根据人教社新版高中课本编写

DAO XUE /CHUANG XIN

导学·创新

高一数学

导、析、练 下册

江苏省苏州、无锡、常州、镇江教委教研室联合编写组 编

本册主编 周 凯

沈阳出版社

丛书顾问　汪鹤鸣
丛书编委会　（按姓氏笔划为序）
丁伟明　王　震　王玉军　孙　彪
朱志平　庄　平　沈承欢　杨裕前
张维元　陶德宏　顾晓白
丛书审定　黄成稳　高　明　亚　岚　白　飞
明　都　静　玉　张木森　吴重远
本册主编　周　凯
编　　者　贺明荣　陆锦富　张征海

编 者 语

根据教育部的部署，江苏、辽宁、山西、浙江、山东、天津等全国九个省的高中一年级学生将从2000年秋季起使用人民教育出版社出版的各科新版教材，新教材形式新颖、内容丰富，较原教材有较大的增删，增添了许多符合时代潮流、符合学生实际的内容，对于培养学生创新精神和实践能力有较大帮助。

为了帮助广大高一学生进一步理解新教材的内容，拓展思维，适应未来高考科目的设置改革的要求，我们在江苏省苏州、无锡、常州、镇江等市的教委、教研室及教育学者、教育专家的大力支持和协助下，拟定了这套高中新版教材《导学·创新》丛书。

我们特地组织了中等教育最发达，高考成绩在全国名列前茅的苏州、无锡、常州、镇江等市的特级、高级教师参与丛书的编写。这些特级、高级教师们不仅了解教材、钻研教材，更了解学生，懂得学生，因为他们是实践者。他们将多年积累的教学实践经验，按照国家教育体制由“应试教育”向“素质教育”转变的要求，全新奉献、汇集在本套丛书中。本套丛书我们还特地聘请了在人民教育出版社工作的黄成稳等几位老师帮助我们审定，在此向他们表示深深的感谢！

该丛书有两大突出特点：一是“导学”，帮助学生进一步理解新教材的知识结构、重点、难点和疑点、弥补知识的缺漏。学生掌握必要的学习方法，引导学生由已知知识去探求未知知识；二是“创新”，注重设置情境问题，扩大背景知识，引导学生自己“悟”道理，恰当把握学科之间相关知识的联系，将所学的知识融会贯通，培养学生综合运用知识的创新意识和能力，体现基本的科学精神和人文精神。

导学·创新——是跨世纪的丛书

——是学生的良师益友

——它教你在素质教育体制下怎样去学，怎样去考，怎样去适应社会。

丛书编写委员会

2000.12

目　　录

第四章　三角函数

三角函数是中学数学的重要内容之一，它的基础主要是几何中的相似形和圆，研究的方法主要是代数方法，因此三角函数的研究，已经将代数和几何联系起来了. 高等数学、物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科，都常常要用到三角函数及其性质，因此这些内容既是解决生产实际问题的工具，又是进一步学习的基础.

一、任意角的三角函数

在初中学过的锐角三角函数的基础上，把三角函数的概念推广到任意后，就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数，使三角函数具有更广泛的意义和应用.

4.1　角的概念的推广

【知识结构图表】

正角、负角、零角 ⟶ 象限角 ⟶ 终边相同的角

【重点难点导学】

1. 讲某角是第几象限的角时应注意的问题.

讲某角是第几象限的角时，应注意以“角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合”为前提，否则就不能从终边的位置来判断某角属于第几象限. 同时还应注意“角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任一象限”.

2. 第一象限角、锐角和小于 90°的角的区别与联系.

第一象限角可以表示成：$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°,k\in Z\}$，它包含锐角.

锐角可以表示成：$\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$，它是第一象限角.

小于 90°的角可以表示成：$\{\alpha|\alpha<90°\}$，它包含锐角.

3. “课本题”辅导.

(1) 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-360°\leqslant\gamma<360°$ 的元素 γ 写出来：

(1) 60°；(2) $-824°30'$.

分析　与角 α 终边相同的角的集合是 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in Z\}$. 要求某一范围内与角 α 终边相同的角，只要在集合 S 中对整数 k 取适当的值.

解　(1) $S=\{\gamma|\gamma=60°+k\cdot 360°,k\in Z\}$.

S 中适合 $-360°\leqslant\gamma<360°$ 的元素是：

$60°-1\times 360°=-300°$；$60°+0\times 360°=60°$.

(2) $S=\{\gamma|\gamma=-824°30'+k\cdot 360°,k\in Z\}$.

S 中适合 $-360°\leqslant\gamma<360°$ 的元素是：

$-824°30'+2\times360°=-104°30'$；$-824°30'+3\times360°=255°30'$.

(2) 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合.

分析 在 0°到 360°的范围内，终边在直线 $y=x$ 上的角有两个，即 45°，225°角.

所有与 45°角终边相同的角构成集合

$S_1=\{\beta|\beta=45°+k\cdot360°,k\in Z\}=\{\beta|\beta=45°+2k\cdot180°,k\in Z\}$；

而所有与 225°角终边相同的角构成集合

$S_2=\{\beta|\beta=225°+k\cdot360°,k\in Z\}=\{\beta|\beta=45°+(2k+1)\cdot180°,k\in Z\}$.

于是，终边在直线 $y=x$ 上的集合

$$\begin{aligned}S=S_1\cup S_2&=\{\beta|\beta=45°+2k\cdot180°,k\in Z\}\cup\{\beta|\beta=45°+(2k+1)\cdot180°,k\in Z\}\\&=\{\beta|\beta=45°+n\cdot180°,n\in Z\}.\end{aligned}$$

【典型试题例析】

例 1 已知 $90°<\beta<\alpha<135°$，求 $\alpha-\beta$ 和 $\alpha+\beta$ 的范围.

解 由 $90°<\beta<\alpha<135°$，得

$-135°<-\beta<-90°$，且 $\alpha-\beta>0$.

故 $\alpha-\beta\in(0°,45°)$，$\alpha+\beta\in(180°,270°)$.

例 2 已知 α 是第一象限角，试确定：(1) $\frac{\alpha}{2}$；(2) 2α 所在象限.

解 (1) ∵ α 是第一象限角，

∴ $k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°$，$(k\in Z)$.

∴ $k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<45°+k\cdot180°$，$(k\in Z)$.

当 k 为偶数时，设 $k=2n(n\in Z)$，有 $n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<45°+n\cdot360°$，这时，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角.

当 k 为奇数时，设 $k=2n+1(n\in Z)$，有 $180°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<225°+n\cdot360°$，这时，$\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

(2) ∵ $2k\cdot360°<2\alpha<180°+2k\cdot360°$，$(k\in Z)$，

∴ 2α 与 0°～180°角的终边相同，故 2α 是第一或第二象限角，特别地，2α 也可以是终边在 y 轴的非负半轴上的角(它不属于任何一个角限).

评注 当 α 为第一或第二象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三角限角；当 α 为第三或第四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第二或第四象限角.

例 3 已知集合 $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in Z\}$，下列集合中与 S 相等的是(　　).

(A) $\{\alpha|\alpha=90°+k\cdot180°,k\in Z\}$

(B) $\{\alpha|\alpha=90°+k\cdot360°,k\in Z\}$

(C) $\{\alpha|\alpha=\pm90°+k\cdot360°,k\in Z\}$

(D) $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°$ 或 $\alpha=90°+k\cdot180°,k\in Z\}$

分析 由于 $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in Z\}$，所以当 k 为偶数时，α 的终边在 x 轴上；当 k 为奇

数时，α 的终边在 y 轴上，因此集合 S 表示终边在坐标轴上的角的集合. 又(A)、(C)表示终边在 y 轴上的角的集合，(B)表示终边在 y 轴的非负半轴上的角的集合，故选(D).

例 4 已知集合 $A=\{\alpha|30°+k\cdot180°<\alpha<90°+k\cdot180°,k\in Z\}$，集合 $B=\{\beta|-45°+k\cdot360°<\beta<45°+k\cdot360°,k\in Z\}$，求 $A\cap B$.

解 如图 4－1，集合 A 中的角的终边在阴影(I)内，集合 B 中的角的终边在阴影(Ⅱ)内，因此集合 $A\cap B$ 中的角的终边在阴影(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共部分内，所以

$A\cap B=\{\alpha|30°+k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°,k\in Z\}$.

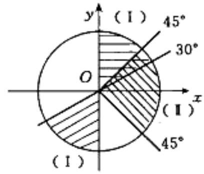


图 4－1

【基础训练和创新能力培养】

一、选择题：

1. 给出下列四个命题：

(1) 小于 90°的角是锐角；(2) 钝角是第二象限角；(3) 第一象限角一定不是负角；(4) 第二象限角必大于第一象限角.

其中，正确命题的个数是(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 下列各组的两个角中，终边不相同的一组角是(　　).

(A) $-43°$与 $677°$　　(B) $900°$与 $-1260°$

(C) $150°$与 $630°$　　(D) $-120°$与 $960°$

3. 设 $k\in Z$，则下列各组的两个角中，终边相同的一组角是(　　).

(A) $k\cdot90°$与 $k\cdot180°+90°$　　(B) $k\cdot180°+60°$与 $k\cdot60°$

(C) $(2k+1)\cdot180°$与$(4k\pm1)\cdot180°$　　(D) $k\cdot180°+30°$与 $k\cdot360°\pm30°$

4. 如果角 α 与 35°角的终边相同，角 β 与 $-55°$角的终边相同，那么 α 与 β 之间的关系是(　　).

(A) $\alpha+\beta=0°$　　(B) $\alpha-\beta=0°$

(C) $\alpha+\beta=k\cdot360°(k\in Z)$　　(D) $\alpha-\beta=k\cdot360°+90°(k\in Z)$

5. 设 $k\in Z$，若角 α 和角 β 的终边关于 x 轴对称，那么(　　).

(A) $\alpha+\beta=k\cdot360°$　　(B) $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180°$

(C) $\alpha-\beta=k\cdot360°$　　(D) $\alpha+\beta=k\cdot360°+90°$

二、填空题：

1. 角 α 的终边上一点的坐标是$(3,-3)$，则 α 的集合是____________.

2. 时钟的分针经过 2 小时 40 分钟，它所转过的角是________度，这个角是第________象限的角.

3. S 是与 $-716°46'$角的终边相同的角的集合，则 S 中适合不等式 $-360°\leqslant\beta<720°$的元素 β 是________________.

4. 终边在第一、三象限的角的集合是____________________.

三、解答题：

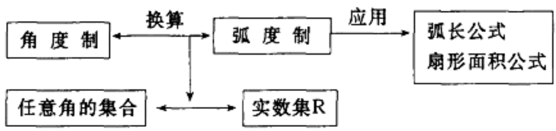
1、已知 $0°<\beta<360°$，且角 β 的 7 倍角的终边与角 β 的终边重合，求角 β.

2. 若 α 角的终边与 $210°$角的终边相同，求在$[0°,360°)$内终边与$\frac{\alpha}{3}$角的终边相同的角.

3. 已知 $A=\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<150°+k\cdot 360°,k\in Z\}$，$B=\{\beta|-90°+k\cdot 360°<\beta<45°+k\cdot 360°,k\in Z\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

4.2 弧度制

【知识结构图表】



【重点难点导学】

1. 把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 记作 1 弧度或 1rad. "弧度"二字或"rad"通常略去不写,而只写出这个角所对应的弧度数.

2. 通过弧度制对角的度量,使得每一个角都对应着一个实数(即这个角的弧度数);反过来,每一个实数也都对应着一个角(角的弧度数等于这个实数). 这样就很方便地在角的集合与实数集之间建立了一一对应关系,于是就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数.

3. 弧度制是以"弧度"为单位度量角的制度,角度制是以"度"为单位度量角的制度. 1 弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 $1°$是圆的$\frac{1}{360}$所对的圆心角(或该弧)的大小. 不管是以"弧度"还是 "度"为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

4. 用公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$求圆心角时,应注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值. 同时,还要掌握其变形后的两种形式:$l=|\alpha|\cdot r$ 和 $r=\frac{l}{|\alpha|}$. 运用这两种形式时,如果已知的角以"度"为单位,应先把它化成弧度数后再计算.

5. 弧度制下的弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$,扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$,比角度制下对应的公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$,$S=\frac{n\pi r^2}{360}$更为简单.

6. 角度制与弧度制之间的换算,关键应抓住:$360°=2\pi\text{rad}$,$180°=\pi\text{rad}$.

7. "课本题"辅导

时间经过 $4h$(时),时针,分针各转了多少度? 各等于多少弧度?

分析 圆角的度数是 $360°$,弧度数是 $2\pi\text{rad}$. 时针转过的角度是分针转过的角度的$\frac{1}{12}$,同时依据旋转方向,所求的角为负角.

解 因为分针经过 $4h$(时)转过 4 周,所以分针转了$-1440°$,等于$-8\pi\text{rad}$. 又时针转过的角度是分针所转过的角度的$\frac{1}{12}$,故时针转了$-120°$,等于$-\frac{2\pi}{3}\text{rad}$.

【典型试题例析】

例 1 将下列各角化成 $2k\pi+\alpha(k\in Z)$，且 $0\leqslant\alpha<2\pi$ 的形式，并指出它们是第几象限角：

(1) $-1725°$；(2) $\frac{64}{3}\pi$.

分析 先把 $-1725°$ 化成 $k\cdot 360°+\alpha(k\in Z)$ 的形式，再用弧度制表示.

解 (1) ∵ $-1725°=-5\times 360°+75°=-10\pi+\frac{5\pi}{12}$，

∴ $-1725°$ 与 $\frac{5\pi}{12}$ 角的终边相同.

又∵ $\frac{5\pi}{12}$ 是第一象限角，

∴ $-1725°$ 是第一角限角.

(2) ∵ $\frac{64\pi}{3}=20\pi+\frac{4\pi}{3}$，

∴ $\frac{64\pi}{3}$ 与 $\frac{4\pi}{3}$ 角的终边相同.

又∵ $\frac{4\pi}{3}$ 是第三象限角，

∴ $\frac{64\pi}{3}$ 是第三象限角.

评注 用弧度制表示终边相同角 $2k\pi+\alpha(k\in Z)$ 时，$2k\pi$ 为 π 的偶数倍，而不是整数倍.同时，α 为弧度，不能写成 $2k\pi+(\quad)°$ 的形式.

例 2 若弧度为 2 的圆心角所对的弦长为 2，则这个圆心角所夹扇形的面积是(　　).

(A) $\cot 1$　　(B) $\frac{1}{\sin 1}$　　(C) $\frac{1}{\sin^2 1}$　　(D) $\frac{1}{\cos 1}$

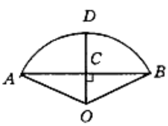


图 4－2

分析 由扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$ 知，要求扇形的面积，只需求出扇形的半径 r 即可.

解 如图 4—2，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于 C，并延长 OC 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 D，则

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}=1\text{rad}$，且 $AC=\frac{1}{2}AB=1$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中，$OA=\frac{1}{\sin\angle AOC}=\frac{1}{\sin 1}$.

∴ 扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|\alpha|\cdot OA^2=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{\sin^2 1}=\frac{1}{\sin^2 1}$.

故选(C).

例 3 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，则有(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\supsetneqq N$　　(B) $M\subsetneqq N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

分析 对集合 M 中的整数 k 依次取 0，1，2，3，得角 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$，于是集合 M 中的角与上面 4 个角的终边相同；同理，集合 N 中的角与 0，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{7\pi}{4}$ 角的终边相同.故选(C).

例 4 一条弦的长度等于半径 r.

(1) 求这条弦所对的劣弧长；

(2) 求这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

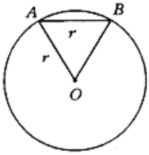


图 4—3

分析 由已知易得圆心角为$\frac{\pi}{3}$,代入弧长公式及扇形面积公式即可.

解 (1) 如图 4—3,半径为 r 的$\odot O$ 中的弦 $AB=r$,

$\therefore$ $\triangle AOB$ 是等边三角形,$\therefore$ $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ 弦 AB 所对的劣弧长为$\frac{\pi}{3}r$.

(2) $\because$ $S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2, S_{扇形OAB}=\frac{\pi}{6}r^2$,

$\therefore$ $S_{弓形}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}=\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.

例 5 已知两角的和为 1 弧度,且两角的差为 1°,求这两个角各是多少弧度?

分析 设两角的弧度数分别是 x、y,通过列方程组,就可求出 x、y,但要注意单位统一.

解 设两角的弧度数分别是 x、y.

因为 $1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}$,则依题意,得$\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=\frac{\pi}{180}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360},\\ y=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}.\end{cases}$

即所求两角的弧度数分别为$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{360}$、$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{360}$.

【基础训练和创新能力培养】

一、选择题:

1. 设 $\alpha=1.575\text{rad}$,那么 α 是(　　).

(A) 第一象限角　　(B) 第二象限角

(C) 第三象限角　　(D) 第四象限角

2. 已知集合 $A=\{\alpha|\alpha=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,k\in Z\}$,$B=\{\beta|\beta=4k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,k\in Z\}$,$C=\{\gamma|\gamma=k\pi\pm\frac{2}{3}\pi,k\in Z\}$,则这三个集合 A、B、C 之间的关系是(　　).

(A) $A\subsetneqq B\subsetneqq C$　　(B) $B\subsetneqq A\subsetneqq C$　　(C) $C\subsetneqq A\subsetneqq B$　　(D) $B\subsetneqq C\subsetneqq A$

3. 已知集合 $A=\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,k\in Z\}$,$B=[-4,4]$,则 $A\cap B$ 等于(　　).

(A) $[-4,-\pi]$　　(B) $[0,\pi]$

(C) $(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$　　(D) $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$

4. 将下列各数按大小顺序排列,其中排法正确的是(　　).

(A) $\sin 0>\sin 4°>\sin\frac{1}{2}>\sin 30°>\sin 1$

(B) $\sin 0>\sin\frac{1}{2}>\sin 30°>\sin 1>\sin 4°$

(C) $\sin 0<\sin 4°<\sin\frac{1}{2}<\sin 30°<\sin 1$

(D) $\sin 0<\sin\frac{1}{2}<\sin 1<\sin 30°<\sin 4°$

5. 若弧度为 2 的圆心角所对的弦长为 2，那么这个圆心角所对的弧长是（　　）.

(A) 2　　(B) $\sin 2$　　(C) $\frac{2}{\sin 1}$　　(D) $2\sin 1$

二、填空题：

1. 若 $4\pi<\alpha<6\pi$，且与 $-\frac{2}{3}\pi$ 角的终边相同，则 $\alpha=$________.

2. 钟表的分针和时针在 3 点到 5 点 40 分这段时间里各转过________度，________弧度（含 π）.

3. 半径为 4cm 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆周的长，则这个扇形的面积是________ cm^2.

4. 已知圆周上五点 A、B、C、D、E 分圆周成五段弧的长度之比为 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DE}:\overset{\frown}{EA}=1:2:3:4:5$，则五边形 $ABCDE$ 的各个内角的弧度数依次为____________.

三、解答题：

1. 将下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi(k\in Z)$ 的形式，并求出在 $(-2\pi,4\pi)$ 内和它终边相同的角：

(1) $-\frac{16}{3}\pi$；　(2) $-675°$.

2. 半径为 12cm 的轮子，以 400r/min（转/分）的速度做逆时针旋转，求：

(1) 轮周上一固定点每 1s（秒）转过的弧度数；

(2) 轮周上一固定点转动 $1000°$ 所经过的距离.

3. 一个扇形的周长为 l，求扇形的半径、圆心角各取何值时，此扇形的面积最大？

4.3 任意角的三角函数

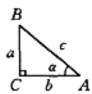
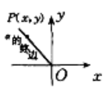
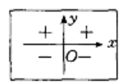
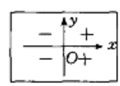
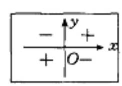
【知识结构图表】

$\boxed{\text{三角函数的定义}} \longrightarrow \boxed{\text{三角函数的定义域}} \longrightarrow \boxed{\text{三角函数的符号}} \longrightarrow$

$\boxed{\alpha+k\cdot 360°(k\in Z)\text{的三角函数的诱导公式}} \longrightarrow \boxed{\text{三角函数线}}$

【重点难点导学】

1. 锐角、任意角的三角函数的比较：

	定义		定义域	符号
锐角三角函数		$\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ $\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$\alpha\in(0°,90°)$	全为正
任意角的三角函数		$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	R	
		$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	R	
		$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	$\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k\in Z\}$	

2. $\sin\alpha$ 不是 sin 与 α 的乘积，它是一个比值. 三角函数记号是一个整体，离开自变量 α 的“sin”、“cos”、“tan”、“cot”、“sec”、“csc”是没有意义的.

3. 如何确定三角函数的定义域.

确定三角函数的定义域时，主要应抓住分母等于零时比值无意义这一关键. 为此需要特别注意当且仅当角的终边在坐标轴上时，点 P 的坐标中必有一个为零. 例如，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，当且仅当 α 的终边在 y 轴上时，点 P 的横坐标 $x=0$，因此 $\tan\alpha$ 的定义域为 $\{\alpha\mid\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$.

4. 终边在坐标轴上的角的三角函数值：

·	x 轴非负半轴	y 轴非负半轴	x 轴非正半轴	y 轴非正半轴
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在

5. "课本题"辅导.

(1) 求证角 θ 为第三或第四象限角的充分必要条件是 $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号.

分析 本题的难点是充要条件的概念及数学语言的表述.根据三角函数的定义,必要性易证.下面证明充分性,即如果 $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号,那么 θ 为第三或第四象限角.

证明 $\because$ $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号,

$\therefore$ $\begin{cases}\cos\theta<0,(1)\\ \tan\theta>0;(2)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta>0,(3)\\ \tan\theta<0.(4)\end{cases}$

由(1)知 θ 角的终边在 y 轴的左侧,又由(2)知 θ 角的终边在第一或第三象限,所以由(1)、(2)知 θ 角的终边在第三象限.同理,由(3)、(4)知 θ 角的终边在第四象限.综上所述,θ 为第三或第四象限角.

(2) 已知角 α 的正切线是单位长度的有向线段,那么角 α 的终边(　　).

(A) 在 x 轴上　(B) 在 y 轴上　(C) 在直线 $y=x$ 上　(D) 在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上

分析 利用与单位圆有关的有向线段,将任意角 α 的三角函数值分别用它们的几何形式表示,是本题的难点.掌握单位圆的概念,了解三角函数线与三角函数之间的对应关系,是克服这一难点的关键.

解 如图 4—4,角 α 的正切线是有向线段 AT.由题意知,$\triangle AOT$ 是等腰直角三角形,因此 $AT=1$ 或 $AT=-1$,故选(D).

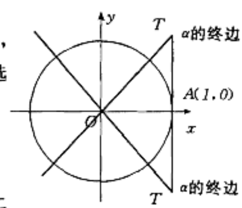


图4—4

【典型试题例析】

例 1 已知 $P(-12m,5m)$($m\in R$,且 $m\neq0$)是角 α 终边上的一点,求:$\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的值.

解 $\because$ $x=-12m,y=5m$,

$\therefore$ $r=\sqrt{(-12m)^2+(5m)^2}=13|m|$.

(1) 若 $m>0$,则 $r=13m$,

故 $\sin\alpha=\frac{5}{13},\cos\alpha=-\frac{12}{13},\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

(2) 若 $m<0$,则 $r=-13m$,

故 $\sin\alpha=-\frac{5}{13},\cos\alpha=\frac{12}{13},\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

例 2 计算:(1) $m^2\cdot\sin(-630^\circ)+n^2\cdot\tan(-315^\circ)-2mn\cos(-720^\circ)$;

(2) $\sin(-\frac{23}{6}\pi)+\cos\frac{13}{7}\pi\cdot\tan4\pi-\cos\frac{13}{3}\pi$.

解 (1) 原式 $=m^2\cdot\sin(-2\times360^\circ+90^\circ)+n^2\tan(-360^\circ+45^\circ)-2mn\cos(-2\times360^\circ)$

$=m^2\cdot\sin90^\circ+n^2\cdot\tan45^\circ-2mn\cos0^\circ$

$=m^2-2mn+n^2$.

(2) 原式 $=\sin(-4\pi+\frac{\pi}{6})+\cos\frac{13}{7}\pi\cdot\tan0-\cos(4\pi+\frac{\pi}{3})$

$=\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}$

$=0$.

例 3 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=m(0<m<1)$，试判断式子 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的符号.

解 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则如图 4—5 所示，

$MP=\sin\alpha, OM=\cos\alpha$.

于是，$m=\sin\alpha+\cos\alpha=MP+OM>OP=1$.

若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $m=\sin\alpha+\cos\alpha=1$.

由已知 $0<m<1$，故 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

于是，$\sin\alpha-\cos\alpha>0$.

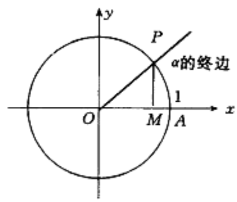


图4—5

例 4 求函数 $y=\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{-\tan\alpha}$ 的定义域.

解 根据题意，得

$$\begin{cases}\sin\alpha\geqslant0, & (1)\\ -\tan\alpha\geqslant0. & (2)\end{cases}$$

由(1)知，角 α 的终边在 x 轴的上侧(包括 x 轴)；由(2)知，角 α 的终边在第二、四象限或 x 轴上.

∴ 角 α 的终边在第二象限或 x 轴上，即函数的定义域是

$$\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant(2k+1)\pi，或\ \alpha=2k\pi, k\in Z\}.$$

例 5 已知集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，$F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$，那么 $E\cap F$ 为区间 (　　).

(A) $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　(B) $(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$　　(C) $(\pi,\frac{3}{2}\pi)$　　(D) $(\frac{3\pi}{4},\frac{5}{4}\pi)$

解 根据单位圆中正弦、余弦函数值的几何表示知，$E=\{\theta|\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\}$.

又由 $\tan\theta<\sin\theta$ 可知，θ 应在第二象限或第四象限.

∴ $E\cap F=\{\theta|\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\}$. 故选(A).

例 6 已知 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$，且 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})>0$，求角 α 的取值范围.

解 由 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})>0$，得

$2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha-\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in Z)$，

即 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{3}{4}\pi,(k\in Z)$. (1)

满足(1)的角 α 的终边如图 4—6 的阴影部分所示.

又 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$,所以角 α 的取值范围是

$\alpha\in[0,\frac{3}{4}\pi)\cup(\frac{7}{4}\pi,2\pi]$.

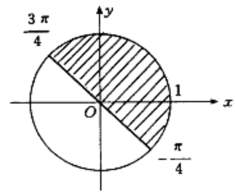


图4—6

【基础训练和创新能力培养】

一、选择题:

1. 下列等式中,成立的是(　　).

(A) $\sin(-\frac{\pi}{18})>\sin\frac{\pi}{10}$　　(B) $\cos(-\frac{23}{5}\pi)<\cos(-\frac{17}{4}\pi)$

(C) $\cos4>\cos\frac{1}{2}$　　(D) $\tan\frac{7\pi}{5}<\tan(-\frac{2\pi}{5})$

2. 已知集合 $M=\{\theta|\sin\theta\geqslant\frac{1}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$,$N=\{\theta|\cos\theta\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$,则 $M\cap N$ 等于(　　).

(A) $\{\theta|\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{5}{6}\pi\}$　　(B) $\{\theta|\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{2}{3}\pi\}$

(C) $\{\theta|\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{5}{6}\pi\}$　　(D) $\{\theta|\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{2}{3}\pi\}$

3. 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是(　　).

(A) $\{1,3\}$　　(B) $\{1,-3\}$　　(C) $\{-1,-3\}$　　(D) $\{-1,3\}$

4. 设 α,β 是第二象限角,若 $\sin\alpha>\sin\beta$,则(　　).

(A) $\tan\alpha>\tan\beta$　　(B) $\cot\alpha<\cot\beta$　　(C) $\cos\alpha>\cos\beta$　　(D) $\sec\alpha>\sec\beta$

5. 设 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,那么下列的点在角 α 的终边上的是(　　).

(A) $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　(B) $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$　　(C) $(4,-3)$　　(D) $(3,-4)$

6. 满足 $\sin(x-\frac{\pi}{4})\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的集合是(　　).

(A) $\{x|2k\pi+\frac{5}{12}\pi\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{13}{12}\pi,k\in Z\}$

(B) $\{x|2k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{7}{12}\pi,k\in Z\}$

(C) $\{x|2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{5}{6}\pi,k\in Z\}$

(D) $\{x|2k\pi\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z\}$

二、填空题:

1. 设 $a<0$,角 α 的终边经过点 $P(-4a,3a)$,则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是__________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos A\cdot\tan B\cdot\cot C<0$,则这个三角形是__________(填:锐角三角形,或直角三角形,或钝角三角形).

3. $\alpha\neq\beta$ 是 $\tan\alpha\neq\tan\beta$ 的________条件.