



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

车辆结构强度 基本理论 与CAE分析技术

胡玉梅 编著



CHELIANG JIEGOU QIANGDU JIBEN LILUN
YU CAE FENXI JISHU



重庆大学出版社
<http://www.cqup.com.cn>



责任编辑：王海琼 封面设计：程 晨

**CHELIANG JIEGOU QIANGDU JIBEN LILUN
YU CAE FENXI JISHU**

ISBN 978-7-5624-4702-3



9 787562 447023 >

定价：19.00元

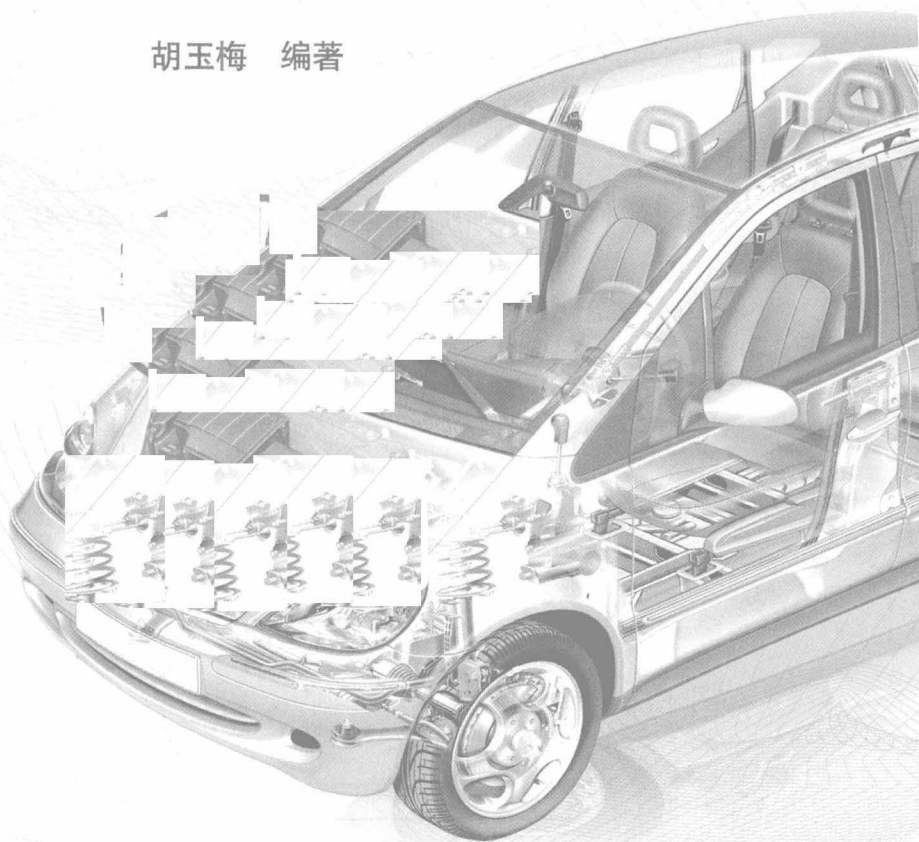




普通高等教育“十一五”国家级规划教材

车辆结构强度 基本理论 与CAE分析技术

胡玉梅 编著



重庆大学出版社

内容提要

本书主要介绍了车辆结构强度有限元分析所涉及的基本理论和利用商用软件进行 CAE 分析时一些值得注意的基本技术。全书共分 9 章,分别介绍字母标记法及张量的基本知识、应力状态和应变状态、有限元分析的力学基础、弹性力学平面问题的有限元法、线性代数方程组的解法、等参数单元、动力学问题的有限单元法、疲劳寿命分析基本理论和车辆结构 CAE 分析基本技术。各个章节给出了典型例题,章后附有习题。

本书可作为机械类专业如车辆工程、机械工程、动力及机械工程等专业的本科生、研究生专业课教材,也可供从事车辆结构强度分析的科技工作者和其他相关专业的大专院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

车辆结构强度基本理论与 CAE 分析技术/胡玉梅编著.

重庆:重庆大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-5624-4702-3

I. 车… II. 胡… III. 汽车—结构强度—计算机辅助分析 IV. U463-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 195894 号

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:13.25 字数:331 千

2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-4702-3 定价:19.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换
版权所有,请勿擅自翻印和用本书
制作各类出版物及配套用书,违者必究

前言

我们于 1999 年开始从事车辆结构有限元分析方面的教学与科研工作。在使用现有教材的教学过程中,发现有很多关键的知识点学生普遍反映不好理解。为了在教学中让学生更好地理解课程内容,便着手针对那些比较难的知识点,并结合作者在科学研究中的一些心得体会,一个一个的编写讲义,力求以简单明了的方式讲清楚学生难于理解的知识点。

该讲义自 2000 年以来,在历届的本科生、研究生、工程硕士的教学中,根据学生的反馈信息和科研进展不断完善。实践表明:本讲义颇受各层次学生的欢迎,认为看其他书看不懂的内容,阅读本讲义就能很快理解,掌握其技术实质内容。同时,本讲义也受到从事 CAE 及有限元分析的现场工程技术人员的欢迎。大家期盼本讲义能早日正式出版。总结起来,本书的主要特点表现在:

(1)知识更容易理解:本书是作者多年从事车辆结构有限元分析教学与科研工作的结晶。主要针对现有的教材中,学生普遍反映难学,不好理解的关键知识点,一一对应地编写了针对性强的讲解内容和例子,让学生可更好地理解其内容实质;

(2)内容更实用:针对国内外有关有限元理论书籍虽然较多,但是一些关键知识点的叙述大致相同,普遍存在难读、难以掌握其理论与分析应用的问题,作者根据长期从事 CAE 及有限元分析研究工作的经验,精选了其基本理论内容,让其更加实用,并由浅到深地阐述,使之易学易懂;

(3)实用技术丰富:针对目前市面上介绍结构强度分析软件使用的书籍,一般停留在对操作命令和简单例题的介绍上,缺乏介绍车辆结构强度分析的关键和核心技术内容的问题,作者将多年从事车辆结构强度分析的研究经验进行了总结,并融入教材,形成了本书的精髓。

本书涉及的内容较多,面比较广,由于作者的学术水平有限,难免会有错误或不当之处,敬请读者批评指正。

本书第 8 章由西南大学汽车系赵金斗老师协助完成,在此表示感谢。

本书得到重庆大学教材建设资金资助;同时也得到重庆大学研究生创新基地的支持。

编 者

2008 年 8 月 18 日

目 录

MU LU

1	字母标记法及张量的基本知识	1
1.1	字母标记法及求和约定	1
1.1.1	字母标记法	1
1.1.2	求和约定	2
1.1.3	δ_{ij} 符号	2
1.1.4	置换符号定义	3
1.2	张量的基本知识	3
1.2.1	坐标变换	3
1.2.2	标量、矢量和张量	5
1.2.3	张量的坐标不变性	6
	习题 1	6
2	应力状态和应变状态	7
2.1	一点的应力状态	7
2.1.1	内力和应力	7
2.1.2	斜面上的应力	8
2.1.3	转轴时应力分量的变换	10
2.2	主应力与主剪应力、应力张量的不变量	11
2.2.1	主应力	11
2.2.2	主剪应力	13
2.3	应力张量的分解	14
2.4	八面体应力 应力强度	16
2.5	应力空间	18
2.6	应变状态	20
2.7	应变率及应变增量	24
	习题 2	25
3	有限元分析的力学基础	27
3.1	变形体的描述、变量定义、分量表达	27

3.1.1	变形体	27
3.1.2	基本变量	27
3.1.3	基本方程	28
3.2	弹性体的基本假设	28
3.3	平面问题的基本力学方程	29
3.3.1	三大类方程之一:力的平衡方程	29
3.3.2	三大类方程之二:变形的几何方程	32
3.3.3	三大类方程之三:材料的物理方程	33
3.3.4	边界条件	34
3.4	空间问题的基本力学方程	35
3.4.1	空间问题的基本力学变量	35
3.4.2	空间问题的三大类力学方程和边界条件	36
3.5	弹性问题中的能量表示	37
3.5.1	外力功	37
3.5.2	应变能	37
3.5.3	系统的势能	39
3.6	虚功方程	39
	习题 3	42
4	弹性力学平面问题的有限元法	43
4.1	两种平面问题	43
4.1.1	平面应力问题	43
4.1.2	平面应变问题	44
4.2	有限元法的概念和平面问题的离散化	45
4.2.1	有限元法的概念	45
4.2.2	平面问题的离散化	46
4.3	有限元分析的步骤	48
4.3.1	离散化	49
4.3.2	单元分析	49
4.3.3	整体分析	54
4.3.4	后处理计算	55
4.4	单元位移模式和解答的收敛性	55
4.4.1	单元位移模式	56
4.4.2	形函数的性质	58
4.4.3	解答的收敛性	59
4.5	单元内的应变和应力	61

4.5.1	单元应变与单元节点位移的关系	61
4.5.2	单元应力与单元节点位移的关系	62
4.6	单元刚度矩阵	62
4.6.1	单元节点力分量	62
4.6.2	单元平衡方程	63
4.6.3	单元刚度矩阵的性质	64
4.7	载荷向节点的移置	65
4.8	总刚度矩阵的形成	67
4.8.1	对总刚度矩阵的初步认识	67
4.8.2	结构的总刚度方程一般论述	71
4.8.3	总刚度矩阵的组集方法	74
4.8.4	总刚度矩阵的特点	75
4.9	边界约束条件的处理	76
4.9.1	零位移约束	76
4.9.2	非零位移约束	77
4.10	算例	77
4.11	计算成果的整理	83
4.12	平面矩形单元	85
	习题 4	89
5	线性代数方程组的解法	92
5.1	高斯消元法	92
5.2	三角分解法 (乔列斯基分解)	93
5.3	波前法	94
	习题 5	100
6	等参数单元	101
6.1	平面 4 节点四边形等参数单元	101
6.1.1	单元位移模式和坐标变换	102
6.1.2	单元的应变、应力及雅可比矩阵	104
6.1.3	单元刚度矩阵	106
6.1.4	载荷移置	108
6.1.5	等参变换的必要条件	109
6.1.6	关于应力计算结果的改进	110
6.2	平面 8 节点曲边四边形等参数单元	110
6.3	空间 20 节点等参数单元	112

6.4	高斯积分法简介	115
	习题 6	117
7	动力学问题的有限单元法	119
7.1	动力学问题基础	119
7.1.1	动力平衡方程	119
7.1.2	固有频率和振型	120
7.1.3	动力学问题的有限元步骤	122
7.2	特征向量和特征值的性质	125
7.2.1	完备性的概念	125
7.2.2	振型的正交性定理	126
7.2.3	振型的正则化条件	126
7.2.4	瑞利商	127
7.2.5	特征值的分隔特性	128
7.2.6	Sturm 序列及其性质	130
7.3	特征值问题的求解方法	133
7.3.1	变换法	133
7.3.2	向量迭代法	138
7.3.3	行列式搜索法	146
7.3.4	子空间迭代法	148
7.4	动力响应问题的计算	152
7.4.1	直接积分法	152
7.4.2	振型叠加法	156
7.4.3	里兹向量直接叠加法求响应问题	159
	习题 7	160
8	疲劳寿命分析基本理论	161
8.1	弹-塑性应力-应变与寿命	161
8.1.1	概述	161
8.1.2	真应力和真应变	162
8.1.3	疲劳寿命关系	164
8.1.4	循环应力-应变迟滞关系	166
8.1.5	材料对应变过程的响应	168
8.1.6	平均应力的影响	169
8.1.7	局部应变时间过程分析	170
8.1.8	Smith-Watson-Topper 关系式	177

8.2	雨流循环计数简介	178
8.2.1	信号的时间过程与循环封闭	178
8.2.2	雨流计数法	179
	习题 8	181
9	车辆结构 CAE 分析基本技术	183
9.1	有限元模型的建立	183
9.1.1	概述	183
9.1.2	白车身网格划分的细节处理	184
9.1.3	网格划分质量控制	186
9.1.4	有限元分析的验证	190
9.2	有限元分析计算	191
9.2.1	模态分析	191
9.2.2	静刚度分析	192
9.2.3	静强度分析	193
9.2.4	瞬态响应分析	195
9.2.5	疲劳寿命分析	198
	习题 9	199
	参考文献	200

字母标记法及张量的基本知识

对于稍微深一点的有限元相关理论,如材料的本构关系理论、各种非线性有限元理论、瞬态有限元理论等,都会大量出现用字母标记法和张量来表达的力学公式。其目的是:将其中的一些复杂的数学公式,用一种更简洁的方式来表达,便于将人们的注意力从烦琐的数学公式推导中解脱出来,而集中在所研究的问题本身。因此,要掌握好结构有限元分析的基本理论,有必要学习一些字母标记法及张量的基本知识。

1.1 字母标记法及求和约定

1.1.1 字母标记法

在有限元分析里,通常都会提到这样一些物理量:如一点的坐标 (x, y, z) 、一点的位移 (u, v, w) 、一点的应力 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy})$ 等,这时,一个物理量是用多个分量的集来表示的。而在字母标记法里却不是这样,它是将一个物理量的所有分量都用同一个字母表示,并且用标号(注标)对各分量加以区分,例如:一点的坐标不再用字母 (x, y, z) 的集来表示,而用一个字母 x 来表示,并用下标 $1, 2, 3$ 加以区别。这样,一点的坐标就表示为 (x_1, x_2, x_3) ,通常写为 $x_i (i=1, 2, 3)$;在这里还有一点值得注意:因为在结构有限元里,所论述的物理量一般都是三维的,因此,下标的取值通常都是 $1, 2, 3$ 。以下如未加特殊说明,字母标号中的字母(如 i, j, k 等)都是取数值 $1, 2, 3$ (三维空间)。

另外,对于一点的位移,它的分量用字母标记法写出来为 u_1, u_2, u_3 ,表示为 $u_i (i=1, 2, 3)$ 。

某方向的方向余弦,它的分量用字母标记法写出来为 l_1, l_2, l_3 ,表示为 $l_j (j=1, 2, 3)$ 。

一点的应力分量,用字母标记法写出来则有两个标号,简记为 $\sigma_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 。

同时,在微分运算中,亦可将

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 分别写成 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$, 并用 $f_{,i}$ 表示,这里逗号表示对逗号后的字母标号所代

表的变量求导。

1.1.2 求和约定

在同一项中,重复出现两次的字母标号称为求和标号,它表示将该标号依次取为 1,2,3 时所得各项取和,这就是求和约定。例如:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3, \text{等等。}$$

因为求和标号不再是区分分量的标号,而只是一种约定求和的标志,所以不论选用哪一个字母都不会改变其含义,即求和标号可以任意变换字母都不会改变其含义,例如:

$$a_i b_i = a_j b_j,$$

$$a_{ij} b_j = a_{ik} b_k,$$

$$F_{i,j} dx_j = F_{i,k} dx_k。$$

所以,求和标号称为哑标或假标。

在同一项中不重复出现的标号,称为自由标号。自由标号表示一般的项,它可以取 1,2,3 中任何一个数。例如, u_i 表示 3 个位移分量中的任何一个, σ_{ij} 表示 9 个应力分量中的任何一个。又如:

$$A_{ij} x_j = B_i$$

表示一线性代数方程组:

$$A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 = B_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 = B_2$$

$$A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 = B_3$$

这就是说,自由标号 i 分别取 1,2,3,每更换一个数,就可展出一个代数方程,这里 j 是求和标号。

由上例可见,在同一个方程中等号两边的自由标号必须相同。和哑标不同,不能随意改变自由标号的字母,要改则等式两边各项中相应的自由标号同时改变才不致丧失原有的含义。

1.1.3 δ_{ij} 符号

δ_{ij} 称为 Kronecker delta,是张量分析中的一个基本符号,它的定义为:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

或写成:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

称为单位张量。不难证明,存在下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} \delta_{ij} &= \delta_{ii} = \delta_{jj} = 3 \\ \delta_{ij} \delta_{jk} &= \delta_{ik} \\ \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{km} &= \delta_{im} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\alpha_{ij}\delta_{ij} = \alpha_{ii} = \alpha_{jj} \quad (1.4)$$

$$\alpha_{ij}\delta_{jk} = \alpha_{ik}$$

$$\alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j \quad (1.5)$$

部分证明

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{ij} &= \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} \\ &= \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{13}\delta_{13} + \delta_{21}\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{23}\delta_{23} + \delta_{31}\delta_{31} + \delta_{32}\delta_{32} + \delta_{33}\delta_{33} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k}$$

当 $i=1$ 时, 上式 $= \delta_{11}\delta_{1k} + \delta_{12}\delta_{2k} + \delta_{13}\delta_{3k}$, 其值取决于第 1 项;

当 $i=2$ 时, 上式 $= \delta_{21}\delta_{1k} + \delta_{22}\delta_{2k} + \delta_{23}\delta_{3k}$, 其值取决于第 2 项;

当 $i=3$ 时, 上式 $= \delta_{31}\delta_{1k} + \delta_{32}\delta_{2k} + \delta_{33}\delta_{3k}$, 其值取决于第 3 项。

因此, $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

……其余类推。

由于轴基矢量具有下列关系:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

所以 δ_{ij} 和基矢存在下列关系:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (1.6)$$

1.1.4 置换符号定义

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i, j, k \text{ 按 } 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 \text{ 顺序排列时(顺循环)} \\ -1 & \text{当 } i, j, k \text{ 按 } 3, 2, 1; 2, 1, 3; 1, 3, 2 \text{ 逆序排列时(逆循环)} \\ 0 & \text{当 } i, j, k \text{ 中有重复时(非循环)} \end{cases} \quad (1.7)$$

为置换符号。显然, e_{ijk} 有 27 个量, 其中只有 6 个不为零。

可以证明, 对于 δ_{ij} 和 e_{ijk} 有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} e_{ijk}e_{jki} &= 6 \\ \delta_{ij}e_{ijk} &= 0 \\ e_{ijk}A_iA_j &= 0 \\ e_{ijk}e_{ist} &= \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

δ_{ij} 和 e_{ijk} 是张量分析中经常使用的符号。

1.2 张量的基本知识

1.2.1 坐标变换

在有限元分析的三大步中, 第一步便是通过单元分析, 获得单元的节点力和单元节点位移的平衡方程。这个分析是在每个单元的局部坐标系中进行的。为了分析方便, 在建立局部坐标系时, 总是希望坐标系的一个轴与单元的某个边平行, 如图 1.1 所示。

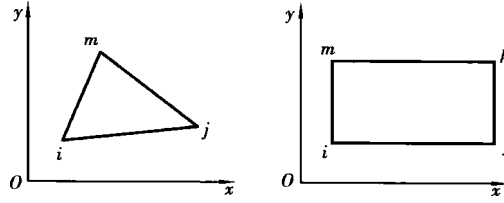


图 1.1 单元局部坐标系

对于一个结构的所有单元而言,由于它们位于不同的空间位置,所建立的局部坐标系的方位彼此不同;另一方面,在做整体分析时,要求所有的方程必须针对同一坐标系,这就需要局部坐标系向整体坐标系转换;同时,整体分析得到每个节点的位移后,又必须回到局部坐标系求单元的应力,而为了在整个结构上显示应力的分布情况,每个单元的应力求出来后,又必须转到整体坐标系下。因此,在有限元分析中,节点坐标、节点位移、单元应力等在局部坐标系和整体坐标系之间的转换经常发生,掌握坐标变换的原理是结构有限元分析必须掌握的基本理论之一。

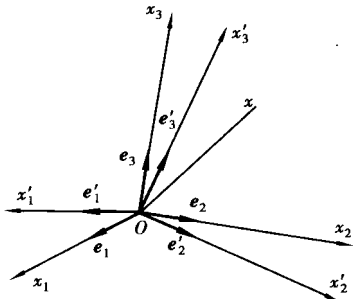


图 1.2 右手直角坐标系

图 1.2 所示为一右手系的直角坐标系 x_1, x_2, x_3 , 其基矢为 e_1, e_2, e_3 。若坐标轴绕原点 O 旋转后形成一新的直角坐标系 x'_1, x'_2, x'_3 , 相应的基矢为 e'_1, e'_2, e'_3 。因为两个坐标系都是直角坐标系, 因此有:

$$\left. \begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \delta_{ij} \\ e'_i \cdot e'_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

现在考虑这些坐标系中的任一点, 它的位置可以用位置矢量 x 表示。 x 在原坐标系中的分量用 x_i 表示:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_j e_j$$

而在新坐标系中用 x'_i 表示: $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 = x'_j e'_j$

因为新旧坐标系表示的是同一矢量, 有: $x = x_j e_j = x'_j e'_j$ (1.10)

即: $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$ 。

将等式两边都右乘以矢量 e_i , 则:

(1) 两边都右乘以矢量 e_1 有: $x_1 e_1 \cdot e_1 + x_2 e_2 \cdot e_1 + x_3 e_3 \cdot e_1 = x'_1 e'_1 \cdot e_1 + x'_2 e'_2 \cdot e_1 + x'_3 e'_3 \cdot e_1$

即: $x_1 = x'_1 e'_1 \cdot e_1 + x'_2 e'_2 \cdot e_1 + x'_3 e'_3 \cdot e_1$

(2) 两边都右乘以矢量 e_2 有: $x_2 = x'_1 e'_1 \cdot e_2 + x'_2 e'_2 \cdot e_2 + x'_3 e'_3 \cdot e_2$

(3) 两边都右乘以矢量 e_3 有: $x_3 = x'_1 e'_1 \cdot e_3 + x'_2 e'_2 \cdot e_3 + x'_3 e'_3 \cdot e_3$

$$x_i = x'_j (e'_j \cdot e_i) \quad (1.11)$$

因为 $e'_j \cdot e_i$ 代表两个矢量的点积, 它应等于两个矢量的模乘以它们夹角的余弦, 即:

$$e'_j \cdot e_i = |e'_j| |e_i| \cos(e'_j, e_i)$$

令: $\cos(e'_j, e_i) = l_{ji}$ (1.12)

则: $e'_j \cdot e_i = l_{ji}$ (1.13)

这里 l_{ji} 就是两坐标系的各坐标轴的方向余弦, 其中第一注标 j 是指新坐标轴的标号, 第二个注标 i 是指原坐标轴的标号。考虑到式(1.9)和式(1.13), 则式(1.11)变为:

$$x_i = x'_j l_{ji} \quad (1.14)$$

类似可得:

$$x'_i = x_j l_{ij} \quad (1.15)$$

由式(1.14)和式(1.15),显然有:

$$l_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (1.16)$$

类似地,一般的矢量 v 可表示为:

$$v = v_i e_i = v'_i e'_i \quad (1.17)$$

它的分量 v_i 和 v'_i 的变换关系为:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= v'_j l_{ji} \\ v'_i &= v_j l_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

式(1.18)就是坐标旋转时矢量的变换关系式。

【例】 当坐标系绕 x_3 轴旋转 θ 角时,求方向余弦。

【解】 参考图 1.3,从纯几何的角度出发,有:

$$x'_1 = OA + AB + BC = x_1 \cos \theta + NB \sin \theta + BM \sin \theta =$$

$$x_1 \cos \theta + (NB + BM) \sin \theta = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

$$x'_2 = MP - PC = MP - NA = x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta$$

$$x'_3 = x_3$$

另外,由式(1.16)得:

$$l_{11} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \cos \theta \quad l_{12} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = \cos(90 - \theta) = \sin \theta \quad l_{13} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} = 0$$

$$l_{21} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = \cos(90 + \theta) = -\sin \theta \quad l_{22} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = \cos \theta \quad l_{23} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} = 0$$

$$l_{31} = \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} = 0 \quad l_{32} = \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} = 0 \quad l_{33} = \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} = 0$$

	x_1	x_2	x_3
x'_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x'_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x'_3	l_{31}	l_{32}	l_{33}

图 1.4 两坐标关系图示

$$\text{令矩阵: } [L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, [L]^T = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix}$$

则有: $[x_1 \ x_2 \ x_3] = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3] \cdot [L]$, 正好表达了式(1.14)。

$[x'_1 \ x'_2 \ x'_3] = [x_1 \ x_2 \ x_3] \cdot [L]^T$, 正好表达了式(1.15)。

这说明坐标变换的公式(1.14)和式(1.15)与纯几何推导的结果是一致的,式中 $[L]$ 矩阵为旋转前后两坐标系之间夹角的余弦,如图 1.4 所示。

1.2.2 标量、矢量和张量

标量是指完全由一个正值或负值的数量所确定的物理量,如物体的质量、温度、力所做的功等。若标量和坐标系选择无关,称为绝对标量,又称不变量。但若确定矢量的 3 个分量是和坐标系选择有关的,这种标量称为非绝对标量。

矢量是指由 3 个分量所确定的物理量或几何量,它是和坐标系的选择有关的。当坐标变换时,其分量的变换是服从一定的规律的,此变化规律就如式(1.18)所示。因此,凡是满足此变换关系的量就定义为矢量。

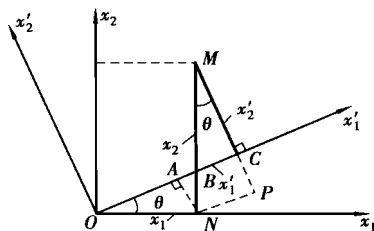


图 1.3 坐标系 x_3 轴旋转

将上述概念加以推广,可以定义张量。

二阶张量的定义:设在给定的坐标系 x_i 内有具有两个注标的 9 个分量 a_{ij} ,当坐标变换时,它们在新坐标系 x'_i 内的 9 个分量变为 a'_{mn} 。若这些量满足变换关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= a'_{mn} l_{mi} l_{nj} \\ a'_{mn} &= a_{ij} l_{mi} l_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

则此 9 个量的集构成二阶张量。

由此定义可知,绝对标量是零阶张量,矢量是一阶张量。类似地可将二阶张量的定义加以推广,定义 n 阶张量。

张量一般是非对称的,如果

$$a_{ij} = a_{ji}$$

则称 a_{ij}, a_{ji} 为对称张量,二阶对称张量只有 6 个独立的分量。如果

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

则称 a_{ij}, a_{ji} 为反对称张量。显然,反对称张量中注标重复的分量 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ 。因此,一个二阶反对称张量只有 3 个独立的分量。

可以证明,坐标轴旋转时不会改变张量的对称性和反对称性。

1.2.3 张量的坐标不变性

由变换式(1.19)可知,如:

$$a_{ij} = 0$$

则:

$$a'_{ij} = 0$$

现在,若在某一坐标系 x_i 已经得到一个张量方程,设为:

$$A_{ij} = B_{ij}$$

改写成:

$$a_{ij} = A_{ij} - B_{ij} = 0$$

根据前面的结论,当变换到另一个坐标系 x'_i 时,应有:

$$a'_{ij} = 0$$

即应有:

$$A'_{ij} = B'_{ij}$$

这就说明,对于某种物理现象,当在某一坐标系中得到的方程,通过坐标变换,很容易得到在别的坐标系的同样形式的方程,此种性质称为张量的坐标不变性(它对于 n 阶张量也成立)。这种性质用于连续介质力学分析将起很大的作用,它可以使我们很容易从笛卡儿坐标系中建立的方程导出其他各种坐标系的控制方程。

习题 1

- 1.1 为什么要引入字母标记法?
- 1.2 什么情况下求和? 什么情况下展出一组方程?
- 1.3 张量的阶次由什么决定? 如何确定张量分量的个数?

2

应力状态和应变状态

任一连续介质体的力学性状都可以用应力和应变来描述。关于应力和应变的概念及其特性,在一般的材料力学和弹性力学书中都介绍过。因为这些分析只涉及到平衡关系和变形几何关系,而与材料的具体物理性质无关,所以对各种连续介质体都是普遍适用的。在本章,结合车辆结构强度有限元分析的具体需要,对应力的概念和应力的特性进行一些更加深入系统的学习。

2.1 一点的应力状态

2.1.1 内力和应力

物体在外力的作用下,伴随变形而同时在物体内产生抵抗变形的力,称为内力。如果要讨论作用在某一个截面上的内力情况,可以采用截面法,即设想沿这个截面把物体分成 A 和 B 两个部分,示出 B 对 A 的作用力 P_A ,及 A 对 B 的作用力 P_B ,由力的作用反作用定律可知,它们应该大小相等方向相反,如图 2.1(a) 所示。 P_A 和 P_B 即是我们所要研究的内力。一般来说,内力沿整个截面不是均匀分布的。所以,在实际运用时,仅仅知道截面上内力的总和是不够的,还必须知道内力在截面上各点的分布情况。为此,我们可以在截面内任一点附近划出一块微小的面积 ΔF ,其上作用的内力为 ΔP_N ,如图 2.1(b) 所示。 ΔP_N 在 ΔF 上的平均值 $\Delta P_N/\Delta F$ 就称为这块微小面积上的平均应力。当将 ΔF 无限缩小趋于一点时,则:

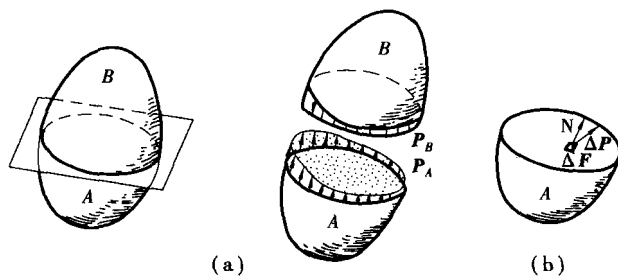


图 2.1 物体内力的表示