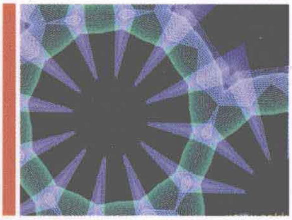
高等教育“十一五”规划教材

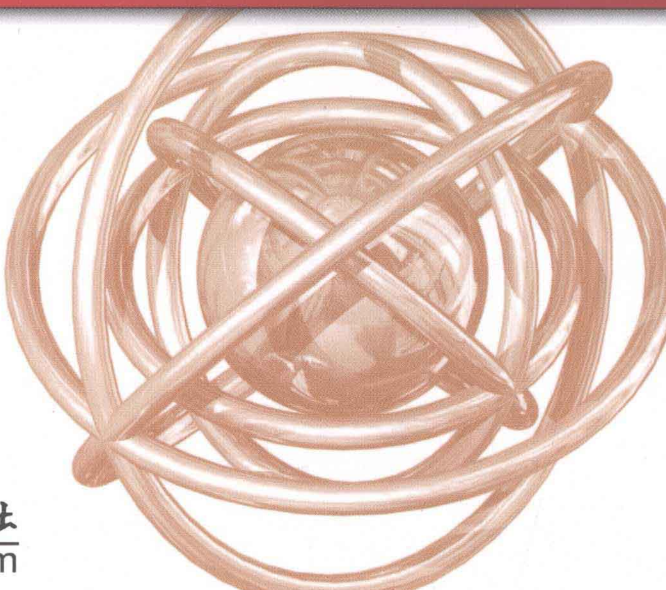


高职高专公共基础课教材系列

应用数学

YINGYONG SHUXUE

黄 炜 主 编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共基础课教材系列

应用数学

黄　炜　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共有8章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率初步、数理统计、拉普拉斯变换与傅里叶变换、数学实验——Matlab软件在数学中的应用等. 本书突出了数学建模思想、方法，语言叙述清晰，内容丰富，适合分层教学.

本书可供部分财经类本科专业学生和高职高专各专业学生使用，也适合成人高校及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院使用.

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/黄炜主编. —北京：科学出版社，2008

（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共基础课教材系列）

ISBN 978-7-03-022335-7

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 黄…　Ⅲ. 应用数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 088973 号

责任编辑：沈力匀　周　恢/责任校对：耿　耘

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 10 月第　一　版　　开本：B5（720×1000）

2008 年 10 月第一次印刷　　印张：20

印数：1—4000　　字数：401 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　　言

为了适应高职高专院校培养技术应用型人才的需要，本书根据国家教育部颁布的《高职高专应用数学课程教学基本要求》和《高职高专专业人才培养目标及规格》，依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”为指导思想，在充分调研的基础上，与专业教师共同商讨，构建了内容，加强了实用性、科学性、针对性，体现了财经类本科及高职高专的特色.

数学的应用是数学本身发展的需要，也是推动其他学科发展的动力，故数学发展不仅要领悟其思想，更要关注其应用，作为一门基础课，应该突出基础理论知识的应用和实践能力的培养. 因此，在全书内容的安排上，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度和少而精”的原则，以教师好教、学生好学为目标，结合最新制定的教学大纲，吸收同类教材、同类课程教改的经验，对传统的同类教材削枝强干，淡化理论推导，不追求严格论证和烦琐的推导，强调几何、物理、经济和实际背景的诠释，在保证科学性的基础上注意讲清概念，注重学生基本运算能力和分析问题解决问题能力的培养.

本书的基本教学时数为 60 学时左右，共有 8 章，内容有行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型、概率初步、数理统计、拉普拉斯变换与傅里叶变换数学实验——Matlab 软件在应用数学中的应用等. 其中数学实验——Matlab 软件在应用数学中的应用，界面友好，易教易学，可发挥计算机软件的作用，有效地培养学生应用现代化计算工具解决各种实际问题的能力，望有条件的院校不要随意删减.

本书富有弹性，对带有“*”的章节内容，各校可根据专业特点和学生的实际情况灵活选用，前 7 章精心设计了“本章小结”，可帮助学生清楚明了地掌握知识要点，深刻地理解该章主要学习内容. 为了巩固概念和提高能力，在习题编排上注意选材新颖，以供学生练习和自测之用；同时本书最后还附有附录、部分参考答案，以方便学生使用. 作为教材，本书可供财经类本科及高职高专院校使用，同时还适合成人高校及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院使用.

本书主编为黄炜，副主编为翁谦锁、吉耀武、覃东君、朱月珍、付巧峰、骞龙江. 全书的编写分工如下：第 1、3 章由朱月珍编写，第 2 章由翁谦锁编写，第 4 章由付巧峰编写，第 5 章由覃东君、骞龙江编写，第 6、8 章、附录及每章的本章小结由黄炜编写，第 7 章由吉耀武编写；全书编写工作由黄炜组织，并负责全书大纲的编写、框架结构、统稿、定稿及作图工作. 陈军科、何彬、刘睿琼

也参与了部分统稿工作.

本书由刘志峰、陈钢担任主审，由张拓、何彬担任副主审，他们为本书提出了很多修改意见和建议.

编写本书时参考了许多文献资料，在此对有关资料的作者表示诚挚的谢意，同时对本书的编写者所在院校领导的鼎力支持表示感谢.

由于编者的水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，敬请广大师生批评指正.

目　　录

第1章　行　列　式

在许多实际工作中，经常会遇到解线性方程组的问题. 初等代数中，已讨论过二元、三元线性方程组的解法. 本章首先给出二阶、三阶行列式的概念，并利用它们解二元、三元线性方程组，从而把二阶、三阶行列式的概念及应用推广到 n 元线性方程组.

1.1　二阶行列式　三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

历史上，行列式的概念是从解线性方程组的过程中产生的.

用加减消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1.1}$$

假定 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，得 $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$，$x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

定义 1.1　用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式.

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中实线为主对角线，虚线为次对角线；横排叫行，纵排叫列；元素 a_{ij} 的第1个下标 i 叫行标，表明该元素位于第 i 行；第2个下标 j 叫列标，表明该元素位于第 j 列；$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫二阶行列式的展开式. 二阶行列式的展开式是按对角线法则展开的，即主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

对于二元线性方程组(1.1)，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1)的解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$.

其中分母 D 是方程组(1.1)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式，称为系数行列式；分子 D_1、D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别替换了 D 中的第1列、第2

列的元素所得的行列式.

【例 1.1】 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\times 5-(-3)\times 4 = 2.$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1.$

【例 1.2】 用行列式解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-8=0 \\ x_1-2x_2+3=0 \end{cases}$.

解 先将方程组写成一般形式

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}.$$

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0, D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-14.$$

故方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$.

1.1.2 三阶行列式

对三元线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}, \tag{1.2}$$

仿照解二元线性方程组,引入三阶行列式的定义.

定义 1.2 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33},$$

称为三阶行列式.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

三阶行列式的展开式共有 $6=3!$ 项，每一项都是不同行不同列的 3 个元素之积，正负项数各半. 为了便于记忆，可用“对角线法则”来表述：将主对角线和与主对角线平行的 3 个元素之积取正号，次对角线和与次对角线平行的 3 个元素之积取负号，然后相加，便是三阶行列式的展开式，如图 1.1(a)、(b)所示.

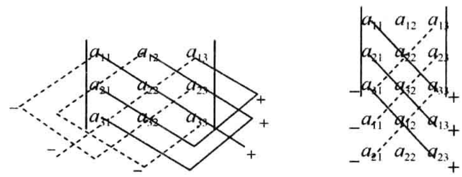


图 1.1

此 2 种方法表示三阶行列式是实线上 3 个元素的乘积取正，虚线 3 个元素的乘积取负.

应当指出对角线展开法只适用于二阶、三阶行列式.

【例 1.3】 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

解 用对角线展开法

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 1\times0\times(-6)+4\times2\times(-3)+(-1)\times2\times5-(-1)\times0\times(-3)-1\times2\times5-4\times2\times(-6)=4.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc+0+0-0-0-0=abc.$$

主对角线一侧的元素全为零的行列式叫做三角形行列式，由例 1.3 的(2)可知，三角形行列式的值等于主对角线上元素之积.

用二阶行列式解二元线性方程组的方法，可以推广到三元线性方程组，这样三元线性方程组(1.2)的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$ $(D\neq0)$.

其中 D，D_1，D_2，D_3 构成的规律与二元线性方程组(1.1)的解 D，D_1，D_2 类似.

【例 1.4】 用行列式解线性方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

解 用对角线展开法可求出

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

于是原方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

由例 1.2、例 1.4 可知，只要方程组的系数行列式 $D \neq 0$，方程组就有唯一解.

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

3. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$.

4. 用行列式解下列线形方程组：

(1) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$.

1.2 三阶行列式的性质

为了简化行列式的计算，本节以三节行列式为例，给出行列式的性质.

性质 1.1 把行列式的行与相应的列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

此性质表明：行列式中行与列的地位是一样的，对行成立的性质对列也成立，对列成立的性质对行也成立.

性质 1.2 交换行列式的任意两行(列)，行列式变号.

例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

推论 1.1 若行列式中有 2 行(列)的对应元素相同，则行列式的值为零.

例如，

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 1.3 用数 k 乘行列式中某一行(列)的各元素，等于用数 k 乘此行列式.

例如，

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

又如，

$$\begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

推论 1.2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 1.3 行列式中若有 2 行(列)对应元素成比例，则此行列式的值为零.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \\ -5 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

推论 1.4 行列式中若有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值为零.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 1.4 若行列式中有某行(列)的各元素都是两数之和,则此行列式可以写成 2 个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{21} & a_{31} \\ a_{12} & b_{22} & a_{32} \\ a_{13} & b_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例如,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 102 & 98 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 100 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

性质 1.5 把行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

例如,用数 k 乘第一列加到第 2 列上,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

又如,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

给第 1 行分别乘以−2、3 后加到第 2 行、第 3 行上.

运用该性质时要注意:被乘的行(列)元素不变,而被加的行(列)元素随之改变.

在行列式中,划去 a_{ij} 行所在的行和列的所有元素后,剩下的元素按原来次序构成的行列式称为原行列式中 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

例如,$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中,a_{32} 的余子式为 $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如上面 a_{32} 的代数余子式为 $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

性质 1.6 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 } i \text{ 行}} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \quad (i=1,2,3)$$

$$\xlongequal{\text{按第 } j \text{ 列}} a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \quad (j=1,2,3).$$

这个性质叫做行列式按第 i 行(或 j 列)展开. 利用它可将一个较高阶的行列式化为较低阶的行列式来计算.

性质 1.7 行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

例如, $$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0.$$

为了以后计算方便,引进以下记号:

交换第 i 行(或列)和第 j 行(或列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$);

第 i 行(或列)上各元素乘以 k 加到第 j 行(或列)对应元素上,记为 $r_i \times k + r_j$(或 $c_i \times k + c_j$);

第 i 行(或列)各元素乘以 k,记为 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

【例 1.5】 把下列行列式化成三角形行列式,并求值:

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 \times 2 + r_2]{r_1 \times (-1) + r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -12 & 11 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \times (-4) + r_4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} = -57.$$

从本题的计算过程中可总结出化三角形行列式的一般步骤:先把 a_{11} 变成 1,然后用性质 1.5 把第 1 行 a_{11} 以下的元素全化为零,再用类似方法把主对角线 a_{22} 以下的元素化为零.

【例 1.6】 利用行列式性质计算:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix}$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 12 & 7 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\times(-2)+r_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 0.$

(2) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第二列展开}} 5\times3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -375.$$

从例 1.6 可以看出，在计算行列式时，并不一定要化成三角形行列式，也可以利用性质化为成比例的形式，也可以使某行(列)尽量含零多一些，同样可以简化行列式的计算.

【例 1.7】 利用行列式性质证明：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

证明

(1) $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质 1.1}} \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{各行提出}-1} (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -D.$$

即 $2D=0$，得 $D=0$.

(2) $\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_1} \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 3 列提出}-1} -\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

【例 1.8】 解方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 4 & 10 & x+6 \end{vmatrix} = 0.$

解 $\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 4 & 10 & x+6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\times 2+r_3} \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 0 & 2x-4 & x-2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{第 3 行提公因子}} (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ -2 & x-7 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\times(-2)+c_2} (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ -2 & x+1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 行展开}} (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)(x-1)(x+1).$$

于是原方程变为 $(x-2)(x-1)(x+1)=0$，因此 $x_1=2$，$x_2=1$，$x_3=-1$.

习题 1.2

1. 利用行列式性质计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$；
(2) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix}$；
(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式性质，证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$；
(2) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)$；
(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}=a^3$.

3. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 6 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=0$；
(2) $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-1 & -3 \\ -3 & -3 & x-6 \end{vmatrix}=0$.

1.3 n 阶行列式 克莱姆法则

本节再把二阶、三阶行列式的概念及性质与应用推广到 n 元线性方程组，进而得到 n 阶行列式与克莱姆法则.

1.3.1 n 阶行列式

定义 1.3 把 n^2 个数排成 n 行 n 列，两边各加一条竖线，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它代表一个由确定的运算关系所得到的数.

当 $n=2$ 时，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}$；

当 $n>2$ 时，$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

其中 a_{ij} 称为行列式 D 中第 i 行第 j 列的元素 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 取代数余子式.

三阶行列式的性质及推论对于 n 阶行列式也是成立的，如性质 1.6 可推广为 n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子数余子式的乘积之和，即按第 i 行展开，有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

按第 j 列展开，有

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

在计算 n 阶行列式时，可以灵活应用这些性质，但要注意四阶和四阶以上行列式不能像二阶、三阶行列式那样用对角线法则展开求值. 通常是利用各种性质将其化为三角形行列式或使某行(列)含零较多，再降阶展开求值.

【例 1.9】 把行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开，并计算它的值.

解 $D=2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$