XIANXINGDAISHU
XUEXIFUDAO YU XITIJIEXI

线性代数
学习辅导与习题解析

李宏伟 李 星 李志明 沈远彤 编

科学出版社
www.sciencep.com

线性代数学习辅导与习题解析

李宏伟　李　星　李志明　沈远彤　编

科　学　出　版　社

北　京

内容简介

本书是为配合学习线性代数课程而编写的学习辅导书，内容分为行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换6章. 每章包括本章知识要点、典型习题解析和自测题及解答三部分. 书中所选习题具有代表性、题型多样、覆盖面广、解答详细.

本书可作为高等学校理工科各专业学生学习"线性代数"课程的同步学习辅导书，也可作为本科生考研复习的参考资料，还可供高校教师作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导与习题解析 / 李宏伟等编. —北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-024102-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. 李… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 023564 号

责任编辑：张颖兵 曾 莉 / 责任校对：梅 莹
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年3月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—4 000 字数：302 000

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业本科生的重要基础课程，是全国硕士研究生入学考试数学科目的必考内容之一．线性代数不仅是学习后续数学课程和专业课程的必备基础知识，也是自然科学和工程技术领域中的一种重要数学工具．学习线性代数可以培养并提高学生的抽象思维、逻辑推理以及代数运算等能力．然而，线性代数具有内容丰富、习题类型多、技巧性强等特点，而教学时数有限，很多内容和方法不能在课堂教学内完成．这就要求学生不仅要在课堂内系统学习基本概念和理论，还需要在课外进行大量的自学与练习以熟练掌握解题方法和技巧．

为了帮助学生进一步理解线性代数的基本概念、巩固基础理论、提高解题技能，我们根据长期的线性代数课程教学实践，参考了多种线性代数教材和复习资料，按同济大学数学系编写的《线性代数》(第五版)的章节顺序，编写了本书．每章具体内容如下．

(1) 本章知识要点．本部分内容归纳总结了相应章节的知识要点，包括基本概念、基本性质和重要定理等内容．在解题之前浏览一下这部分内容，既可以起到复习的作用，又能帮助学生理清思路．

(2) 典型习题解析．我们针对线性代数课程的重点和难点，精选了一批典型习题进行分析与解答．这些习题包括填空题、选择题、计算题和证明题四种题型，其中一部分习题是往年全国硕士研究生入学考试中数学科目的线性代数部分的试题．学生通过这些习题的分析与求解过程，可以进一步领会课程内容、提高解题能力．

(3) 自测题及解答．每章给出了一套自测题及详细解答，读者可以通过自测题检验对该章知识的掌握程度，进一步增强解题能力．

本书可作为理工科各专业学生学习“线性代数”课程的同步学习辅导书，也可作为本科生考研复习的参考资料，还可供高校教师在讲授线性代数课程时作为教学参考书使用．

本书参考了多本线性代数的教材和复习资料，在此向这些书籍的作者表示衷心的感谢，重要的参考资料列于书末．科学出版社的编辑为本书的出版给予了热情的支持和帮助，在此也一并表示感谢．

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2008 年 12 月

目　　录

第一章 行 列 式

本章知识要点

一、排列与逆序

1. 全排列

将 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列（简称排列）.

n 个不同元素共有 $n!$ 种排列.

2. 逆序数

n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说构成一个逆序.

一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，一般记为 τ.

3. 奇(偶)排列

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

n 个不同元素的所有排列中奇、偶排列各占 $\frac{n!}{2}$.

4. 对换

在一个排列中，互换任意两个元素的位置而其余元素不动，就得到一个新排列，这一变换称为对换.

对换改变排列的奇偶性，即奇(偶)排列经过一次对换变成偶(奇)排列.

任何一个排列与标准排列都可以经过一系列对换而互换，并且所作对换的次数与原排列有相同的奇偶性.

二、行列式的定义

n 阶行列式用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示，也可简单记为 $D=\det(a_{ij})$，其中，a_{ij} 为行列式的第 i 行第 j 列元素.

n 阶行列式 D 表示 $n!$ 项的代数和，其中，每项都是位于 D 中不同行和不同列

的 n 个元素的乘积；每项的符号取法如下：当各元素按行标的自然顺序 $12\cdots n$ 排列时，若列标 $p_1p_2\cdots p_n$ 构成的排列为奇排列，则该项的符号为负，否则符号为正，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中，$\sum$ 表示对 1，2，…，n 的所有排列求和，τ 表示排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

特别地，当 $n=2$，3 时，分别有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

另外，n 阶行列式也可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

三、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置行列式. 行列式具有如下性质:

(1) 行列式与它的转置行列式的值相等.

(2) 互换行列式的任意两行(列),行列式变号. 特别地,若一个行列式有两行(列)完全相同,则该行列式等于 0.

(3) 行列式中某行(列)的公因子可以提到行列式符号外面来,即用一个数乘这个行列式等于用这个数乘这个行列式的任意一行(列). 特别地,若行列式中某行(列)元素全为 0,则此行列式等于 0.

(4) 行列式中如果有两行(列)的元素对应成比例,则行列式等于 0.

(5) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行(列)以外,其余各行(列)与原来行列式的对应行(列)相同.

(6) 将行列式某行(列)的倍数加到另一行(列),行列式的值不变.

四、行列式按行(列)展开

1. 余子式

在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中,将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去后剩下的元素按照原来的排法构成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 展开定理

(1) 行列式的值等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

(2) n 阶行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于 0,即

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \end{aligned}\right. \quad (i\neq j)$$

五、几个常用行列式及其值

1. 上(下)三角形行列式

上(下)三角形行列式的值等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元

素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 次三角形行列式

次三角形行列式的值由次对角线上的元素的乘积添加适当的正、负号所得到，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

特别地，次对角行列式的值由次对角线上的元素的乘积添加适当的正、负号所得到，即

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 分块三角形行列式

分块三角形行列式可化为低阶行列式的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

4. Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

六、n 个未知数 n 个方程的线性方程组

1. Cramer 法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \cdots \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中，D_j 是把系数行列式中第 j 列元素换成方程组的常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 所得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

2. 齐次线性方程组

常数项全为 0 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组. 显然,齐次线性方程组总是有解的,因为 $(0,0,\cdots,0)$ 就是一个解,它称为零解.

对于上述齐次线性方程组,若它的系数行列式 $D \neq 0$,则它只有零解. 换句话说,如果它有非零解,那么必有 $D = 0$.

典型习题解析

1. 填空题.

(1) 二阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} =$ ________.

(2) 设 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 100 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $a =$ ________, $b =$ ________.

(3) 当 $i =$ ________, $k =$ ________ 时,排列 $1274i56k9$ 为偶排列.

(4) $2n$ 元排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$ 的逆序数为________,排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n-2)(2n)$ 的逆序数为________.

(5) 设 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k,则 n 元排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数为________.

(6) 五阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的展开式中,项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$ 前面带________号,项 $a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$ 前面带________号.

(7) 四阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的展开式中,含有因子 $a_{11}a_{23}$ 且带负号的项为________.

(8) 若 n 阶行列式中零元素的个数多于 $n^2 - n$ 个,则该行列式的值为________.

(9) 一元多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________.

(10) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, 则 $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} =$ ________.

(11) 若 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

(12) 一元多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数为________.

(13) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

(14) 设 D 为五阶行列式，则由 D 的第 1 行和第 4 行元素构成的 D 的二阶子式个数是________.

(15) 设有三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j = 1, 2, 3)$，则 $aA_{13} + bA_{23} + cA_{33}$ 对应的三阶行列式为________.

(16) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和为________.

(17) 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 2^2 & 3^2 & x^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根是________.

(18) 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} =$ ________.

(19) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ 满足__________.

(20) 当 $\lambda =$ ______ 或 $\mu =$ ______ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

有非零解.

解 (1) 由对角线法则可得

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\sin\theta - (-\sin\theta)\cos\theta = \sin 2\theta$$

(2) 由对角线法则得到

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 100 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -(a^2+b^2) = 0$$

故 $a=0,\ b=0$.

(3) i 和 k 可以取 8 或 3,而 127435689 是奇排列,127485639 是偶排列,此时 $i=8,\ k=3$.

(4) 排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$ 的逆序数为

$$0+(2n-2)+0+(2n-4)+\cdots+0+2=\frac{(2n-2)+2}{2}(n-1)=n(n-1)$$

排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n-2)(2n)$ 的逆序数为

$$0+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+0+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

(5) a_i 与 a_j 只在 $a_1a_2\cdots a_n$ 和 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 中的一个构成逆序,若 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数为 l,则 $k+l=\dfrac{n(n-1)}{2}$,故所求的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

(6) 项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$ 的列标排列 34215 的逆序数为 5,所以前面带负号. 项 $a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$ 的列标排列 54231 的逆序数为 9,所以前面带负号.

(7) $D=\det(a_{ij})$ 的展开式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$,而排列 1324 的逆序数为 1,排列 1342 的逆序数为 2,故含有因子 $a_{11}a_{23}$ 且带负号的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

(8) 行列式中零元素的个数大于 $n(n-1)$,则行列式至少有一行全为 0,故行列式的值为 0.

(9) 多项式中带 x^3 的项只含在 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$ 中,而它的展开式中 x^3 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(10) 由行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2\lambda^3$$

(11) 由行列式的性质可得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(12) 由行列式性质可得

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x-1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

带 x^4 的项只含在项 $(2x-1)x^3$ 中,故 x^4 的系数为 2.

(13) 按照行列式的定义可知原式等于 $-4!$,也可以按照展开定理得到答案.

(14) 根据子式的定义和取法可知,两个固定行构成的 D 的二阶子式个数是 $C_5^2 = 10$ 个.

(15) 由行列式展开定理可知

$$aA_{13} + bA_{23} + cA_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & b \\ 7 & 8 & c \end{vmatrix}$$

(16) $$\text{第 4 行各元素余子式之和} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

(17) 左边行列式是一个关于 x 的三次多项式,它最多有 3 个实根. 由 Vandermonde 行列式可知, $x = 1, 2, 3$ 是方程的根.

(18) 由行列式的性质和 Vandermonde 行列式结果可得

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

(19) 若齐次线性方程组只有零解,则要求系数行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0$,解得 $\lambda\neq 1$.

(20) 方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix}=\mu(\lambda-1)$. 方程组有非零解要求系数行列式等于 0,故 $\lambda=1$ 或者 $\mu=0$.

2. 单项选择题.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$ 的值等于_______.

A. $(x+2)(4x-4)$　　　　B. $(x+2)(5x-4)$

C. $(x+2)(3x-4)$　　　　D. $(x+2)(4-5x)$

(2) 行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的定义式中,项 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 所带符号为_______.

A. 正号　　　　B. 负号

C. $(-1)^n$　　　　D. $(-1)^{n-1}$

(3) 行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \cdots & -a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$_______.

A. $-a_1a_2\cdots a_n$　　　　B. $a_1a_2\cdots a_n$

C. $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$　　　　D. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$

(4) 若行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$, 则 $x=$_______.

A. -2　　　　B. -1

C. 1　　　　D. 2

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

A. $a_1a_2\cdots a_n$　　B. $-a_1a_2\cdots a_n$

C. $(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n$　　D. $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$

(6) 与行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等值的行列式为________.

A. $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(7) 若 $f_i(x)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 均可导,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix} =$ ________.

A. $\begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) \\ f'_3(x) & f'_4(x) \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} f'_1(x) & f_2(x) \\ f'_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} f_1(x) & f'_2(x) \\ f_3(x) & f'_4(x) \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} f'_1(x) & f_2(x) \\ f'_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f'_2(x) \\ f_3(x) & f'_4(x) \end{vmatrix}$

(8) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, 则 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1+2c_1 & a_1+2b_1+3c_1 \\ c_2 & b_2+2c_2 & a_2+2b_2+3c_2 \\ c_3 & b_3+2c_3 & a_3+2b_3+3c_3 \end{vmatrix} =$ ________.

A. $-2D$　　B. $-D$

C. D　　D. $2D$

(9) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$, 则 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} =$ ________.

A. $-6d$　　B. $-4d$

C. $4d$　　D. $6d$

(10) 设五阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，则五阶行列式 $D_1=\det\left((-1)^{i+j}a_{ij}\right)=$ ________.

A. $-D$ B. D

C. 0 D. 无法确定

(11) 设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$，则 $\begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_1 & a_3+a_2 & a_4+a_3 \\ b_1+b_4 & b_2+b_1 & b_3+b_2 & b_4+b_3 \\ c_1+c_4 & c_2+c_1 & c_3+c_2 & c_4+c_3 \\ d_1+d_4 & d_2+d_1 & d_3+d_2 & d_4+d_3 \end{vmatrix}=$ ________.

A. $-D$ B. D

C. 0 D. $2D$

(12) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$ 中，x 的次数最高可能为________.

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

(13) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的零点个数为________.

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

(14) 行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$ 的值为________.

A. $-a^4$ B. 0

C. a^4 D. a^4-1

(15) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ 的值为________.