中国精算师考试辅导系列

寿险精算数学

过关必做1000题（含历年真题）

主编：金圣才
支持：中华精算师考试网

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

中国精算师考试辅导系列

寿险精算数学

过关必做1000题(含历年真题)

主编：金重才
支持：中华精算师考试网

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是中国精算师资格考试科目“寿险精算数学”过关必做习题集。本书基本遵循中国精算师资格考试指定教材《寿险精算数学》(卢仿先、张琳主编，中国财政经济出版社)和《寿险精算》(李勇权编，中国财政经济出版社)的章目编排并进行整理，共分9章。根据最新《中国精算师资格考试大纲》中“寿险精算数学”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了“寿险精算数学”的部分历年真题和样题。所选习题基本覆盖了考试大纲中规定需要掌握的知识内容，并对全部习题的答案进行了详细的分析和解答。

本书特别适用于参加中国精算师资格考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华精算师考试网(www.1000jss.com)为考生提供精算师考试的名师网络课程、精算师资格考试的历年真题、在线测试等增值服务。

图书在版编目(CIP)数据

寿险精算数学过关必做1000题：含历年真题/金圣才主编.—北京：中国石化出版社，2009
(中国精算师考试辅导系列)
ISBN 978-7-80229-852-1

Ⅰ.寿… Ⅱ.金… Ⅲ.人寿保险-精算学-资格考核-习题 Ⅳ.F840.62-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第071546号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
金圣才文化发展(北京)有限公司排版
北京宏伟双华印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 24印张 570千字
2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
定价：48.00元

序　言

为了帮助考生顺利通过中国精算师资格考试，我们根据最新《中国精算师资格考试大纲》和指定教材编写了中国精算师资格考试辅导系列：

1.《复利数学过关必做1000题(含历年真题)》
2.《寿险精算数学过关必做1000题(含历年真题)》
3.《风险理论过关必做600题(含历年真题)》
4.《生命表基础过关必做600题(含历年真题)》
5.《中国精算师资格考试辅导教材：综合经济基础》
6.《综合经济基础过关必做1500题(含历年真题)》

本书是中国精算师资格考试科目“寿险精算数学”过关必做习题集。本书基本遵循中国精算师资格考试指定教材《寿险精算数学》(卢仿先、张琳主编，中国财政经济出版社)和《寿险精算》(李勇权编，中国财政经济出版社)的章目编排并进行整理，共分9章。根据最新《中国精算师资格考试大纲》中“寿险精算数学”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了“寿险精算数学”的部分历年真题和样题，所选习题基本覆盖了考试大纲规定需要掌握的知识内容，并对全部习题的答案进行了详细的分析和解答。

需要特别说明的是：对于考试动态、最新的考试大纲以及相关考试资料，中华精算师考试网(www.1000jss.com)会及时根据当年的大纲对本书进行修订和说明，读者可以登陆网站查看并下载相关修订部分。本教材参考了众多的配套资料和相关参考书，书中错误、遗漏不可避免，敬请指正和提出建议。

圣才学习网(www.100xuexi.com)是一家为全国各类考试和专业课学习提供全套复习资料的专业性网站。包括中华证券学习网、中华金融学习网、中华保险学习网、中华精算师考试网等45个子网站。其中，中华精算师考试网(www.1000jss.com)是一家为国内国际各种精算师考试(包括中国精算师、北美精算师ASA/FSA、英国精算师IOA、日本精算师等)提供全套复习资料的专业性网站。设置有为考生和学习者提供一条龙服务的专栏，包括：网络课程辅导、在线测试、精算师考试图书、历年真题详解、专项练习、笔记讲义、视频课件、学术论文等。

本书特别适用于参加中国精算师资格考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华精算师考试网(www.1000jss.com)为考生提供精算师考试的名师网络课程、历年真题、在线测试等增殖服务。详情请登录网站：

圣才学习网 www.100xuexi.com
中华精算师考试网 www.1000jss.com

金圣才

目　录

第 1 章　生存分布与生命表

单项选择题（以下各小题所给出的 5 个选项中，只有一项最符合题目要求，请将正确选项的代码填入括号内）

1.（2008 年真题）已知：

（1）${}_3p_{70}=0.95$；

（2）${}_2p_{71}=0.96$；

（3）$\int_{71}^{75}\mu_x \mathrm{d}x=0.107$。

计算${}_5p_{70}$的值为（　　）。

A. 0.85　　B. 0.86　　C. 0.87　　D. 0.88　　E. 0.89

【答案】E

【解析】由于${}_3p_{70}=\frac{s(73)}{s(70)}=0.95$，${}_2p_{71}=\frac{s(73)}{s(71)}=0.96$，

故 ${}_5p_{70}={}_1p_{70}\times{}_4p_{71}=\frac{s(71)}{s(70)}\times{}_4p_{71}=\frac{{}_3p_{70}}{{}_2p_{71}}\times e^{-\int_{71}^{75}\mu_x \mathrm{d}x}=0.89$。

2.（2008 年真题）已知：

（1）$\mu(80.5)=0.0202$；

（2）$\mu(81.5)=0.0408$；

（3）$\mu(82.5)=0.0619$；

（4）死亡服从 *UDD* 假设。

计算 80.5 岁的人在两年之内死亡的概率为（　　）。

A. 0.0782　　B. 0.0785　　C. 0.0790　　D. 0.0796　　E. 0.0800

【答案】A

【解析】死亡服从 *UDD* 假设，故

$$\mu_{x+0.5}=\frac{q_x}{1-0.5q_x}$$

所以 $q_x=\frac{\mu_{x+0.5}}{1-0.5\mu_{x+0.5}}$。

从而$q_{80}=\frac{\mu_{80.5}}{1-0.5\mu_{80.5}}=\frac{0.0202}{1-0.5\times0.0202}=0.0204$，

$q_{81}=\frac{\mu_{81.5}}{1-0.5\mu_{81.5}}=\frac{0.0408}{1-0.5\times0.0408}=0.0416$，

$q_{82}=\frac{\mu_{82.5}}{1-0.5\mu_{82.5}}=\frac{0.0619}{1-0.5\times0.0619}=0.0639$。

故 80.5 岁的人在两年之内死亡的概率为：

$$\begin{aligned}{}_2q_{80.5}&=1-\frac{l_{82.5}}{l_{80.5}}=1-\frac{l_{80}\cdot p_{80}\cdot p_{81}(1-0.5q_{82})}{l_{80}(1-0.5q_{80})}\\&=1-\frac{0.98\times0.96\times(1-0.5\times0.06)}{1-0.5\times0.02}\end{aligned}$$

$$=0.0782$$

3. (2008 年真题) 已知

(1) $\mathring{e}_0=25$;

(2) $l_x=\omega-x$, $0\leqslant x\leqslant\omega$;

(3) $T(x)$ 为未来剩余寿命随机变量。

计算 $Var[T(10)]$ 的值为(　　)。

A. 65　　B. 93　　C. 133　　D. 178　　E. 333

【答案】C

【解析】由 $l_x=\omega-x$ 可知 x 服从均匀分布, 故由 $\mathring{e}_0=25=\omega/2$, 得 $\omega=50$, 所以

$$l_{10+t}=50-t,\ f_{T(10)}(t)=\frac{1}{\omega-10}=\frac{1}{40},$$

$$E[T(10)]=\int_0^{\omega-10}tf_{T(10)}(t)\mathrm{d}t=20,$$

$$E[T^2(10)]=\int_0^{\omega-10}t^2f_{T(10)}(t)\mathrm{d}t=533,$$

$$Var[T(10)]=E[T^2(10)]-\{E[T(10)]\}^2=133。$$

4. (2008 年真题) 设 (x) 的未来寿命 $T=T(x)$ 的密度函数是

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{95}, & 0<T<95\\ 0, & 其它\end{cases}$$

利率力为 $\delta=0.06$, 保额为一个单位的终身寿险的现值随机变量为 Z, 那么满足 $\Pr(Z\leqslant\xi_{0.9})=0.9$ 的分位数 $\xi_{0.9}$ 的值为(　　)。

A. 0.5346　　B. 0.5432　　C. 0.5747　　D. 0.5543　　E. 0.5655

【答案】E

【解析】令 $Z=v^T$, $h=\dfrac{\ln\xi_{0.9}}{\ln v}$, $v=\exp(-\delta)<1$, 则

$$\begin{aligned}Pr(Z\leqslant\xi_{0.9})&=\Pr(v^T\leqslant\xi_{0.9})=\Pr(T\geqslant h)\\&=\int_h^{95}f_T(t)\mathrm{d}t=\int_h^{95}\frac{1}{95}\mathrm{d}t\\&=0.9\end{aligned}$$

解得: $h=9.5$, 即 $\ln\xi_{0.9}=9.5\ln v$。

故 $\xi_{0.9}=\exp(-9.5\delta)=0.5655$。

5. (样题) 设 $s(x)=\dfrac{\sqrt{100-x}}{10}$, $0\leqslant x\leqslant100$, 则 $\mathring{e}_{36}=$(　　)。

A. 40.5　　B. 41.6　　C. 42.7　　D. 43.8　　E. 44.9

【答案】C

【解析】由 ${}_tp_x=\dfrac{s(x+t)}{s(x)}$, 得: ${}_tp_{36}=\dfrac{1}{8}(64-t)^{1/2}$。

故 $\mathring{e}_{36}=\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^{64}(64-t)^{1/2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{12}(64-t)^{3/2}\Big|_0^{64}=42.7$。

6. (样题) 给定生命表, 如表 1-1 所示。求整值剩余寿命 $K(96)$ 的方差 $Var(K)=$(　　)。

表 1-1　生命表

x	l_x
96	180
97	130
98	73
99	31
100	0

A. 0.39　　B. 0.53　　C. 0.91　　D. 1.11　　E. 1.50

【答案】D

【解析】由于 $E(K)=\dfrac{l_{97}+l_{98}+l_{99}}{l_{96}}=1.3$，

$$E(K^2)=\sum_{k=0}^{2}(2k+1)\cdot{}_{k+1}p_x=\frac{1\times l_{97}+3\times l_{98}+5\times l_{99}}{l_{96}}=2.8。$$

故 $Var(K)=E(K^2)-E^2(K)=2.8-1.3^2=1.11$。

7.（样题）设 ${}_tq_x=\dfrac{t\times q_x}{1-(1-t)q_x}$，$x$ 为整数，$0\leqslant t\leqslant 1$，那么 μ_{x+t} 为(　　)。

A. $\dfrac{q_x}{1-t\times q_x}$　　B. μ_x　　C. $\dfrac{q_x}{1-(1-t)\times q_x}$

D. $\dfrac{q_x}{1+t\times q_x}$　　E. $\dfrac{q_x}{1+(1-t)\times q_x}$

【答案】C

【解析】由于 $\dfrac{\mathrm{d}({}_tq_x)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(1-q_x)\times q_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$，

$$故\ \mu_{x+t}=-\frac{\dfrac{\mathrm{d}(1-{}_tq_x)}{\mathrm{d}t}}{1-{}_tq_x}=\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}。$$

8.（样题）设 $q_{70}=0.04$，$q_{71}=0.05$，假定死亡是均匀分布的。计算(70)在年龄 70.5 与 71.5 之间死亡的概率为(　　)。

A. 0.041　　B. 0.042　　C. 0.043　　D. 0.044　　E. 0.045

【答案】D

【解析】已知死亡服从均匀分布假设，故

$${}_{0.5}p_{70}\times{}_{0.5}q_{70.5}+p_{70}\times{}_{0.5}q_{71}$$

$$=(1-0.5\times0.04)\times\frac{0.5\times0.04}{1-0.5\times0.04}+0.96\times0.5\times0.05$$

$$=0.044$$

9.（样题）设 $l_x=10(100-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 100$，计算 $Var(T(x))=$(　　)。

A. $\dfrac{(100-x)^2}{18}$　　B. $\dfrac{(100-x)}{3}$　　C. $\dfrac{(100-x)^3}{6}$

D. $\dfrac{(100-x)^2}{6}$　　E. $\dfrac{(100-x)^2}{3}$

【答案】A

【解析】由已知，得

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{(100-x-t)^2}{(100-x)^2} $$

$$ E(T) = \int_0^{100-x} {}_tp_x \mathrm{d}t = \frac{1}{3}(100-x) $$

$$ E(T^2) = \int_0^{100-x} 2t {}_tp_x \mathrm{d}t = \frac{1}{6}(100-x)^2 $$

$$ Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{1}{18}(100-x)^2 $$

10. （样题）设 $\mu_x = \dfrac{x}{100}$，计算 ${}_{20|10}q_5 =$（　　）。

A. $\dfrac{e^5-1}{e^6}$　　B. $\dfrac{e^4-1}{e^6}$　　C. $\dfrac{e^3-1}{e^6}$　　D. $\dfrac{e^2-1}{e^6}$　　E. $\dfrac{e-1}{e^6}$

【答案】C

【解析】由于 $s(x) = e^{-\int_0^x \mu_s \mathrm{d}s} = e^{-\frac{x^2}{200}}$，

故 ${}_{20|10}q_5 = \dfrac{s(25)-s(35)}{s(5)} = e^{-3} - e^{-6} = \dfrac{e^3-1}{e^6}$。

11. 已知 $T(0)$ 的分布为：$F_0(t) = \begin{cases} t/100, & 0 < t \leqslant 100 \\ 1, & t > 100 \end{cases}$。则新生婴儿在 30 岁和 50 岁之间死亡的概率为（　　）。

A. 0.2　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7　　E. 0.9

【答案】A

【解析】$\Pr[30 < T(0) < 50] = F_0(50) - F_0(30) = 50/100 - 30/100 = 0.2$。

12. 已知某地区新生婴儿的寿命随机变量在（0，100）上服从均匀分布，则该地区新生婴儿将在（55，81）之间死亡的概率 =（　　）。

A. 0.26　　B. 0.34　　C. 0.55　　D. 0.74　　E. 0.81

【答案】A

【解析】已知寿命随机变量在（0，100）上服从均匀分布，故其分布函数为：

$$ F(x) = \Pr(X \leqslant x) = \int_0^x \frac{1}{100}\mathrm{d}x = \frac{x}{100} $$

故 $\Pr(55 < X \leqslant 81) = F(81) - F(55) = (81-55)/100 = 0.26$。

13. 已知：$s(x) = \dfrac{1}{10}\sqrt{100-x}$，$0 \leqslant x \leqslant 100$，则年龄为 19 岁的人在 36 岁至 75 岁之间死亡的概率为（　　）。

A. 1/9　　B. 1/8　　C. 1/6　　D. 1/5　　E. 1/3

【答案】E

【解析】解法①：${}_{17|39}q_{19} = \dfrac{s(36)-s(75)}{s(19)} = \dfrac{\frac{1}{10}(\sqrt{64}-\sqrt{25})}{\frac{1}{10}\sqrt{81}} = 1/3$；

解法②：${}_{17|39}q_{19} = {}_{17}p_{19} \cdot {}_{39}q_{36} = \dfrac{s(36)}{s(19)} \cdot \dfrac{[s(36)-s(75)]}{s(36)} = 1/3$。

14. 设生存函数为：$s(x)=1-\frac{1}{10}\sqrt{x}$，$0\leqslant x\leqslant 100$，则年龄为16岁的人将生存到36岁的概率为(　　)。

A. 1/4　　B. 1/3　　C. 1/2　　D. 2/3　　E. 3/4

【答案】D

【解析】$P(T(16)>36-16)=P[T(16)>20]=\frac{s(36)}{s(16)}=2/3$。

15. 设X的分布函数为：$F(x)=\frac{x}{1+x}$，$x\geqslant 0$，则年龄为20岁的人在40岁之前的死亡概率为(　　)。

A. 0.4568　　B. 0.4676　　C. 0.4878　　D. 0.4986　　E. 0.4995

【答案】C

【解析】$P(20<X<40\,|X>20)=\frac{s(20)-s(40)}{s(20)}=\frac{F(40)-F(20)}{1-F(20)}=0.4878$。

16. 已知随机变量X的生存函数为：$s(x)=1-x/(1+x)$，$x\geqslant 0$，则年龄为20岁的人在30岁到40岁之间的死亡概率为(　　)。

A. 0.1451　　B. 0.1652　　C. 0.1754　　D. 0.1857　　E. 0.1959

【答案】B

【解析】$P(30<X<40\,|X>20)=\frac{s(30)-s(40)}{s(20)}=0.1652$。

17. 设$s(x)$是生存函数，函数$\varphi(x)=\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}$且$\varphi(x)+s'(x)=0$，则生存函数$s(x)$的极限年龄$\omega$为(　　)。

A. 121　　B. 122　　C. 125　　D. 128　　E. 130

【答案】C

【解析】由$\varphi(x)+s'(x)=0$知：$s'(x)=-\varphi(x)$。

所以$s(x)=-\int\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{25}x^{\frac{2}{3}}+C$。

由生存函数的性质知：$s(0)=1$，故$C=1$，所以$s(x)=1-\frac{1}{25}x^{\frac{2}{3}}$。

又$s(\omega)=0$，即$1-\frac{1}{25}\omega^{\frac{2}{3}}=0$，解得$\omega=125$。

18. 已知现年18岁的小王，再生存10年的概率为0.95，再生存30年的概率为0.75。则其现年28岁在达到48岁之前的死亡概率为(　　)。

A. 0.2105　　B. 0.2308　　C. 0.2409　　D. 0.2503　　E. 0.3105

【答案】A

【解析】由题意知：${}_{10}p_{18}=0.95$　${}_{30}p_{18}=0.75$，

而${}_{30}p_{18}={}_{10}p_{18}\cdot{}_{20}p_{28}$，所以${}_{20}p_{28}=\frac{0.75}{0.95}$，

故${}_{20}q_{28}=1-\frac{0.75}{0.95}=0.2105$。

19. 设$s_0(x)=\frac{1}{1+x}$，则$T(y)$的中值为(　　)。

A. $1+y$　　B. $1-y$　　C. $\frac{1}{1+y}$　　D. $\frac{1}{1-y}$　　E. $\frac{1+y}{1+x+y}$

【答案】A

【解析】因为 $s_0(x)=\frac{1}{1+x}$，所以 $s_y(x)=\frac{s_0(y+x)}{s_0(y)}=\frac{1+y}{1+x+y}$，

所以当 $s_y[m(y)]=\frac{1}{2}$，即$\frac{1+y}{1+y+m(y)}=\frac{1}{2}$，所以 $m(y)=1+y$。

20. 设某随机变量 X 的生存函数为：$s(x)=ax^3+b$，$0\leqslant x\leqslant k$。若 $E(X)=90$，则 $Var(X)=$ (　　)。

A. 90　　B. 180　　C. 360　　D. 450　　E. 540

【答案】E

【解析】由生存函数的性质 $s(0)=1$，得：$b=1$。

又由 $s(k)=0=ak^3+b=a\cdot k^3+1$，得：$a=-\frac{1}{k^3}$。

所以$f(x)=-s'(x)=\left(\frac{x^3}{k^3}\right)'=\frac{3x^2}{k^3}$，

从而 $\int_0^k x\cdot\frac{3x^2}{k^3}\mathrm{d}x=90$，得：$k=120$。

所以 $Var(X)=E(X^2)-90^2=\frac{3}{5}\cdot120^2-90^2=540$。

21. 设生存人数为：$l_x=100\cdot(x+1)^{-3}$，$x\geqslant0$，则 $Var(X\mid X>x)=$(　　)。

A. $100(x+1)^{-3}$　　B. $\frac{x+1}{2}$

C. $x+1$　　D. $\frac{3}{4}(x+1)^2$

E. $(x+1)^2$

【答案】D

【解析】$Var(X\mid X>x)=Var(X-x\mid X>x)=Var(T(x))$

$$=E(T^2(x))-E^2(T(x))$$

因为 $l_x=100\cdot(x+1)^{-3}$，$x\geqslant0$，所以 $s(x)=\frac{l_x}{l_0}=(x+1)^{-3}$，

$\mu_{x+t}=3(x+t+1)^{-1}$，${}_tp_x=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\frac{(x+t+1)^{-3}}{(x+1)^{-3}}$，

${}_tp_x\mu_{x+t}=\frac{3(x+t+1)^{-4}}{(x+1)^{-3}}$。

所以 $E(T(x))=\int_0^{+\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\frac{1}{l_x}\int_0^{+\infty}l_{x+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{l_x}\int_0^{+\infty}100(x+t+1)^{-3}\mathrm{d}t=\frac{x+1}{2}$，

$$E(T^2(x))=\int_0^{+\infty}t^2{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^2\cdot\frac{3(x+t+1)^{-4}}{(x+1)^{-3}}\mathrm{d}t$$

$$=3\times\left(\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}td\,\frac{(x+t+1)^{-2}}{-2}\right)\times(x+1)^3$$

$$=(x+1)^3\cdot\frac{1}{x+1}=(x+1)^2。$$

故 $Var(X \mid X>x)=Var(T(x))=(x+1)^2-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(x+1)^2$。

22. 已知某地区新生婴儿的寿命随机变量在(0，100)上服从均匀分布，则对该地区的(x)($x<75$)的人，其未来生命时间长度的整数部分为25岁的概率是(　　)。

A. $1/(100-x)$ B. $2/(100-x)$ C. $3/(100-x)$ D. $4/(100-x)$ E. $5/(100-x)$

【答案】A

【解析】由已知得分布函数为：

$$F(x)=\Pr(X\leqslant x)=\int_0^x \frac{1}{100}\mathrm{d}x=\frac{x}{100}$$

所以 $s(x)=\Pr(X>x)=1-F(x)=(100-x)/100$，

故 $\Pr[K(x)=25]=\Pr[25\leqslant T(x)<26]={}_{25}p_x-{}_{26}p_x$

$$=\frac{s(x+25)}{s(x)}-\frac{s(x+26)}{s(x)}$$

$$=\frac{100-25-x}{100-x}-\frac{100-26-x}{100-x}$$

$$=1/(100-x)$$

23. 寿命 X 是随机变量，则60岁的人的寿命不超过80岁的概率为(　　)。

(1)$\frac{s(60)-s(80)}{s(60)}$；(2)$\frac{F(80)-F(60)}{1-F(60)}$；(3)$\frac{F(80)+F(60)}{1-F(60)}$；(4)$\frac{s(60)+s(80)}{s(60)}$。

A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (2)(4)　　D. (3)(4)　　E. (4)

【答案】A

【解析】因为

$$\begin{aligned}\Pr\{X\leqslant 80 \mid X>60\}&=\frac{\Pr\{X\leqslant 80\cap X>60\}}{\Pr\{X>60\}}\\&=\frac{\Pr\{X\leqslant 80\}-\Pr\{X\leqslant 60\}}{1-\Pr\{X\leqslant 60\}}\\&=\frac{F(80)-F(60)}{1-F(60)}\\&=\frac{1-s(80)-(1-s(60))}{1-(1-s(60))}\\&=\frac{s(60)-s(80)}{s(60)}\end{aligned}$$

24. 已知生存函数为 $s(x)=1-\frac{x}{105}(0\leqslant x\leqslant 105)$，则其平均寿命为(　　)。

A. 50.5　　B. 52.5　　C. 55.5　　D. 58.5　　E. 60.5

【答案】B

【解析】由已知生存函数得其密度函数为：

$$f(x)=-s'(x)=\frac{1}{105}$$

故其平均寿命为：

$$E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{105}\frac{x}{105}\mathrm{d}x=52.5$$

25. 下列表达式中与${}_kp_x$等价的是(　　)。

A. $\dfrac{s(x+k+1)}{s(x+1)}$　　B. $\dfrac{s(x+k-1)}{s(x)}$　　C. $p_x \cdot p_{x+1} \cdot \cdots \cdot p_{x+k-1}$

D. $p_{x+1}p_{x+2}\cdots p_{x+k}$　　E. $p_{x-1}p_x\cdots p_{x+k-1}$

【答案】C

【解析】${}_kp_x=\dfrac{s(x+1)}{s(x)}\cdot\dfrac{s(x+2)}{s(x+1)}\cdots\dfrac{s(x+k)}{s(x+k-1)}=\dfrac{s(x+k)}{s(x)}$

$=p_x\cdot p_{x+1}\cdot\cdots\cdot p_{x+k-1}$

26. 记$R(x)=T(x)-K(x)$，设$R=R(x)$服从均匀分布(其中，x是非负整数，$0\leqslant R\leqslant 1$)。r为非负整数，$0\leqslant r\leqslant 1$，则下列表达式中正确的有(　　)。

(1)$\Pr\{k<T(x)\leqslant k+r\}=\Pr\{K(x)=k\}\Pr\{R(x)\leqslant r\}$；

(2)$\Pr\{(k(x)=k)\cap(R(x)\leqslant r)\}=\Pr\{K(x)=k\}\cdot\Pr\{R(x)\leqslant r\}$；

(3)$\Pr\{k<T(x)\leqslant k+r\}=\Pr\{K(x)=k\}+\Pr\{R(x)\leqslant r\}$。

A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (2)(3)　　D. (3)　　E. (1)(2)(3)

【答案】A

【解析】因为$\Pr\{k<T(x)\leqslant k+r\}={}_{k|r}q_x={}_kp_x\cdot{}_rq_{x+k}$，

而$R=R(x)$服从均匀分布，故${}_tq_x=t\cdot q_x$，$0\leqslant t\leqslant 1$，

所以${}_rq_{x+k}=r\cdot q_{x+k}$。

而$R(x)$服从均匀分布，所以$\Pr\{R(x)\leqslant r\}=\int_0^r 1\mathrm{d}r=r$。

故$Pr\{k<T(x)\leqslant k+r\}=r\cdot{}_kp_x\cdot q_{x+k}=\Pr\{R(x)\leqslant r\}\cdot\Pr\{K(x)=k\}$。

27. 设55岁的人未来寿命$T(55)$的概率密度函数为：$f(x)=0.3e^{-0.3x}$，$x\geqslant 0$，则${}_{10|15}q_{55}=$(　　)。

A. 0.0412　　B. 0.0492　　C. 0.0501　　D. 0.0515　　E. 0.0520

【答案】B

【解析】${}_{10|15}q_{55}=P(10<T(55)<25)=\int_{10}^{25}0.3e^{-0.3x}\mathrm{d}x$

$=1-e^{-0.3\times25}-(1-e^{-0.3\times10})=0.0492$。

28. 李博士是一位统计专家，他在某个即将倒闭的银行有9万元存款，该存款风险极大，每过一天将有1万元的损失，可惜他将存款密码忘记，只记得一密码镜像为652255，该镜像源于如表1-2所示的编码规则。

表1-2　编码规则

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
镜像	4	2	5	5	4	5	6	3	7	6

而银行规定同一账户每天只能试用6次密码，以防盗用，假设密码随机试用，则该博士这笔存款实际估计价值是(　　)万元。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【答案】E

【解析】由于密码镜像为652255，由已知数字镜像图表可知：

故所有可能的密码个数为：$2\times3\times1\times1\times3\times3=54$。

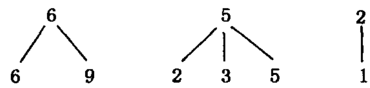

图 1－1

每天只能猜六次，理论上最多可猜 9 天。

现在设第 k 天猜中的概率为${}_{k|}q_0$，如表 1－3 所示，于是：

$$q_0 = {}_{1|}q_0 = {}_{2|}q_0 = \cdots = {}_{8|}q_0 = \frac{6}{54}$$

表 1－3　存款密码猜中概率

存款额	9	8	7	6	5	4	3	2	1
${}_{k\|}q_0$	q_0	${}_{1\|}q_0$	${}_{2\|}q_0$	${}_{3\|}q_0$	${}_{4\|}q_0$	${}_{5\|}q_0$	${}_{6\|}q_0$	${}_{7\|}q_0$	${}_{8\|}q_0$

故这笔存款实际估计价值为：

$$9 \times q_0 + 8 \times {}_{1|}q_0 + 7 \times {}_{2|}q_0 + 6 \times {}_{3|}q_0 + 5 \times {}_{4|}q_0 + 4 \times {}_{5|}q_0 + 3 \times {}_{6|}q_0 + 2 \times {}_{7|}q_0 + {}_{8|}q_0$$

$$= (9+8+7+\cdots+1) \times \frac{6}{54}$$

$$= 5(\text{万元})$$

29. 以下命题正确的是(　　)。

A. 若${}_tp_x\mu_{x+t}$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上严格递增，则 $q_x < \mu_x$

B. 若${}_tp_x\mu_{x+t}$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上严格递减，则 $q_x > \mu_x$

C. 若${}_tp_x\mu_{x+t}$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上不单调，则 $q_x < \mu_x$

D. 若${}_tp_x\mu_{x+t}$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上不单调，则 $q_x > \mu_x$

E. 若${}_tp_x\mu_{x+t}$在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上严格递增，则 $q_x > \mu_x$

【答案】E

【解析】利用分析法：

若 $q_x > \mu_x \Leftrightarrow \dfrac{s(x)-s(x+1)}{s(x)} > \dfrac{-s'(x)}{s(x)}$

$$\Leftrightarrow s(x)-s(x+1) > -s'(x)$$

$$\Leftrightarrow s(x+1)-s(x) < s'(x) \qquad ①$$

①式左端 $s(x+1)-s(x) = \dfrac{s(x+1)-s(x)}{1}$是一割线的斜率，

①式右端 $s'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}$是一个割线的极限斜率，

所以当${}_tp_x\mu_{x+t} = f_{T(x)}(t)$在 $0 \leqslant t < 1$ 上严格单调增时，有：

$$(1-s(t))'' = (F_{T(x)}(t))'' = f'_x(t) > 0,$$

所以 $1-s(t)$是单调增且是凹的，故 $s(t)$是单减的且是上凸的，构造函数：

$$g(\Delta x) = \frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}$$

$$g'(\Delta x) = (s(x+\Delta x)-s(x))' \cdot \frac{1}{\Delta x} + \frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{-(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(s'(x+\Delta x) - \frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}\right)。$$

下面证明：$s'(x+\Delta X) < \dfrac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}$，

即：$\Delta x s'(x+\Delta x) < s(x+\Delta x) - s(x)$。

再构造函数：$G(\Delta x) = \Delta x \cdot s'(x+\Delta x) - s(x+\Delta x) + s(x)$，

$$G'(\Delta x) = s'(x+\Delta x) + \Delta x \cdot s''(x+\Delta x) - s'(x+\Delta X)$$
$$= \Delta x \cdot s''(x+\Delta x)$$

由于 $s(x)$ 是上凸的，故 $s''(x+\Delta x) < 0$，

即 $G'(\Delta x) < 0$，而 $G(0) = 0 \cdot s'(x+0) - s(x) + s(x) = 0$，

故 $G(\Delta x)$ 是单减的且初值为 0，所以 $G(\Delta x) < 0$，

也就是 $\Delta x \cdot s'(x+\Delta x) < s(x+\Delta x) - s(x)$ 成立，即：

$s'(x+\Delta x) < \dfrac{s(x+\Delta x) - s(x)}{\Delta x}$ 成立。

从而 $g'(\Delta x) < 0$，即 $g(\Delta x)$ 是减函数，从而可推出 $g(\Delta x)$ 在 $0 \leqslant \Delta x \leqslant 1$ 上随 Δx 的增大而减小，结论 $s'(x) > \dfrac{s(x+1) - s(x)}{1} = s(x+1) - s(x)$ 成立，即证明了当 ${}_tp_x\mu_{x+t}$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上严格单增时，$q_x > \mu_x$ 是成立的。

30. 已知：$\mu(x) = 0.2 + e^{mx}$，$x \geqslant 0$，${}_{0.6}p_0 = 0.92$，则 m 的取值范围为（　　）。

A. $0 < m \leqslant 4$　B. $5 \leqslant m \leqslant 9$　C. $10 \leqslant m \leqslant 15$　D. $16 \leqslant m \leqslant 20$　E. $m > 20$

【答案】A

【解析】①当 $m = 0$ 时，$\mu(x) = 1.2$，$x \geqslant 0$，

所以 ${}_{0.6}p_0 = s(0.6) = e^{-\int_0^{0.6}\mu_s ds} = e^{-\int_0^{0.6}1.2dx} = e^{-0.72} = 0.4867 \neq 0.92$；

②当 $m \neq 0$ 时，${}_{0.6}p_0 = s(0.6) = e^{-\int_0^{0.6}\mu_s ds} = e^{-\int_0^{0.6}(0.2+e^{mx})dx}$

$$= e^{-0.12 - \frac{1}{m}(1-e^{0.6m})} = \frac{e^{\frac{1}{m}(e^{0.6m}-1)}}{e^{0.12}} = 0.92,$$

所以 $e^{\frac{1}{m}(e^{0.6m}-1)} = e^{0.12} \times {}_{0.6}p_0 = e^{0.12} \times 0.92 = 1.0373$，

故 $\dfrac{1}{m}(e^{0.6m} - 1) = 0.0366$，所以 $0 < m \leqslant 4$。

31. 设死力函数为 $\mu_x = \dfrac{1}{1+x}$，$x \geqslant 0$，则随机变量 $T(x)$ 的密度函数为（　　）。

A. $\dfrac{t}{1+x+t}$　B. $\dfrac{1+x}{(1+x+t)^2}$　C. $\dfrac{1}{1+x+t}$　D. $\dfrac{1+x}{1+x+t}$　E. $\dfrac{1}{(1+x+t)^2}$

【答案】B

【解析】因为 $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \dfrac{1}{1+x+s}ds\right) = 1 - \exp\left(-\ln\dfrac{1+x+t}{1+x}\right)$

$$= \frac{t}{1+x+t}(x,\ t \geqslant 0)$$

所以 $f_T(t) = F'_T(t) = \dfrac{1+x}{(1+x+t)^2}(x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$。

32. 设死力为 $\mu_X = \dfrac{1}{1+x}$，$x \geqslant 0$。则 $\Pr(10 < X \leqslant 30) =$（　　）。

A. 0.04835　B. 0.05865　C. 0.06879　D. 0.07896　E. 0.07965

【答案】B

【解析】因为 $F_X(x)=1-\exp(-\int_0^x \frac{1}{1+s}ds)=1-\exp(-\ln(1+x))=\frac{x}{1+x}(x\geqslant 0)$，

所以 $\Pr(10<X\leqslant 30)=F(30)-F(10)=\frac{30}{1+30}-\frac{10}{1+10}=0.058651$。

33. 已知死力函数为 $\mu_x=\frac{1}{1+x}$，$x\geqslant 0$。则 ${}_{5|5}q_{20}=($　　$)$。

A. 0.13027　　B. 0.13145　　C. 0.13157　　D. 0.13267　　E. 0.13379

【答案】A

【解析】因为 $F_X(x)=1-\exp(-\int_0^t \frac{1}{1+s}ds)=1-\exp(-\ln(1+x))=\frac{x}{1+x}(x\geqslant 0)$，

所以 ${}_{5|5}q_{20}=\frac{F(30)-F(25)}{1-F(20)}=0.130273$。

34. 设死力函数 $\mu_x=\frac{1}{100-x}$，$0\leqslant x\leqslant 100$。则 $P(30<x\leqslant 35\mid x>20)=($　　$)$。

A. 0.0327　　B. 0.0428　　C. 0.0625　　D. 0.0728　　E. 0.0825

【答案】C

【解析】因为

$$
\begin{aligned}
F_X(x)&=1-\exp(-\int_0^x \frac{1}{100-s}ds)\\
&=1-\exp[\ln(100-x)-\ln 100]\\
&=x/100
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
P(30<x\leqslant 35\mid x>20)&=\frac{F(35)-F(30)}{1-F(20)}\\
&=\frac{35/100-30/100}{1-20/100}\\
&=0.0625
\end{aligned}
$$

35. 已知随机变量 x 的死力函数为：$\mu_x=5x^4$，$x\geqslant 0$，对于变换后 $Y=\ln x$。则 Y 的死力函数为(　　)。

A. $5e^y$　　B. $5e^{-y}$　　C. $5e^{4y}$　　D. $5e^{5y}$　　E. $5e$

【答案】D

【解析】由 $\mu_x=5x^4$，$x\geqslant 0$，可知：$s(x)=e^{-\int_0^x\mu_y dy}=e^{-\int_0^x 5y^4 dy}=e^{-x^5}$，

所以 $s_Y(y)=P(Y>y)=P(\ln X>y)=P(X>e^y)=s_X(e^y)=e^{-e^{5y}}$。

故 $\mu_Y(y)=-\frac{s'_Y(y)}{s_Y(y)}=-\frac{e^{-e^{5y}}(-e^{5y}\cdot 5)}{e^{-e^{5y}}}=5e^{5y}$。

36. 某一产品的死力为 μ_{x+t}，经一精算师测算，死力应修正为 $\mu_{x+t}-C$，原来的产品损坏概率为 q_x，一年内该产品损坏的概率减半，则常数 $C=($　　$)$。

A. $\ln\left(1+\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$　　B. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1-q_x)$

C. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1+q_x)$　　D. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$

E. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1+q_x)$

【答案】D

【解析】因为 $q_x^{old}=1-e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}dt}$，

$q_x^{new}=1-e^{-\int_0^1(\mu_{x+t}-C)dt}=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}\cdot e^c$

所以$\frac{1}{2}q_x^{old}=q_x^{new}$，即$\frac{1}{2}(1-p_x)=(1-p_x\cdot e^C)$，

故 $e^C=\dfrac{1-\frac{1}{2}q_x}{1-q_x}$，解得：$C=\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$。

37. 已知生存函数：$s(x)=\exp(-x)$，$x\geqslant0$，则其死力函数为(　　)。

A. $\exp(-x)$　B. $\exp(x)$　C. x　D. 1　E. $1-\exp(-x)$

【答案】D

【解析】由已知得：$\mu_x=-\dfrac{s'(x)}{s(x)}=\dfrac{\exp(-x)}{\exp(-x)}=1(x\geqslant0)$。

38. 下列函数中可被作为死力函数的有(　　)。

(1)BC^x，$B>0$，$0<C<1$，$x\geqslant0$；

(2)$B(x+1)^{-0.5}$，$B>0$，$x\geqslant0$；

(3)$k(x+1)^n$，$k>0$，$n>0$，$x\geqslant0$。

A. (1)　B. (1)(2)　C. (1)(3)　D. (2)(3)　E. (1)(2)(3)

【答案】D

【解析】(1)由于 $\int_0^x BC^y dy=\left.\dfrac{BC^y}{\ln C}\right|_0^x=\dfrac{B}{\ln C}[C^x-1]$，

所以 $s(x)=e^{-\int_0^x\mu_y dy}=\exp\left[-\dfrac{B}{\ln C}[C^x-1]\right]$。

检验：$s(x)\geqslant0$，$s(0)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}s(x)=\exp\left(\dfrac{B}{\ln C}\right)\neq0$(由于$0<C<1$)，

故$\mu=BC^x$不能作为死力函数；

(2) $\int_0^x B(y+1)^{-0.5}dy=\dfrac{B(y+1)^{0.5}\mid_0^x}{0.5}=2B[(x+1)^{0.5}-1]$，

即 $s(x)=\exp\{-2B[(x+1)^{0.5}-1]\}$。

检验：$s(x)\geqslant0$，$s(0)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}s(x)=0$，

所以$s(x)$为严格递减函数，因此$\mu_x=B(x+1)^{-0.5}$可被作为死力函数；

(3)$\int_0^x k(y+1)^n dy=\left.\dfrac{k(y+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^x=\dfrac{k}{n+1}[(x+1)^{n+1}-1]$，

即 $s(x)=\exp\left\{-\dfrac{k}{n+1}[(x+1)^{n+1}-1]\right\}$。

检验：$s(x)\geqslant0$，$s(0)=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}s(x)=0$，

所以$s(x)$为严格递减函数。因此$\mu_x=k(x+1)^n$可以作为死力函数。

39. 已知：$\mu(x)=F+e^{2x}$，$x\geqslant0$；${}_{0.4}p_0=0.6$。则$F=$(　　)。

A. -0.255　B. -0.090　C. 0.110　D. 0.255　E. 0.325