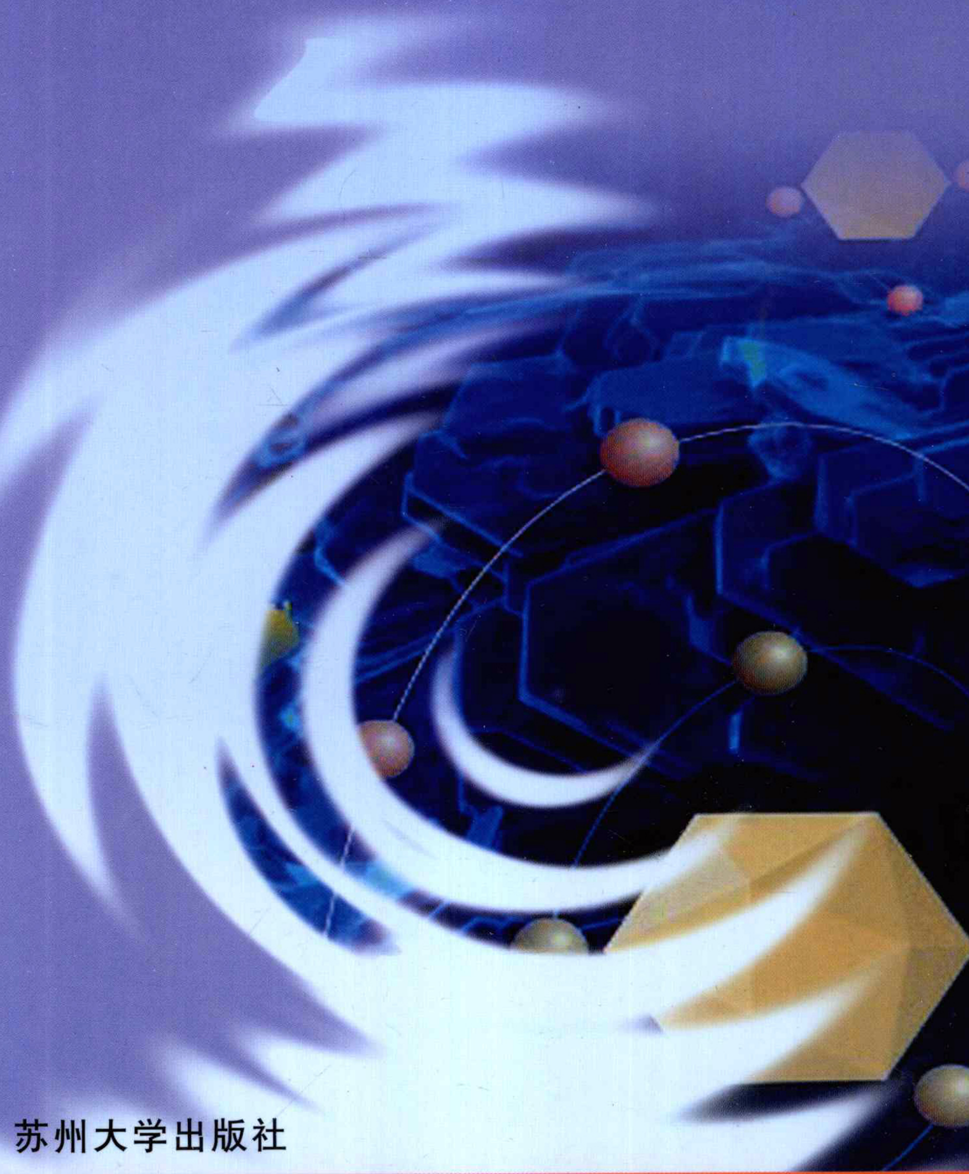
21世纪高等院校新教材

高等数学

邱筝 主编

MATHEMATICS



苏州大学出版社

21世纪高等院校新教材

高等数学

邱筝 主编

MATHEMATICS

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邱筝主编. —苏州：苏州大学出版社，2005.8
21世纪高等院校新教材
ISBN 7-81090-514-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第068220号

高等数学
邱 筝 主编
责任编辑 秦 淦

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇 邮编：214217)

开本787mm×1 092mm 1/16 印张19.5 字数484千
2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷
ISBN 7-81090-514-7/O·26(课) 定价：25.00元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高等数学》编委会

主　编： 邱　筝

副主编： 赵　彤　纪　锋　钱黎明

参加编写人员（以姓氏笔画为序）：

朱卫平　纪　锋　邱　筝　张　亭

赵　彤　钱黎明　高　伟　黄杰南

前　言

PREFACE

《高等数学》是高职院校工程类、管理类、经济类专业一门十分重要的公共基础课，对于培养高职学生的思维能力、应用能力和基本运算技能起着重要的作用，为后继专业课程的学习、接受不断更新的知识和技术打下坚实的基础。

根据教育部关于职业教育必须面对就业的指示精神，为适应高职教育学制转轨的需求，面对《高等数学》课程学时数不断精简的实际状况，我们组织了长期从事高职数学教学的一线教师编写了本书。

本教材的编写依据“淡化严密性，强调思维性，加强实践环节，运用现代技术，适应专业需求”的高职数学教学思想，分析后续职业基础课和职业技术课教学内容所涉及的数学基础需要，遵循“必需、够用、高效”的原则，注意现代化计算工具的应用，并充分汲取了编著者十多年数学教学经验和教改体会。在内容编排上，突出以应用为主线的内容体系，淡化了理论证明，注重对学生进行数学思想、方法和数学应用软件应用能力的培养。教材加强对数学基本概念和基本定理从实际问题的引入和直观描述与几何解释，部分章节增加了应用实例和习题。

传统的数学理论与现代的科学计算工具的结合是高职数学发展的必然趋势，为适应这一形势的发展，我们在相应章节分别介绍 Mathematica 在求极限、导数、作图、积分、微分方程、无穷级数等方面的应用，以增强学生学习数学和应用数学的兴趣，引导和帮助学生借助 Mathematica 软件来解决在学习数学时遇到的复杂计算或作图方面的困难，淡化计算技巧，强调实际应用。

全书共分十章，主要内容为：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理和导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。内容安排为实际教学提供了较大的弹性，适合 60—100 学时不同专业的教学需求。

本书可作为高等职业教育、高等专科教育、成人教育工程类、管理类、经济类专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

全书由邱筝任主编，赵彤、纪锋、钱黎明任副主编，第一章由朱卫平编写，第二章由纪锋编写，第五章、第七章由黄惠南编写，第六章及第三章 3.6 由张亭编写，第八章由赵彤编写，第九章由高伟编写，第十章由钱黎明编写，第三章 3.1—3.5、第四章及各章 Mathematica 软件应用由邱筝编写并负责全书的统稿工作。教材中的插图由黄惠南绘制。

本书的编写和出版，自始至终得到了江苏省教育厅、苏州大学出版社及南通职业大学、南通航运职业技术学院、南通农业职业技术学院、南通纺织职业技术学院等单位的领导和老师的大力支持和帮助，在此一并表示诚挚的感谢。

由于水平与经验有限，书中难免存在一些缺点和不足，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月

目　录
CONTENTS

第一章　函数　极限　连续

第二章　一元函数导数与微分

第三章　微分中值定理和导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　常微分方程

第七章　向量代数与空间解析几何

第八章 多元函数微分学

第九章 多元函数积分学

第十章 无穷级数

第一章

函数　极限　连续

函数是高等数学研究的对象，极限是高等数学中研究问题的基本方法. 本章在简单回顾函数概念与性质的基础上，着重讨论函数的极限、连续等基本概念，以及它们的性质与运算法则.

1.1　函　　数

1.1.1　函数概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，当变量 x 在实数集 D 内任取某一数值时，变量 y 依照某个对应法则 f 有唯一确定的实数与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数 f 的**定义域**.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值. 数集 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

由于常常通过函数值讨论函数，因此习惯上把自变量为 x，因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

由定义 1.1.1 可见，定义域 D 和对应法则 f 是构成函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 如函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 的定义域不同，因此它们是两个不同的函数；$y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应法则不同，因此它们也是两个不同的函数；而函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数.

在研究函数时，经常要考虑它的定义域. 对于用数学式子给出的函数，通常约定函数的定义域是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合，如函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$，自变量 x 必须满足 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 即函数的定义域 $D=[-1,1)\cup(1,+\infty)$. 对于具有实际背景的函数，要根据实际背景中变量的实际意义来确定定义域. 例如，圆的面积 S 是半径 r 的函数 $S(r)=\pi r^2$，因此它的定义域 $D=(0,+\infty)$；某电信局规定上网收费标准：当月上网时间低于 60 小时，按每小时 1.80 元收取，超过 60 小时后的部分按每小时 1.20 元收取. 这样当月上网费 y 与上网时间 t 的函数关系为

$$y=\begin{cases}1.80t, & 0\leqslant t\leqslant 60,\\ 1.80\times 60+1.20(t-60), & 60<t\leqslant 744,\end{cases}$$

函数的定义域为 $D=[0,744]$.

像上例这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 分段函数是用几个式子表示一个函数.

再如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

也是分段函数，如图 1-1 所示，不过它可以等价变形为 $y=\sqrt{x^2}$，即对应关系可以化成一个式子.

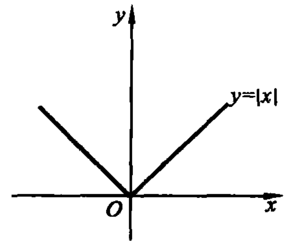


图 1-1

若变量 x,y 之间的函数关系是由一个含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的，则称 y 是 x 的**隐函数**. 相应地，把直接由自变量的式子表示的函数称为**显函数**.

例如，$x^2+\sin 2y+2y=1$，$x^2+y^2=1$ 等确定的函数都是隐函数，而 $y=x+1$，$y=|x|$ 等都是显函数.

为了讨论函数在一点附近的某些性态，引入点的**邻域**的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 就是点 a 的一个邻域，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径，如图 1-2(a)所示.

数集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的去心 δ 邻域**，如图 1-2(b)所示，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

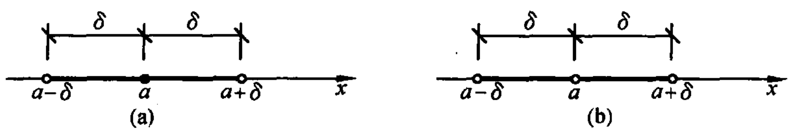


图 1-2

有时为了方便，把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**，开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于区间 (a,b) 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是**单调增加的**（**或单调减少的**），(a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调增加区间**（**或单调减少区间**）.

在区间 (a,b) 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 (a,b) 上的**单调函数**，(a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调区间**.

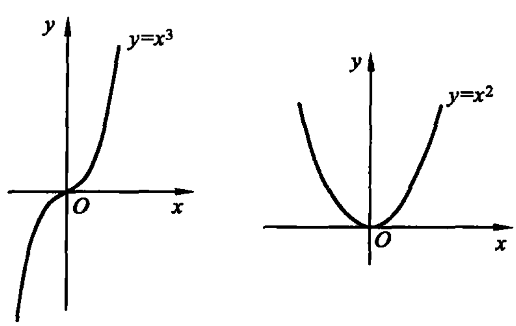


图 1-3

从几何直观上看，单调增加函数的图象沿 x 轴正向而上升，单调减少函数的图象沿 x 轴正向而下降. 例如，函数 $y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；函数 $y=$

x^2 在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加，但在定义域$(-\infty,+\infty)$内，$y=x^2$ 不是单调函数，如图 1-3 所示.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称，如图 1-4 所示.

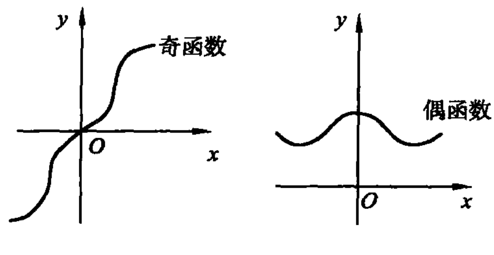


图 1-4

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在一个正数 M，使得对于任一 $x\in X$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X **上有界**. 如果不存在这样的正常数 M，则称 $f(x)$在 X **上无界**.

如果 $f(x)$在 D 上有界，则称 $f(x)$为**有界函数**. 例如，函数 $y=\sin x$ 是有界函数，函数 $y=x^2$在$[-1,1]$内是有界的，但它在$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

特别，如果存在 M，使得 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$有上界；如果存在 m，使得 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$有下界. 显然若函数有界，界是不唯一的.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为**周期函数**，T 为 $f(x)$的**周期**. 当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期是指最小正周期.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

幂函数：$y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$；

指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$；

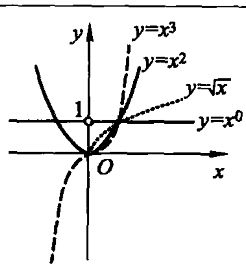
对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$；

三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

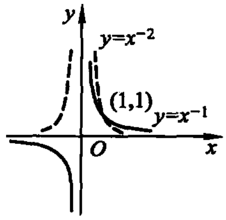
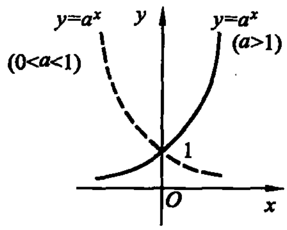
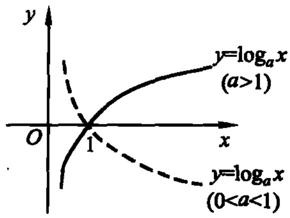
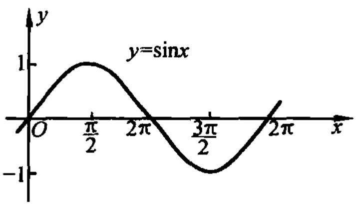
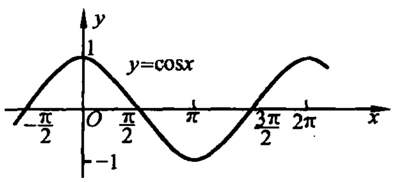
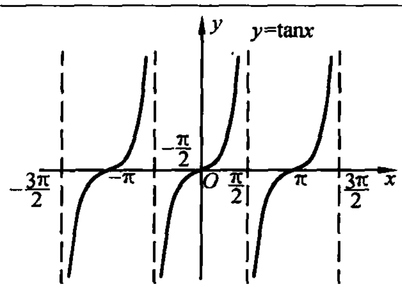
反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

以上五类函数统称为**基本初等函数**，它们的定义域、图象和性质如表 1-1 所示.

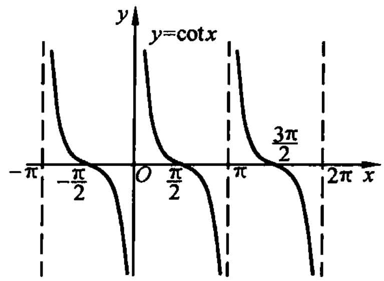
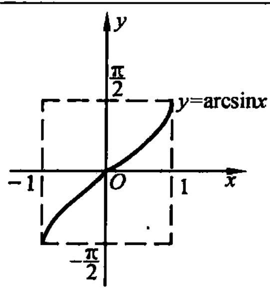
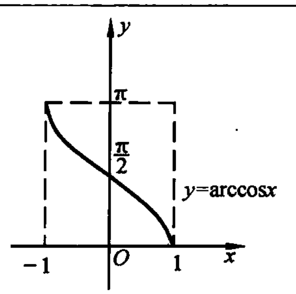
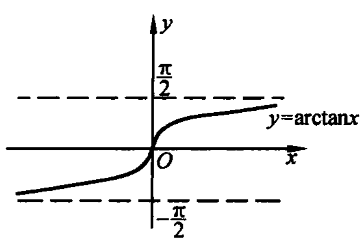
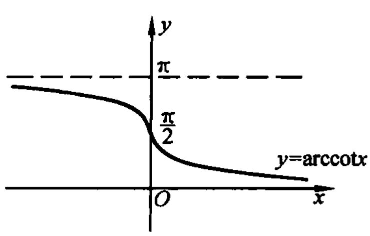
表 1-1　基本初等函数的图象、定义域和主要性质

函　数	图　　象	定义域	主要性质
1. 幂函数 $y=x^\alpha$ （α 为常数）		根据 α 的取值而定	1. 图象过点$(0,0)$，$(1,1)$； 2. 在$(0,+\infty)$内单调递增； 3. 无界.

续表

函　数	图　象	定义域	主要性质
	$\alpha<0$ 	根据 α 的取值而定	1. 图象过点(1,1)； 2. 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减； 3. 无界； 4. 以 x 轴、y 轴为渐近线.
2. 指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$		$(-\infty,+\infty)$	1. 图象过点(0,1)； 2. $y>0$ 且无界； 3. 当 $0<a<1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减； 当 $a>1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.
3. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$		$(0,+\infty)$	1. 图象过点(1,0)； 2. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 3. 当 $0<a<1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减； 当 $a>1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.
4. 正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\|y\|=\|\sin x\|\leqslant1$； 2. 奇函数； 3. 以 2π 为周期的周期函数.
5. 余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\|y\|=\|\cos x\|\leqslant1$； 2. 偶函数； 3. 以 2π 为周期的周期函数.
6. 正切函数 $y=\tan x$		$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	1. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 2. 奇函数； 3. 以 π 为周期的周期函数.

续表

函　数	图　象	定义域	主要性质
7. 余切函数 $y=\cot x$		$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$	1. 无界函数，$y\in\mathbf{R}$； 2. 奇函数； 3. 以 π 为周期的周期函数.
8. 反正弦函数 $y=\arcsin x$		$[-1,1]$	1. 有界函数，$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$； 2. 奇函数； 3. 单调递增.
9. 反余弦函数 $y=\arccos x$		$[-1,1]$	1. 有界函数，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$； 2. 非奇非偶函数； 3. 单调递减.
10. 反正切函数 $y=\arctan x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$； 2. 奇函数； 3. 单调递增.
11. 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$(-\infty,+\infty)$	1. 有界函数，$0<\operatorname{arccot} x<\pi$； 2. 非奇非偶函数； 3. 单调递减.

2. 复合函数

由物理学知，物体的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，式中 m 是物体的质量. 如果考虑物体上抛运动，把一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 垂直上抛，由于地球引力的作用，它就不断减速，这时 $v=v_0-gt$，于是物体的动能 E 通过速度成为时间的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 可以看成由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的一个函数.

定义 1.1.2 设有两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域是 $(-\infty,0)$，与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集为空集，因此不能复合.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，还可以由多个函数复合而成. 复合函数通常是由基本初等函数与常数经过四则运算形成的简单函数复合而成.

例 1.1.1 已知 $y=\ln u, u=4-v^2, v=\cos x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 u 和 v 都是中间变量，所以 $y=\ln(4-v^2)=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 1.1.2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$；(2) $y=\sin^2(x+1)$.

解 (1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 由 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=x^2+1$ 复合而成.

(2) $y=\sin^2(x+1)$ 由 $y=u^2, u=\sin v, v=x+1$ 复合而成.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合构成的，可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\frac{\sin x}{x}, y=\ln(x+1), y=x^3+1$ 等都是初等函数，而 $y=1+x+x^2+\cdots$ 不是初等函数.

习题 1-1

1. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.

2. 设 $f(x)=2x^2-3x+7$，求 $f(0), f(4), f(a), f(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(2)$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x^2+1}$；　　(2) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\log_2\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+3}$；

(5) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；　　(6) $y=\ln(\ln x)$；

(7) $y=\begin{cases}x^2+1, & 1<x<2,\\ x^2-1, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$

5. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(\tan x)$ 的定义域.

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=3x^2-5x^6$；　　(2) $y=a^x+a^{-x}(a>0)$；

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x+1)(x-1)$；

(5) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(6) $y=e^{-x^2}+x$.

7. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

8. 如果 $y=u^2$，$u=\log_3 x$，将 y 表示成 x 的函数.

9. 下列函数式是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{3x-1}$；　　(2) $y=\sin 5x$；

(3) $y=\lg(1+2x)$；　　(4) $y=(1+\lg^3 x)^6$；

(5) $y=\sqrt{\lg\sqrt{x}}$；　　(6) $y=\lg(\arcsin x^5)$；

(7) $y=e^{\sqrt{x+1}}$；　　(8) $y=\cos^3(2x+1)$.

10. 写出如图 1-5 所示的函数的关系式（$a>0$，$b>0$）.

11. 在半径为 R 的球内作一内接圆柱体，如图 1-6 所示，试将圆柱体的体积 V 表示为圆柱体的高 h 的函数，并求此函数的定义域.

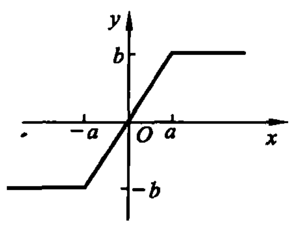


图 1-5

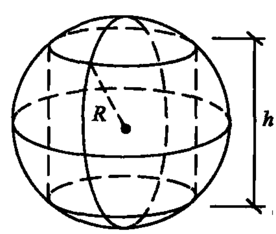


图 1-6

1.2 函数的极限

在实际问题中，当建立了变量之间的函数关系后，为了便于掌握变量的变化规律，需要考察变量在变化过程中的变化趋势，这在数学上就是本节要讨论的极限问题.

1.2.1 函数的极限

对于一般函数 $f(x)(x\in D)$，可以研究在自变量 x 无限趋近于某一常数 x_0（记为 $x\to x_0$）或 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记为 $x\to\infty$）时，函数值 $f(x)$ 的变化趋势. 下面分别来讨论.