2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年
全国硕士研究生入学考试辅导教程

2010nian quanguo shuoshiyanjiusheng ruxue kaoshi fudao jiaocheng

新大纲
XINDAGANG

数学分册
（经济类）

童 武　王德军　王 欢◎编著

Shuxue
Fence

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程

数学分册

（经济类）

童武　王德军　王欢　编著

- 由多次参加考研命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
- 深入剖析历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 紧密联系最新大纲，反映最新出题动态，详解解题思路，拓展内在联系
- 荟萃专家智慧，启迪备考，提高考生综合应试能力

北京科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程. 数学分册.(经济类)/童武,王德军,王欢编著. —北京:北京科学技术出版社,2009.5

(2010年全国硕士研究生入学考试辅导丛书)

ISBN 978-7-5304-4162-6

Ⅰ.2… Ⅱ.①童…②王…③王… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第063391号

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程·数学分册(经济类)

作　　者:童 武　王德军　王 欢
责任编辑:朱 琳　李 媛
责任印制:张 良
封面设计:清水设计工作室
出 版 人:张敬德
出版发行:北京科学技术出版社
社　　址:北京西直门南大街16号
邮政编码:100035
电话传真:0086-10-66161951(总编室)
0086-10-66113227(发行部)　0086-10-66161952(发行部传真)
电子信箱:bjkjpress@163.com
网　　址:www.bkjpress.com
经　　销:新华书店
印　　刷:三河市国新印装有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
字　　数:655千
印　　张:26.25
版　　次:2009年5月第1版
印　　次:2009年5月第1次印刷
ISBN 978-7-5304-4162-6/G·836

定　价:39.80元

前　言

为了帮助广大考生系统、高效地开展复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织多位曾参加考试大纲制订和修订工作及考前辅导授课的教授、专家编写了这本《2010 年全国硕士研究生入学考试辅导教程　数学分册(经济类)》。

全国硕士研究生入学考试数学科是考查考生的数学功底的考试，也是在一定层次上对考生进行各种思维能力，包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。因此，要考好数学，思维能力必须有质的飞跃。

数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三部分，经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识。考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来，数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的内容和要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述，是广大考生备考的指导性文件和根本依据. 考生必须从中全面领会考试精神，尤其是明确考试范围，以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点，考生一定要熟记在心，不要求的内容，应该跳过，不要浪费精力。

数学考试点多面广难度大，考生都会面临如何备考的问题，如果按部就班的将三门科重新复习一遍，势必是复习效率低，水平提高有限；如果搞题海战术，往往是复习不得要领，有的考点没复习到，有的考点重复复习。就同学们的备考，我们提出以下复习建议和思路，供同学们参考：

第一阶段：熟悉考研大纲的要求，进行“三基”复习，即：基本概念、基本公式和基本方法。“三基”的复习对于考生的复习应考具有举足轻重的地位和作用，很多同学好高骛远，在没有弄懂基本概念、没有掌握基本公式的前提下就开始做题，其结果是题做了很多，就是知其然而不知其所以然，没有掌握根本的原理。所以考生在第一阶段要熟悉本书每章前面所提示的考试大纲要求，掌握考点、重点和难点。配套复习资料为《2010 年全国硕士研究生入学考试辅导教程　数学分册(经济类)》。

第二阶段：做历年真题。考生不要直接去看试题的解答。等做完了再与书中的解答对照分析，看做法是否一样？如果不一样，哪个方法更好，好在什么地方。如果考生经过反复的思考还是做不出来，这时可以带着问题看解答，同时要注意分析做不出来的原因，问题出在哪里？是概念？是题型？还是技巧？找出症结所在，才能有切实提高。配套复习资料为《2010 年全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学(三)》。

第三阶段：模拟实战阶段。经历了前面两个阶段的复习，考生需要进行模拟自测，以检验自己的复习效果。我们编写了模拟试卷，可以供考生进行仿真模拟。我们的要求就是考生做模拟试题，尽量模仿实际的考试进行，按照实际考试时间，严格控制做题的速度，把每一套模拟试卷都当成实战来进行。经过了这个阶段的复习，真正的考试只不过是多了一次模拟考试而已。配套复习资料为《2010 年全国硕士研究生入学考试标准模拟考场　数学

(三)》。

第四阶段:归纳总结阶段。归纳、总结、再思考是至关重要的学习方法。在解题的基础上认真总结,及时归纳,这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律,又能培养探索和创新的能力。对疑难问题不进行认真的分析和清理,那么下次碰到类似或者相同的问题还是束手无策。我国著名数学家苏步青教授说:“学习数学,要多做习题,边做边思考,先知其然,然后弄清其所以然。”

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分。

由于编者水平有限,时间仓促,不妥之处在所难免,衷心希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　高等数学

第二部分 线性代数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

§1　函　　数

□ 考试大纲要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题中的函数关系.

(2) 了解函数有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及图形，了解初等函数的概念.

□ 考点、重点与难点介绍

一、基本概念

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 x 按照一定法则总有唯一确定的值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记做 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

确定一个函数的两要素：定义域和对应法则.

> **注**　当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，才表示同一函数.

2. 反函数

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于值域 W 中的任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

> **注**　(1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.
>
> (2) 只有一一对应的函数才有反函数.
>
> (3) 虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，反函数 $x=\varphi(y)$ 却不一定是单值的. 只有 $y=f(x)$ 不仅单值，而且是严格单调的，其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 W 上是单值的.

★3. 基本初等函数

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记.

(1) 常数函数：$y(x)=c$.

(2) 幂函数：$y=x^{a}$（a 为常数）.

(3) 指数函数：$y=a^{x}$（a 是常数且 $a>0,a\neq 1$）.

(4) 对数函数：$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq 1$），定义域 $(0,+\infty)$，它是指数函数 $y=a^{x}$ 的反函数.

(5) 三角函数：

正弦函数 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$.

余弦函数 $y=\cos x(-\infty<x<+\infty)$.

正切函数 $y=\tan x, D=\left\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in \mathbf{Z}\right\}$.

余切函数 $y=\cot x, D=\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq n\pi, n\in \mathbf{Z}\}$.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, D=\left\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in \mathbf{Z}\right\}$.

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}, D=\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq n\pi, n\in \mathbf{Z}\}$.

(6) 反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$，值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$.

4. 复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，$D=\{x \mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$，则当 $x\in D$ 时，由 $y=f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的复合函数，而 u 称为中间变量.

5. 初等函数

基本初等函数及其复合函数，以及由这些函数的四则运算组成的函数称为初等函数.

6. 其他常见函数

(1) 双曲函数：

双曲正弦：$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，奇函数.

双曲余弦：$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，偶函数.

双曲正切：$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，奇函数.

(2) 符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数：$y=[x]$，y 是 x 的最大整数部分.

(4) 狄利克雷函数：$y=f(x)=\begin{cases}1, & 当 x 为有理数时,\\ 0, & 当 x 为无理数时.\end{cases}$

注 符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数，一般的分段函数不是初等函数.

二、函数的四个基本特性

1. 有界性

定义 若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I\subset D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$（$f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M$），则称 $f(x)$ 在 I 上有界（有上界或下界）；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

注意：无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大.

2. 单调性

定义 若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加；若对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少.

注 不是所有函数都有单调性，例如狄利克雷函数就没有单调性.

3. 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

注 (1) 奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称.

(2) 奇函数满足 $f(x)+f(-x)=0$.

(3) 定义域一定要对称.

(4) 奇函数或偶函数运算具有以下结论：

奇函数 $\pm$ 奇函数 $=$ 奇函数；偶函数 $\pm$ 偶函数 $=$ 偶函数；奇函数 $\times(\div)$ 奇函数 $=$ 偶函数；偶函数 $\times(\div)$ 偶函数 $=$ 偶函数；奇函数 $\times(\div)$ 偶函数 $=$ 奇函数.

4. 周期性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注 (1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 T/a 是 $f(ax+b)$ 的周期 $(a>0)$；若 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$ 及 $f_i(x)$ 经初等运算所得函数的公共周期.

(2) 常见周期函数: $\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$; $\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

□ 典型例题精解

1. 利用函数定义

例 1 命题"① $f(x),g(x)$ 在 x_0 点的某邻域内都无界,则 $f(x),g(x)$ 在 x_0 点的该邻域内一定无界;② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$;③ $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x_0 时点的某邻域内均有界,则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 的该邻域内一定有界;④ $f(x)g(x)$ 是当 $x\to x_0$ 的无穷小量,则 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是无穷小量."中正确的是 ( )

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④

【答案】 B

【解析】 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1/x, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1/x, & x\text{ 为有理数,且 } x\neq 0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则 $f(x)g(x)=0$.

当 $x\to 0$ 时,$f(x)g(x)\to 0$. 但 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 及 $g(x)$ 都不是无穷小,命题④不正确;且本例中 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都无界,但 $f(x)g(x)=0$,在与前相同的邻域内有界,即命题①不正确.

2. 求函数的定义域

例 2 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(如图 1.1,图 1.2),留下的中心角为 φ. 试将漏斗容积表示成中心角 φ 的函数,并求其定义域.

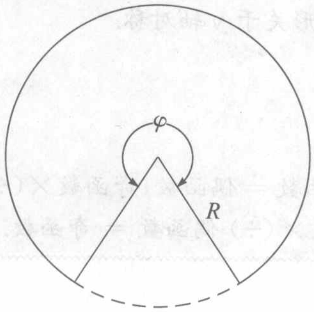

图 1.1

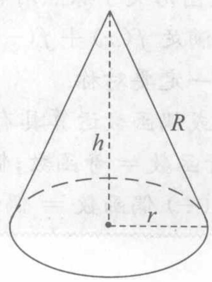

图 1.2

【解析】 设做成的漏斗高为 h,底半径为 r,则体积为 $V=\pi r^2h/3$,这里有两个变量 r 与 h,但它们不是独立的,由圆铁片的半径 R 联系着:

$$R^2=h^2+r^2,\text{即}\quad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

因而 V 可表示成 r 的函数. 为将 V 表示成 φ 的函数只需求出 r 与 φ 的关系.

由 $2\pi r=R\varphi$ 得 $r=R\varphi/2\pi$,所以

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(2\pi),V=\pi r^2h/3=R^3\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(24\pi^2).$$

又容积 $V>0$，故 $4\pi^2-\varphi^2>0$，即 $\varphi^2<(2\pi)^2$，$|\varphi|<2\pi$，即 $-2\pi<\varphi<2\pi$. 由题意 φ 表示留下的中心角，故 $\varphi>0$. 所求定义域 $0<\varphi<2\pi$.

3. 求反函数

例 3 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数及其定义域.

【解析】(1) 在区域 $(-\infty,1)$ 内，$y=x$ 的反函数就是它本身，又因函数 $y=x$ 的值域为 $(-\infty,1)$，故其反函数 $x=y$ 的定义域也为 $(-\infty,1)$，于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

(2) 在区间 $[1,4]$ 上，由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，因 $x\in[1,4]$，故 $x=\sqrt{y}$，又函数的值域为 $[1,16]$，故其反函数定义域为 $[1,16]$. 于是 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant 16)$.

(3) 在区间 $(4,+\infty)$ 上，由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2 y$. 因函数 $y=2^x$ 的值域为 $(16,+\infty)$，故其反函数定义域为 $(16,+\infty)$，于是 $y=\log_2 x(16<x<+\infty)$.

综上所述，所求反函数也是一分段函数，它的表达式为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

注 如果从方程 $y-f(x)=0$ 中解出的 x 不唯一[例如上例中情况(2)]，则应根据原来函数的定义域即所求反函数的值域的要求确定其中一个函数.

4. 关于函数特性的几种题型

例 4 证明：函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证明】 利用不等式 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$，有

$$|f(x)|\leqslant 1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 2.$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

注 所谓 $f(x)$ 有界，一定要指出 x 的变化范围及一个正数 M. 例如：问 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 有界吗？就没有意义. 但当 $x\in[1,+\infty)$ 时，由于 $|f(x)|=\dfrac{1}{|x|}\leqslant 1$，故 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界，而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)$ 则无界.

例 5 设 $f(x)\neq 0$ 是连续函数，又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]\cdot f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数. 试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

【解析】 $$F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)$$

$$=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x). \qquad ①$$

解法1 将 $F'(x)$ 的表达式改写为

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n-1}f(x)\int_0^x \mathrm{d}t$$

$$=2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t.$$

(1) 若 $f(x)$ 单调下降，当 $x\geqslant 0$ 时 $(0\leqslant t\leqslant x)$，$f(t)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x<0$ 时 $(x\leqslant t\leqslant 0)$，

$$F'(x)=2nx^{2n-1}\int_x^0 [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t,$$

此时 $f(x)-f(t)\geqslant 0$，又 $x^{2n-1}<0$，所以 $F'(x)\leqslant 0$.

因此，若 $f(x)$ 单调下降，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上单调上升；在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

(2) 若 $f(x)$ 单调上升，则类似讨论可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降；在 $(-\infty,0]$ 上单调上升.

解法2 利用积分中值定理. 考虑由 ① 式有

$$F'(x)=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)],$$

其中 ξ 在0与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调上升：当 $x>0$ 时，则 $0<\xi<x$，而 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，于是 $F'(x)\leqslant 0$；当 $x=0$ 时，则 $F'(x)=0$；当 $x<0$ 时，则 $x<\xi<0$，而 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，于是 $F'(x)\geqslant 0$.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降，则类似可得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升；在 $(-\infty,0]$ 上单调下降.

> **注** 判断 $f(x)$ 在定义域 X 上单调性的常用方法：(1) 利用单调性的定义；(2) 利用导数 $f'(x)$.

例6 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数.

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数；

(2) 如果 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证明】 由周期函数及奇函数的积分性质，得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)$$