{F}_{\mathrm{AB}}$$

牛顿运动定律成立的条件：① 惯性系；② 宏观低速运动。

4. 力学中常见的几种力

(1) 万有引力：宇宙中一切有质量的物体之间的相互作用力。其大小为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中，m_1，m_2 分别表示两物体的质量；r 为物体间的中心距离。

(2) 重力：本质上归结于万有引力，即

$$G = mg$$

(3) 弹性力：包括拉力、支持力等，本质上归结为电磁相互作用。胡克定律为

$$F = -kx$$

(4) 摩擦力：本质上归结为电磁相互作用，包括滑动摩擦力和静摩擦力，即

$$f_{滑} = \mu_{滑} N, \quad 0 \leqslant f_{静} \leqslant \mu_{静} N$$

5. 应用牛顿运动定律解题的基本步骤

(1) 看清题意，明确研究对象。

(2) 找出已知量与未知量之间的关系。

(3) 建立适当的坐标系，列方程，求解。

6. 相对运动和伽利略变换

(1) 运动的相对性：对同一物体运动的描述，随着参考系选择的不同一般是不同的。

(2) 伽利略速度变换式：两个相互平动运动的坐标系中的运动速度具有如下关系，即

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}$$

这里 $\vec{v}$,$\vec{v}'$,$\vec{u}$ 分别代表绝对速度、相对速度和牵连速度。

三、难点分析

1. 关于矢量性

(1) 注意区分矢量 $\vec{A}$ 的增量的模 $|\Delta\vec{A}|=|\vec{A}_2-\vec{A}_1|$ 和模的增量 $\Delta A=|\vec{A}_2|-|\vec{A}_1|$。在运动学中要区分：

位矢的增量的模　　$|\Delta\vec{r}|=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$

位矢的模的增量　　$\Delta r=|\vec{r}_2|-|\vec{r}_1|$

速度的增量的模　　$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|$

速度的模的增量　　$\Delta v=|\vec{v}_2|-|\vec{v}_1|$

两者的时间变化率也存在如下不同：

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\neq\frac{dr}{dt}\begin{cases}\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=v & \text{表示速度大小}\\[2ex] \dfrac{dr}{dt}=v_r & \text{表示位矢的模的变化率}\end{cases}$$

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|\neq\frac{dv}{dt}\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}=a_\tau & \text{表示切向加速度大小}\\[2ex] \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=a & \text{表示加速度大小}\end{cases}$$

(2) 切忌将矢量与其模连等。例如，$\Delta\vec{r}=4\vec{i}+2\vec{j}=4.47\ (\text{m})$ 就是一种错误的书写方式。

(3) 用矢量方法来描述物理规律，其优越性在于：

① 具有鲜明的物理意义。

② 简洁的数学形式及对于各种坐标系保持不变的形式。具体运算时，常将各矢量写成坐标分量式，如一个做平面曲线运动的质点，其加速度 $\vec{a}$ 可表示为

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}=a_\tau\vec{\tau}_0+a_n\vec{n}_0=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0$$

2. 关于瞬时性

在中学所遇到的物理量都是恒量，如匀加速度（即 $\vec{a}=$ 常量），恒力做功（即 $\vec{F}=$ 常量），但大学物理中我们接触到的基本上都是变量，如 $\vec{a}=\vec{a}(t)$，$\vec{F}=\vec{F}(t)$ 等，因此，必须应用微积分知识。

在运动学中，从运动方程求速度、加速度主要是求导的方法；从速度、加速度和初始条件求运动方程主要是用积分的方法。当被积函数的变量与积分元的变量不一致时，要通过恒等变换使得两者一致。例如，一质点的加速度 $a = 3-5x$，求其速度表达式。显然，若只是简单地写成如下形式

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3-5x$$

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=(3-5x)\mathrm{d}t$$

是不能完成题目所求的。因为等式右边被积函数$(3-5x)$是 x 的函数，而积分变量是 t，为完成这个积分，需进行下面的恒等变换：

因为
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot v$$

所以
$$v\mathrm{d}v=(3-5x)\mathrm{d}x$$

若设初始条件为 $x_0=0$，$v_0=0$，则有

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(3-5x)\mathrm{d}x$$

积分得
$$v=\sqrt{6x-5x^2}$$

3. 关于自然坐标系

这里的关键是记住下面一组公式并能熟练应用：

$$\begin{cases} v=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \\ a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2} \\ a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{\rho}=\dfrac{v^2}{R} \quad (\text{圆周运动时}, \rho=R) \end{cases}$$

4. 关于牛顿运动定律的应用

(1) 牛顿定律只在惯性系中成立，如果所研究的问题是地面上运动的物体，一般可选地球为惯性系。确定研究对象后，正确地画出隔离体受力图，对研究对象的运动情况进行分析。

(2) 运用微积分处理力学问题。解决这类问题的关键有两点：其一是根据力函数的形式选择运动定律的形式；其二是正确地分离变量。

5. 关于相对性

明确伽利略公式变换中各量的物理含义，分清每个物理学量与观察者之间的关系，即要区分“牵连”、“相对”、“绝对”等物理量，同时注意公式运用的条件和范围。

四、典型例题

例 1-1　已知某质点在 $t=0$ 时刻位于 $\vec{r}_0=2\vec{i}+3\vec{j}$ (m)点处，且以初速 $\vec{v}_0=0$，加速度 $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$ ($\mathrm{m/s^2}$) 运动。试求：

(1) 质点在任意时刻的速度；

(2) 质点的运动方程。

解

(1) 由题意可知，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=3\vec{i}+4\vec{j}$，即

$$\mathrm{d}\vec{v}=(3\vec{i}+4\vec{j})\mathrm{d}t$$

对其两边取积分有

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t(3\vec{i}+4\vec{j})\mathrm{d}t$$

所以，质点在任意时刻的速度为

$$\vec{v}=3t\vec{i}+4t\vec{j}$$

(2) 由 $\vec{v}=3t\vec{i}+4t\vec{j}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=3t\vec{i}+4t\vec{j}$$

即

$$\mathrm{d}\vec{r}=(3t\vec{i}+4t\vec{j})\mathrm{d}t$$

对其两边取积分有

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^t(3t\vec{i}+4t\vec{j})\mathrm{d}t$$

即

$$\vec{r}=\frac{3}{2}t^2\vec{i}+2t^2\vec{j}+\vec{r}_0$$

把 $\vec{r}_0=2\vec{i}+3\vec{j}$ 代入，可得质点的运动方程为

$$\vec{r}=\left(\frac{3}{2}t^2+2\right)\vec{i}+(2t^2+3)\vec{j}$$

例 1-2　一质点沿 x 轴做直线运动，其运动学方程为 $x=4.5t^2-2t^3$，求：

(1) 1 ~ 2 s 内质点的平均速度；

(2) 1 s 末和 2 s 末的速度及加速度；

(3) 第 2 s 内质点通过的路程。

解

(1) 由平均速度 $\bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$，在 1 ~ 2 s 内平均速度大小为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{(4.5t_2^2-2t_2^3)-(4.5t_1^2-2t_1^3)}{t_2-t_1}$$

$$=\frac{(4.5\times2^2-2\times2^3)-(4.5\times1^2-2\times1^3)}{2-1}$$

$$=-0.5\ (\mathrm{m/s})$$

此平均速度的方向为指向 x 轴的负方向。

(2) 因 $x=4.5t^2-2t^3$,所以

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4.5t^2-2t^3)=9.0t-6t^2$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(4.5t^2-2t^3)=9.0-12t$$

当 $t=1$ s 时,

$v_1=9.0t_1-6t_1^2=9.0\times1-6\times1^2=3.0\ (\mathrm{m/s})$ (x 轴正方向)

$a_1=9.0-12t_1=9.0-12\times1=-3.0\ (\mathrm{m/s^2})$ (x 轴负方向)

当 $t=2$ s 时,

$v_2=9.0t_2-6t_2^2=9.0\times2-6\times2^2=-6.0\ (\mathrm{m/s})$ (x 轴负方向)

$a_2=9.0-12t_2=9.0-12\times2=-15.0\ (\mathrm{m/s^2})$ (x 轴负方向)

(3) 由 $a_1<0, a_2<0$ 可知,质点做减速运动,先求速度为 0 的时间,由

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0=9.0t-6t^2$$

得 $t_1=1.5$ s,$t_2=0$ s,则 $t_1=1.5$ s 即为所求。这说明,在 1.5 s 时刻前后,质点的运动方向在改变,于是,在 1 ～ 1.5 s 内,质点向 x 轴正方向运动,则

$$\Delta x_{1\sim1.5}=x_{1.5}-x_1=(4.5\times1.5^2-2\times1.5^3)-(4.5\times1^2-2\times1^3)$$
$$=0.875\ (\mathrm{m})$$

在 1.5 ～ 2 s(即第 2 s 内的后半秒)内,质点向 x 轴负方向运动,则

$$|\Delta x_{1.5\sim2}|=|x_2-x_{1.5}|=|(4.5\times2^2-2\times2^3)-(4.5\times1.5^2-2\times1.5^3)|$$
$$=1.375\ (\mathrm{m})$$

于是,第 2 s 内质点通过的路程为

$$\Delta x_{1\sim2}=\Delta x_{1\sim1.5}+|\Delta x_{1.5\sim2}|=2.25\ (\mathrm{m})$$

例 1-3　已知某质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+(3t^2+4)\vec{j}$ (m),试求:

(1) $t=1$ s 时切向加速度和法向加速度的大小;

(2) $t=1$ s 时的曲率半径。

解

(1) 因为　$\vec{r}=(2t)\vec{i}+(3t^2+4)\vec{j}$

则质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}+6t\vec{j},\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=6\vec{j}$$

即得质点在任意时刻速度的大小，速率为

$$v = \sqrt{2^2 + (6t)^2} = 2\sqrt{1 + 9t^2}$$

于是质点在任意时刻切向加速度的大小为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\sqrt{1 + 9t^2}) = \frac{18t}{\sqrt{1 + 9t^2}}$$

由此可知，质点在 1 s 时切向加速度的大小为

$$a_\tau = \frac{18}{\sqrt{1 + 9}} = 5.69 \quad (\mathrm{m/s^2})$$

则质点在 $t = 1$ s 时法向加速度的大小为

$$a_\mathrm{n} = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{6^2 - 5.69^2} = 1.91 \quad (\mathrm{m/s^2})$$

(2) 因为质点在 $t = 1$ s 时的速度的大小为

$$v = 2\sqrt{1 + 9 \times 1^2} = 2\sqrt{10} \quad (\mathrm{m/s})$$

所以，$t = 1$ s 时的曲率半径为

$$R = \frac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \frac{40}{1.91} = 21 \quad (\mathrm{m})$$

例 1-4　已知雨滴下落过程中受到的阻力为 $f = kSv^2$，式中 k 为比例常数，S 为雨滴的横截面积，v 为雨滴在任意时刻的下落速度，试比较小雨滴和大雨滴在空气中下落时，哪一个下落得快？

解　雨滴在空气中下落时仅受重力和空气阻力的作用，如图 1-1 所示，由牛顿第二定律得

图 1-1

$$mg - kSv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由此微分方程可得 $v = \dfrac{\sqrt{\dfrac{mg}{kS}}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kSg}{m}}t}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kSg}{m}}t}}$

于是

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{kS}}$$

而实际上，随着雨滴速度的增大，阻力从零开始不断增加，直到与重力平衡，此后雨滴将做匀速直线下落，此时雨滴达到最大速度，则

$$mg = kSv_{\max}^2,\quad v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{kS}}$$

设雨滴的半径为 R，密度为 ρ，则 $S = \pi R^2$，$m = \dfrac{4}{3}\rho\pi R^3$，代入上式可得雨滴下落的最大速度为 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{4\rho gR}{3k}}$，因此大雨滴下落得快。

例 1-5　若有一质点由静止开始，从半径为 a 的光滑柱面的最高点自由下滑，问质点滑到何处时离开圆柱面？

解　分析受力如图 1-2 所示，由牛顿运动定律得

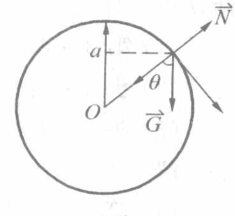


图 1-2

对法向有　$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{a}$$

对切向有　$$mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

变换切向方程，有

$$mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\cdot\left(\frac{v}{a}\right)$$

整理并积分，有

$$\int_0^\theta (ag\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^v v\mathrm{d}v$$

其中 $\theta = 0$ 时，$v = 0$，此时物体处于圆柱面的最高点；$\theta = \theta$ 时，$v = v$，此时物体刚好与圆柱体脱离。所以上式积分可得

$$v^2 = 2ag(1 - \cos\theta)$$

将其代入法向方程，并令 $N = 0$（此时物体与圆柱体开始脱离），可解得

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

例 1-6　一质点在平面上做曲线运动，t_1 时刻位置矢量为 $\vec{r}_1 = -2\vec{i} + 6\vec{j}$，$t_2$ 时刻的位置矢量为 $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$，求：

(1) 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内质点的位移矢量式；

(2) 该段时间内位移的大小和方向；

(3) 在坐标图上画出 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 及 $\Delta\vec{r}$（题中 r 以 m 计，t 以 s 计）。

解

(1) 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内质点的位移矢量式为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4\vec{i} - 2\vec{j})\ \text{(m)}$$

(2) 该段时间内位移的大小为

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}\ \text{(m)}$$

该段时间内位移的方向与 x 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-2}{4}\right) = -26.6^\circ$$

(3) 坐标图上的表示如图 1-3 所示。

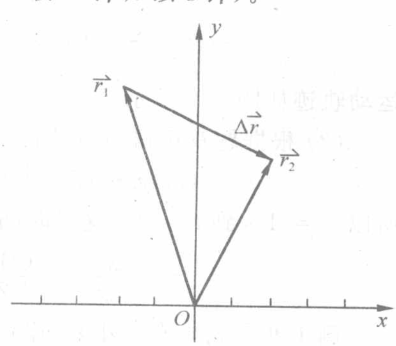


图 1-3

例 1-7 某质点做直线运动，其运动方程为 $x = 1 + 4t - t^2$，其中 x 以 m 计，t 以 s 计。求：

(1) 第 3 s 末质点的位置；

(2) 头 3 s 内的位移大小；

(3) 头 3 s 内经过的路程。

解

(1) 第 3 s 末质点的位置为

$$x(3) = 1 + 4 \times 3 - 3^2 = 4 \quad (\mathrm{m})$$

(2) 头 3 s 内的位移大小为

$$x(3) - x(0) = 3 \quad (\mathrm{m})$$

(3) 因为质点做反向运动时有 $v(t) = 0$，所以令 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$，即

$$4 - 2t = 0, \quad t = 2 \mathrm{~s}$$

因此，头 3 s 内经过的路程为

$$|x(3) - x(2)| + |x(2) - x(0)| = |4 - 5| + |5 - 1| = 5 \quad (\mathrm{m})$$

例 1-8 已知某质点的运动方程为 $x = 2t, y = 2 - t^2$，式中，t 以 s 计，x 和 y 以 m 计。求：

(1) 计算并图示质点的运动轨迹；

(2) 求出 $t = 1$ s 到 $t = 2$ s 这段时间内质点的平均速度；

(3) 计算 1 s 末和 2 s 末质点的速度；

(4) 计算 1 s 末和 2 s 末质点的加速度。

解

(1) 由质点运动的参数方程 $x = 2t, y = 2 - t^2$ 消去时间参数 t，得质点的运动轨迹为

$$y = 2 - \frac{x^2}{4} \quad (x > 0)$$

运动轨迹如图 1-4 所示。

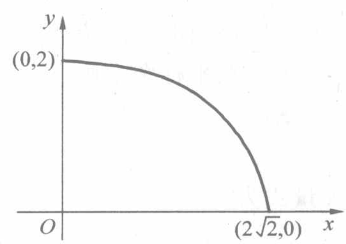


图 1-4

(2) 根据题意可得质点的位置矢量为

$$\vec{r} = (2t)\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j}$$

所以，$t = 1$ s 到 $t = 2$ s 这段时间内质点的平均速度为

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2) - \vec{r}(1)}{2 - 1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad (\mathrm{m/s})$$

例 1-9 湖中有一小船，岸边有人用绳子跨过离河面高 H 的滑轮拉船靠岸，如图 1-5 所示，设绳子的原长为 l_0，人以匀速 $\vec{v}_0$ 拉绳，试描述小船的运动。

解 建立坐标系如图 1-5 所示，按题意，初始时刻($t=0$) 滑轮至小船的绳长为 l_0，在此后某时刻 t，绳长减小到 l_0-v_0t，此时刻船的位置为 $x=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-H^2}$，这就是小船的运动方程，将其对时间求导，可得小船的速度为

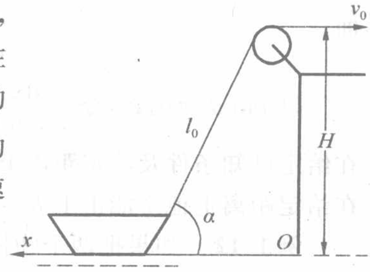


图 1-5

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{(l_0-v_0t)v_0}{\sqrt{(l_0-v_0t)^2-H^2}}=-\frac{v_0}{\cos\alpha}$$

将其对时间再求导，可得小船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2H^2}{\sqrt{[(l_0-v_0t)^2-H^2]^3}}=-\frac{v_0^2H^2}{x^3}$$

其中负号说明了小船的沿 x 轴的负向(即向岸靠拢的方向)做变加速直线运动，离岸越近(x 越小)，加速度的绝对值越大。

例 1-10 大马哈鱼总是逆流而上，游到乌苏里江上游去产卵，游程中有时要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的速度可达 32 km/h，它最高可跃上多高的瀑布？与人的跳高纪录相比如何？

解 鱼跃出水面的速度为 $v=32\ \mathrm{km/h}=8.89\ \mathrm{m/s}$，若竖直跃出水面，则跃出的高度为

$$h=\frac{v^2}{2g}=4.03\quad(\mathrm{m})$$

此高度和人的跳高纪录相比较，差不多是人所跳高度的两倍。

例 1-11 一人扔石子的最大出手速度为 $v_0=25\ \mathrm{m/s}$，他能击中一个与他的手水平距离为 $L=50\ \mathrm{m}$，高为 $h=13\ \mathrm{m}$ 处的目标吗？在这个距离上他能击中的最大高度是多少？

解 设抛射角为 θ，则已知条件如图 1-6 所示，于是石子的运动方程为

$$\begin{cases}x=(v_0\cos\theta)t\\ y=(v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

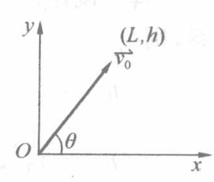


图 1-6

可得石子的轨迹方程为

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

假若石子在给定距离上能够击中目标，可令 $x=L$，此时有

$$y=L\tan\theta-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

即
$$y=-\frac{gL^2}{2v_0^2}\tan^2\theta+L\tan\theta-\frac{gL^2}{2v_0^2}$$

以 $\tan\theta$ 为函数，令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\tan\theta)}=0$，有 $\tan\theta=\frac{v_0^2}{gL}$，此时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}(\tan\theta)^2}<0$，即在给定已知条件及给定距离上能够击中目标的最大高度为 $y_{\max}=12.3\ \mathrm{m}$，故在给定距离上他不能击上 $h=13\ \mathrm{m}$ 高度处的目标。

例 1-12　如果把两个物体 A 和 B 分别以初速度 $\vec{v}_{OA}$ 和 $\vec{v}_{OB}$ 抛出去，$\vec{v}_{OA}$ 与水平面的夹角为 α，$\vec{v}_{OB}$ 与水平面的夹角为 β，如图 1-7 所示。试证明：在任意时刻，物体 B 相对于物体 A 的速度为常矢量。

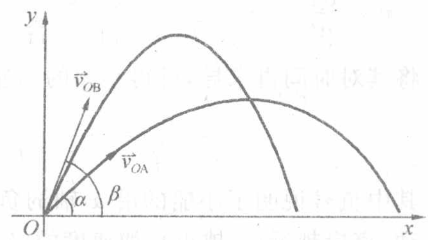


图 1-7

解　两物体在忽略风力的影响之后，将在一竖直面内做上抛运动，则两物体的速度分别为

$$\vec{v}_A=(v_{OA}\cos\alpha)\vec{i}+(v_{OA}\sin\alpha-gt)\vec{j}$$
$$\vec{v}_B=(v_{OB}\cos\beta)\vec{i}+(v_{OB}\sin\beta-gt)\vec{j}$$

所以，在任意时刻物体 B 相对于物体 A 的速度为

$$\vec{v}_B-\vec{v}_A=(v_{OB}\cos\beta-v_{OA}\cos\alpha)\vec{i}+(v_{OB}\sin\beta-v_{OA}\sin\alpha)\vec{j}$$

它是与时间无关的常矢量。

例 1-13　如果已测得上抛物体两次从两个方向经过两个给定点的时间，即可测出该处的重力加速度。若物体沿两个方向经过水平线 A 的时间间隔为 Δt_A，而沿两个方向经过水平线 A 上方 h 处的另一水平线 B 的时间间隔为 Δt_B。设在物体运动的范围内重力加速度为常量，试求该重力加速度的大小。

解　设抛出物体的初速度为 v_0，抛射角为 θ，建立如图 1-8 所示的坐标系，则

$$h_A=(v_0\sin\theta)t_A-\frac{1}{2}gt_A^2$$
$$h_B=(v_0\sin\theta)t_B-\frac{1}{2}gt_B^2$$

所以
$$t_A^2-\frac{2v_0\sin\theta}{g}t_A+\frac{2h_A}{g}=0$$
$$t_B^2-\frac{2v_0\sin\theta}{g}t_B+\frac{2h_B}{g}=0$$

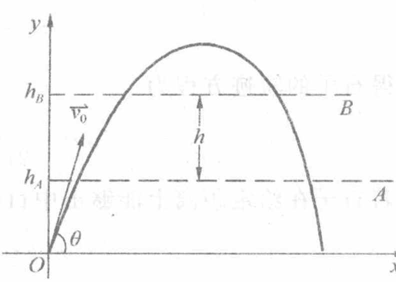


图 1-8