概率与统计学习方法

指导

讨厌的概率论

前　言

由西安交通大学蒋传章、西北大学熊必璠主编的高等专科院校试用教材高等数学丛书(《高等数学》(上、下册)、《高等数学学习方法指导》、《线性代数》、《概率与统计》)出版发行后，在许多所大专院校普遍受到师生的好评。但也有一些师生提出：概率与统计的内容学习有一定的难度，习题也较少，且难作、概念不易接受，希望编写一本学习指导书。为解决这一问题，我们编写了这本书，旨在配合“高等专科院校试用教材高等数学丛书《概率与统计》”搞好教学、作为该书的教学参考书。

本指导书紧密结合教材，深入浅出地阐述基本概念的实质，使读者理解基本理论的实际意义；同时给出了典型实例，进行分析研究，进一步加深对基本概念的理解，并且讲清各种类型题目的解题思想方法与技巧。为了进一步巩固知识，对教材中较难的习题也作了解答（补充例题中带＊号者是选自全国电业职工大学《管理数学》中概率与数理统计部分有关节的习题）。在每章的后面有自我检测题，使读者能切实掌握本课程的基本理论、基本方法与技巧，以达到教学大纲要求的目的。

本书可作为各类专科院校学生在学习《概率与统计》时的教学参考书，也可作为自学或函授的参考书。

由于我们的水平有限，时间仓促，错误与不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者于西安　　　1988.3.

目　录

第一章　随机事件及其概率…………………………（1）
一、基本内容与要求（1）二、学习方法指示（2）
三、补充例题（10）四、习题选解（24）五、自我
检测题（33）
第二章　随机变量及其概率分布…………………（35）
一、基本内容与要求（35）二、学习方法指示（36）
三、补充例题（50）四、习题选解（66）五、自我
检测题（81）
第三章　随机变量的数字特征……………………（84）
一、基本内容与要求（84）二、学习方法指示（84）
三、补充例题（94）四、习题选解（105）五、自我
检测题（113）
第四章　*极限定理…………………………………（115）
一、基本内容与要求（115）二、学习方法指示（115）
三、补充例题（122）四、习题选解（126）五、试
题选编（128）试题Ⅰ、试题Ⅱ。
第五章　随机抽样与参数估计……………………（133）
一、基本内容与要求（133）二、学习方法指
示（134）三、补充例题（140）四、习题选解（141）
五、自我检测题（144）
第六章　假设检验…………………………………（146）
一、基本内容与要求（146）二、学习方法指示
（146）三、补充例题（150）四、习题选解（151）

五、自我检测题（156）
第七章　方差分析 …………………………………… （157）
一、基本内容与要求(157)二、学习方法指示（157）
三、补充例题（164）四、习题选解（165）五、自我检测题（167）
第八章　回归分析 …………………………………… （168）
一、基本内容与要求（168）二、学习方法指示(168)三、习题选解(175)四、自我检测题（177）
自我检测题及试题答案 ……………………………… （179）

第一章　随机事件及其概率

一、基本内容与要求

1．基本内容

1）随机事件与概率（包括随机事件，频率，概率，古典概率的概念）。

2）事件的关系和运算（包括事件的包含、相等、和（并）、积（交）、差的概念与运算，互斥事件，对立事件）。

3）概率的加法定理（包括加法定理，概率的公理化定义）。

4）条件概率与乘法定理。

5）全概率公式与逆概率公式。

6）独立试验序列概型。

2．基本要求

1）正确理解随机试验，随机事件，频率，概率，古典概率的意义。

2）了解和掌握事件的关系和运算。

3）正确理解概率的加法定理，条件概率、乘法定理．

4）掌握全概率公式，独立试验序列概型．学会逆概率公式的应用．

3．重点和难点

1）重点：随机试验，随机事件的概念，频率和概率的

概念，古典概率，条件概率，全概率公式，独立试验序列概型，事件的独立性。

2）难点：频率与概率的关系，条件概率，全概率公式，逆概率公式，古典概率的计算。

二、学习方法指示

1．研究随机现象的一些基本概念

1）随机试验，简称试验 E。i）试验可以在相同条件下重复地进行。ii）每次试验的可能结果不只一个，进行一次试验之前不能准确地预言哪一个结果会出现。但试验的一切可能的结果是已知的。称为随机试验。

2）随机事件，这样一些“在一定条件下可能发生，也可能不发生的事件”称为随机事件。在试验中，一定会发生的事件称为必然事件；一定不发生的事件称为不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有随机性，但为了方便我们把它们看成随机事件的特殊情形。

3）基本事件，设试验 E 有多个可能结果，若这些结果满足：i）在任何一次试验中，这些结果至少有一个发生(完备性)。ii）在任何一次试验中，这些结果至多有一个发生(互斥性)。则称其中每一个事件为试验 E 的基本事件。即不可能再分的事件。若由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件。

2．关于事件 A 的概率，我们讨论了两种确定概率的方法，一是统计概率，一是古典概率。统计概率虽然比较实用，但具有随机性，试验次数 n 究竟大到什么程度，频率究竟在

2318

什么意义下趋近于概率，都没有明确的说明。而古典概型则要求只有有限个基本事件，并且它们的出现具有"等可能性"。但实际问题中有很多问题不同时具备这两种条件。例如检查一批产品，有两种可能结果："w_1"＝合格品；"w_2"＝次品。这时基本事件总数：$\{w_1, w_2\}$，$n=2$；$A=\{w_1\}$，$\bar{A}=\{w_2\}$各包含一个基本事件。如用古典概型作，则$P(A)=P(\bar{A})=0.5$；这显然是错误的。因为一个产品是合格品还是次品，不是等可能的。不能用古典概型的公式来确定概率。

从而可知统计概率与古典概率都有一定的局限性。

概率的公理化定义，虽然不能用来直接确定事件A的概率，即$P(A)$的具体数字，但它给出了概率所必须满足的最基本的规律。为建立严格的概率论理论，提供了一个坚实的基础。

3． 在随机试验E中，其结果在一次试验中可能出现也可能不出现。这结果称为事件．如果用集合论的语言来描述，所谓事件就是样本空间的子集。设E是随机试验，每一个可能结果称为样本点(基本事件)记为w。全体样本点的集合称为样本空间，记Ω(基本事件总数)。以集合论的观点来定义古典概率：

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点的总数}}$$

4． 古典概型的求解，首先要判明问题是不是古典概型。如果所涉及的试验E具有两个基本特征：i) 试验E的样本空间元素只有有限个，ii) 试验E中每一个样本点出现的可能性相同，那么我们就可以判定它是古典概型。然后根据公式求出确定的m，n值。这是解题的关键性一步，古典概型

计算方法灵活多变，没有一个固定的模式。一般地说，当样本点总数较少时，可以直接把样本点总数 n，与 A 所包含的样本点数 m，一一列举出来。当样本点总数较多时，难于直接列举，可以利用排列、组合的知识来求 n，m 的值。这些都称为直接法。有时直接法计算不方便。可根据题意间接地求与事件 A 有关事件的概率，再利用概率的性质推求 $P(A)$。此称为间接法。如通过求 A 的对立事件 $\bar{A}$ 的概率，再利用 $P(A)=1-P(\bar{A})$ 求得 $P(A)$。

古典概率求解时，从不同的角度分析，可以构成不同的样本空间。但关键是确定什么是所需要的样本点。

古典概率有很多种类型。但大部分都可用"摸球"模型来形象地表达。摸球型的基本形式是：设袋中有 n 个可分辨的球，即标上了 1 号，2 号，……n 号，且手感一样的球.现一个一个地从中摸出 m 个球。怎么个摸法，这里说得很含糊。我们知道有两种抽样方法：

i）放回的。即每一次摸出一球，记下球号，后再放回去(各次摸球是彼此独立进行的)。

ii）不放回的。即每一次摸出一个球号，摸出后不放回(下次再也摸不到这个号码了)。

其次摸出的球号又有两种处理方法：

i）排序，即按摸的先后次序把球号排成一排，排成一个有序数组；

ii）不排序，即把摸出的球号组成一个数组，而不管它们出现的先后次序。

现在就各种情况计算一下全部可能的结果数，i）放回，且排序。这时(从 n 个球中摸出 m 个球)全部可能的结果数，

就是可重复的排列数 n^m（允许 $m>n$）。

ii）不放回，但排序．这时全部可能结果数就是选排列数 A_n^m，特别当 $m=n$ 时，就是全排列数 P_n。

iii）不放回，但不排序。这相当于 m 个球一把抓出的。所以全部可能结果数就是组合数 C_n^m。

iv）放回，但不排序。由于放回，所以允许 $m>n$.全部可能结果数就是组合数 C_{n+m-1}^m。

5．对立事件与互斥事件（互不相容事件）的区别。

1）两事件对立，必定互斥，但两事件互斥不一定对立．

2）互斥的概念适用于多个事件，但对立的概念，只适用于两个事件．

3）两事件互斥只表明两事件不能同时出现，即至多只能出现其中一个，但可以都不出现，两个事件对立，则表示两个事件之中有且仅有一个出现，即肯定了至少有一个出现．如概率加法定理：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.若 A、B 互不相容（互斥）即 $A\cap B=\nabla$．

$\therefore\quad P(AB)=0$　此时 $P(A+B)=P(A)+P(B)$。

此为加法定理的特例．因此在应用加法定理前一定要判明A、B 是否互不相容。

6． 条件概率。条件概率是一个十分重要的概念。乘法公式，全概率公式，逆概率公式都建立在条件概率概念的基础上的．因此以上三公式为关于条件概率的三个重要公式．

1）条件概率的概念：我们总是在一个可重复的确定条件（试验）下来讨论事件及其概率的，对这些确定条件，我们常常略而不提．但在许多情况下，我们还有必要计算一个事件 A 在“某事件 B 已经发生的附加条件下的概率”．也就是

说在原有的“确定条件”中又附加了一个条件“B 已经发生”，在这附加条件下 A 的概率叫做 A 对于 B 的条件概率。记 $P(A|B)$。

2）条件概率公式的导出：设样本点总数为 n，其中事件 A 包含 m_1 个样本点，事件 B 包含 m_2 个样本点．又设 AB 包含 m 个样本点。

A 含 m_1 个样本点。

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

B 含 m_2 个样本点。

AB 含 m 个样本点。

Ω(样本空间 n 个点)。

$$\therefore \quad P(A)=\frac{m_1}{n}, \quad P(B)=\frac{m_2}{n}, \quad P(AB)=\frac{m}{n};$$

$P(B|A)=\dfrac{m}{m_1}$（样本空间缩小到 A 发生）．在 A 发生的条件下，事件 B 所含的样本点变为 m。（也缩小了）。

$$\therefore \quad P(B|A)=\frac{m}{m_1}=\frac{m/n}{m_1/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

计算公式，说明了在原样本空间内，求出 $P(AB)$，$P(A)$ 的概率，然后求它们的比值即得 $P(B|A)$。

公式变形，即得概率的乘法公式：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B).$$

3）条件概率与无条件概率的比较：也许读者会这样想，条件概率 $P(B|A)$的样本空间缩小了，条件概率一定比无条件概率 $P(B)$ 小吧？这种看法是不对的。因为样本空间是缩

小了，成为 A 的样本空间，但“有利场合”也相应地缩小了，成为 AB 所含的样本点了．可以看图示．因而很难说条件概率比无条件概率大些还是小些．但在某些特殊情况下 $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 有较肯定的关系．比如我们有下面的命题：当两事件 A，B 之间有包含关系时，总有 $P(B|A)\geqslant P(B)$。

证明：若 $A\subset B$ 即 A 的发生必导致 B 的发生，则 $P(B|A)=P(\overline{V})=1$。但 $P(B)\leqslant 1$。

$\therefore\quad P(B|A)\geqslant P(B)$

若 $B\subset A$　则　$AB=B$。

$$\therefore\quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\geqslant\frac{P(B)}{1}=P(B).$$

$\therefore$　此时亦有 $P(B|A)\geqslant P(B)$。

概率的有关性质和定理，对于条件概率仍然成立．例如，两个事件的加法公式，可以表示为：

$P\{(A+B)|H\}=P\{A|H\}+P\{B|H\}-P\{AB|H\}$。

关于互逆事件的概率可表示为：

$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$。

这些公式在解题时可以拿来应用。

7．　全概率公式与逆概率公式（贝叶斯公式）。

全概率与逆概率公式是借助于较简单的事件的概率，利用概率加法，乘法定理推算出较为复杂事件的概率公式。这两个公式有着密切的联系，学习中要特别注意公式的使用条件（已知哪些简单事件的概率）与公式的结构，以及两公式中

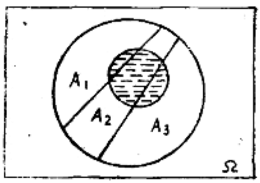

图　1-1

问题的不同提法。掌握了这几点就可以将一类复杂事件的概率，通过一种公式模型求出来。在解决复杂事件 B 的概率时，关键要把 B 分解成几个简单事件的和。也就是要把事件 B 进行划分。可用图形如图(1-1)。帮助理解公式的推导：

$$B=\sum_{i=1}^{3}BA_i \quad (BA_i\cap BA_j=V \quad i\neq j \quad i,j=1,2,3).$$

按概率的可加性：$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(BA_i)$

由乘法公式：$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B|A_i)$.

逆概率公式也称事后概率公式或原因概率公式，用于已知结果发生条件下，反逆回来断定在 A_1，A_2，$\cdots A_n$ 中哪一个情况下发生的可能性的大小。那么在何种情况下用全概率公式，何种情况下用逆概率公式，这就要看问题的提法了。全概率公式用于计算 $P(B)$，即直接计算所关心的事件的概率·逆概率公式用于计算 $P(A_j|B)$，其提法是某事件 B 已经发生。在这种情况下，求这事件 B 与某种情况 A_j 一同发生的概率。如果把 A_j 看成导致事件 B 发生的原因之一。那么问题成为事件 B 已经发生，而由于事件 A_j 导致 B 发生的可能性有多大。

8。 事件的独立性

若 $P(B|A)=P(B)$则称 A、B 为相互独立事件。这表示事件 A 的发生与否并不影响事件 B 的概率。

A、B 互相独立$\Longleftrightarrow P(A)\cdot P(B)=P(AB)$

在实际问题中，有很多问题的独立性是显然的，不一定

要用定义去判定。如“射击目标”，“投掷硬币”，“投掷骰子”，“袋内有放回地摸球”等都是明显地可知是独立的。

事件的相互独立性与事件的互不相容性有何区别，是否有必然联系。

两个事件 A、B 相互独立的含义是一事件的概率不受另一事件是否发生而影响，而 A、B 互不相容的含义是 A、B 不能同时出现，于是一个(譬如 A)的发生，必然导致另一个(B)的不发生，能说 A 的发生对 B 的概率无影响吗？当然不能！所以互不相容未必互相独立。反过来互相独立也未必互不相容。因为 A、B 互相独立，只是说一个出现与否不影响另一个出现的概率。因此是允许 A、B 同时出现的，即未必 $AB=V$，亦即未必互不相容。

例如甲乙独立射击目标，允许甲乙同时击中目标，因此 $P(AB)\neq 0$。我们可以从理论上证明。

P(AB)>

命题：当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，“A、B 互相独立”与“A、B 互不相容”两者不能同时成立。

证：若 A、B 独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)>0$。即 $AB\neq V$。故 A、B 互不相容。反过来，若 A、B 互不相容则 $AB=V$　$\therefore P(AB)=0$

而 $P(A)\cdot P(B)>0$

$\therefore P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$。　$\therefore A$、B 互不独立。

多个事件的独立性：

如 A，B，C 三个事件，满足等式

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；$P(AC)=P(A)\cdot P(C)$；

$P(BC)=P(B)\cdot P(C)$；$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$，

则称 A，B，C 相互独立。

若事件 A_1，A_2，……A_n 满足：其中任何两个事件，有 $P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$；其中任何三个事件，有 $P(A_iA_jA_k)=P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k)$。

$(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n)$；……

全组事件有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$ 则称 A_1，A_2，……A_n 相互独立。

那么"多个（多于两个）事件独立"与"多个事件的两两独立"是否是一回事呢？否！后者只是前者的条件之一.因此一组事件相互独立，当然也两两独立，但反之不成立。所以多个事件两两独立，不一定该组事件就独立。这与事件的互不相容的概念不同。

一组事件互不相容$\Longleftrightarrow$这组事件每两两互不相容。多个事件的独立性往往从实际问题本身可显示出来，不必用公式去判别。

9。独立试验序列概型(贝努里概型)。

试验 E 只有两个结果 A 与 $\bar{A}$。记 $P(A)=p$。$P(\bar{A})=q=1-p$；将 E 独立地重复进行 n 次；这里"独立地重复"是指在每次试验中 $P(A)=p$ 保持不变。注意：这里"独立"是试验 E 的独立进行。

$\therefore P\{A\text{ 出现 }k\text{ 次}\}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ $(k=0, 1, 2\cdots)$。

三、补 充 例 题

例 1. 将一枚硬币连抛 3 次，观察正反面出现的情况，求至少一次出现正面的概率。

解法一　设事件 A_1，A_2，A_3 分别为{恰有一次出现正面}；{恰有两次出现正面}；{恰有三次出现正面}。

易知 $P(A_1)=\frac{3}{8}$；$P(A_2)=\frac{3}{8}$；$P(A_3)=\frac{1}{8}$. 又设事件 A:{至少一次出现正面}。则 $A=A_1+A_2+A_3$。

[illegible]

注意到：A_1，A_2，A_3 是两两不相容事件。依有限可加性：$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{3+3+1}{8}=\frac{7}{8}$

解法二　设事件 A:{至少一次出现正面}，则事件 $\bar{A}$:{三次全出现反面}。

$\because$　$\bar{A}=\{T.T.T\}$。$\bar{A}$ 包含一个样本点。

$\therefore$　$P(\bar{A})=\frac{1}{8}$.

$\therefore$　$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

例 2.　设在 36 件产品中，有 4 件次品，今任取 3 件，求 i)其中恰有 1 件次品的概率. ii)至少有一件次品的概率。

解　分析可知是典型的摸球型，是"一把抓"的类型. 因此可用组合知识计算。

i) A:{恰有 1 件次品}；

$$\therefore\quad P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}=\frac{496}{1785}\approx 0.2778$$

ii)　**解法一**　A:{至少有一件次品}。则 $A=A_1+A_2+A_3$。其中 A_1:{有一件次品}；A_2:{有 2 件次品}；A_3:{3 件都是次品}而 A_1，A_2，A_3 两两互斥。

$$\therefore\quad P(A_1)=\frac{C_4^1C_{32}^2}{C_{36}^3}\approx 0.2778;\quad P(A_2)=\frac{C_4^2\cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$$

≈ 0.0269.

$$P(A_3)=\frac{C_4^3\cdot C_{32}^0}{C_{36}^3}\approx 0.006$$

$\therefore\quad P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.3053$

解法二 设 $\bar{A}$：{3 件都是正品}。

$$\therefore\quad P(\bar{A})=\frac{C_{32}^3}{C_{36}^3}\approx 0.6947$$

$\therefore\quad P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.6947=0.3053$.

例 3. 10 个人抽两张球票(即 10 个签，其中两个写着"有"字，八个写着"无"字) 一个一个地依次抽取 (取后不放回)，求第 $k(k=1,2,\cdots 10)$ 个人抽到球票的概率。

解 分析：我们设想不是人抽签，而是"签投人"，因为人是 10 个，签也是 10 张，"每个人都以同样的机会抽得 10 张中的任一张"与"每一个签都以同样的机会投中 10 个人中的任一个"，从数学模型上看是一回事。我们不必区别主动和被动，我们关心的不过是人与签的结合方式(一一对应)的种数。把两张"有"字签投给 10 个人中的任意两人的投法，显然有 C_{10}^2 种。我们把每一种投法作为样本点，而有利于 A 就是肯定第 k 个人得到一个"有"。其余 9 个人得余下的 9 张，这相当于留下一个"有"给第 k 个人，而把另一个"有"随意投向9个人中的某一个，于是"有利于 A"的样本点数就是 C_{10-1}^{2-1} 因而得

$$P(A)=\frac{C_{10-1}^{2-1}}{C_{10}^2}=\frac{9}{\frac{10\times 9}{2}}=\frac{2}{10}\quad(\text{与 } k \text{ 无关}),$$

这正符合人们的常识，抽签时，先抽后抽都一样，机会均

等，公平合理。

例 4 某工厂生产过程中出现次品的概率为 0.05，每100个产品为一批，检查产品质量时，每批中任取一半来检查。如发现次品不多于 1 个，则这批产品可以认为合格的。求一批产品被认为是合格的概率。

解 分析：每批 100 个产品中应有 5 个次品，95 个合格品。

设 A：{50 个产品中次品不多于 1 个}，它可以看作两个互不相容事件之和 $A=A_0+A_1$。其中 A_0：{检查 50 个产品中没有次品}.

A_2：{检查 50 个产品中有 1 个次品}。

$$\therefore \quad P(A_0)=C_{95}^{50}/C_{100}^{50}=0.028$$

$$P(A_1)=C_5^1\cdot C_{95}^{49}/C_{100}^{50}=0.153$$

$$\therefore \quad P(A)=P(A_0)+P(A_1)=0.181$$

例 5 在所有的两位数(10—99)中任取一个数，求这个数能被 2 或 3 整除的概率。

解 设 A：{取出的两位数能被 2 整除}。B：{取出的两位数能被 3 整除}。

则 $A+B$：{取出的两位数能被 2 或 3 整除}。又 AB：{取出的两位数能同时被 2 和 3 整除，即能被 6 整除}。因为所有的 90 个两位数中能被 2 整除的有 45 个，能被 3 整除的有30个，而能被 6 整除的有 15 个。由概率加法定理：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{45}{90}+\frac{30}{90}-\frac{15}{90}=\frac{2}{3}$$

例 6 设有某产品一盒共 10 只，已知其中有 3 只次品。