

Wmm



图书有品牌 认准王迈迈

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十五年 ◆ 风靡几代人

浙江大学 吕斌 审订

最新 概率论与数理统计 教与学参考

第四版

与浙江大学第四版教材配套

主编 阎国辉

本书八大特色

- ★考点提示及大纲要求
- ★重点知识结构图
- ★常考题型与范例精解
- ★疑难解答
- ★考研经典题剖析
- ★典型错误类型及根源分析
- ★学习效果三级测试
- ★课后习题详解与三级测试题答案

中国致公出版社

图书有品牌 认准王迈迈

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十五年 ◆ 风靡几代人

浙江大学 吕斌 审订

最新 第四版 概率论与数理统计 教与学参考

与浙江大学第四版教材配套

主编 阎国辉

编者 张宏志 阎国辉 罗炜 孙琳 黄辉

本书八大特色

- ★ 考点提示及大[]析
- ★ 重点知识结构[]及根源分析
- ★ 常考题型与范例精解
- ★ 学习效果三级测试
- ★ 疑难解答
- ★ 课后习题详解与三级测试题答案

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新概率论与数理统计教与学参考/阎国辉主编.

北京:中国致公出版社,2001.12(2008.8重印)

ISBN 978-7-80096-860-0

I.最... II.阎... III.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
IV.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091613 号

最新概率论与数理统计教与学参考

中国致公出版社出版

新华书店经销

文字六〇三厂印刷

开本:889×1230 1/32 印张 16 字数 400 千字

2008 年 8 月第 2 版 2008 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—10000 册

ISBN 978-7-80096-860-0

定价:19.00 元

Preface 前言

浙江大学《概率论与数理统计》(第四版)是全国高等院校理工科普遍采用的《工程数学》系列教材之一。为了帮助同学们学好该书,我们根据多年的教学经验和考研辅导的深刻体会,编写了《概率论与数理统计教与学参考》一书,该书是《高等数学教与学参考》的姊妹篇。

多年来,我们在讲授《概率论与数理统计》这门课的同时,一直希望能有一本十分详尽的教学参考书,以便帮助同学们系统地掌握所学知识为进一步考研奠定坚实的基础。《最新概率论与数理统计教与学参考》就是在这种思想的指导下完成的。编者深入研究了大量的教学参考书和各类试题,精选的例题力求做到具有启发性、典型性和针对性。该书完全与教材同步。根据教与学的需要及目前考研的命题趋势,我们重点编写了前八章。对于后六章也给出了全部习题解答。重点章节基本上包括以下八方面的内容:

- 一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然,考点简明扼要。
- 二、重点知识结构图。该图提纲挈领,逻辑性强,体系完整。
- 三、常考题型与范例精解。题型典型灵活,解题方法富于技巧,内容覆盖全面。
- 四、疑难解答。抓住要害,突出重点、难点,拓宽知识面。
- 五、考研经典题剖析。开阔视野,“一步到位”,使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢。
- 六、典型错误类型及根源分析。析理透彻,一针见血。
- 七、学习效果测试。循序渐进,层次分明,适合不同要求,便于复习巩固所学知识。
- 八、习题解答与测试题答案。便于自我检测。

我们真诚希望《最新概率论与数理统计教与学参考》能够成为广大读者的得力助手。同时,希望广大读者对书中不妥之处,来信批评指正。

来信请寄:武汉市洪山区楚雄大道268号 武汉现代外国语言文学研究所

邮编: 430070

电话: 027-88034727 88026460 88027608 88026817

编者

C 目录 CONTENTS

第一章 概率论的基本概念	(1)
一、考点提示及大纲要求	(1)
二、重点知识结构图	(2)
三、常考题型与范例精解	(3)
四、疑难解答	(21)
五、考研经典题剖析	(23)
六、典型错误类型及根源分析	(29)
七、学习效果三级测试	(32)
自考达标题	(32)
基础测试题	(34)
考研训练题	(35)
八、课后习题解答与三级测试题答案	(36)

第二章 随机变量及其分布	(52)
一、考点提示及大纲要求	(52)
二、重点知识结构图	(53)
三、常考题型与范例精解	(54)
四、疑难解答	(77)
五、考研经典题剖析	(81)

六、典型错误类型及根源分析	(92)
七、学习效果三级测试	(96)
自考达标题	(96)
基础测试题	(98)
考研训练题	(99)
八、课后习题解答与三级测试题答案	(100)

第三章 多维随机变量及其分布

一、考点提示及大纲要求	(120)
二、重点知识结构图	(120)
三、常考题型与范例精解	(122)
四、疑难解答	(149)
五、考研经典题剖析	(152)
六、典型错误类型及根源分析	(161)
七、学习效果三级测试	(166)
自考达标题	(166)
基础测试题	(168)
考研训练题	(169)
八、课后习题解答与三级测试题答案	(171)

第四章 随机变量的数字特征

一、考点提示及大纲要求	(199)
二、重点知识结构图	(200)
三、常考题型与范例精解	(201)
四、疑难解答	(223)
五、考研经典题剖析	(226)
六、典型错误类型及根源分析	(241)
七、学习效果三级测试	(246)
自考达标题	(246)

基础测试题	(248)
考研训练题	(249)
八、课后习题解答与三级测试题答案	(250)

第五章 大数定律及中心极限定理

一、考点提示及大纲要求	(276)
二、重点知识结构图	(277)
三、常考题型与范例精解	(278)
四、疑难解答	(286)
五、考研经典题剖析	(288)
六、学习效果两级测试	(287)
基础测试题	(287)
考研训练题	(290)
七、课后习题解答与两级测试题答案	(291)

第六章 样本及抽样分布

一、考点提示及大纲要求	(299)
二、重点知识结构图	(300)
三、常考题型与范例精解	(300)
四、疑难解答	(312)
五、考研经典题剖析	(316)
六、学习效果两级测试	(319)
基础测试题	(319)
考研训练题	(321)
七、课后习题解答与两级测试题答案	(322)

第七章 参数估计

一、考点提示及大纲要求	(332)
二、重点知识结构图	(333)

三、常考题型与范例精解	(334)
四、疑难解答	(353)
五、考研经典题剖析	(356)
六、学习效果两级测试	(359)
基础测试题	(359)
考研训练题	(361)
七、课后习题解答与两级测试题答案	(362)

第八章 假设检验

一、考点提示及大纲要求	(382)
二、重点知识结构图	(383)
三、常考题型与范例精解	(383)
四、疑难解答	(396)
五、考研经典题剖析	(398)
六、学习效果两级测试	(399)
基础测试题	(399)
考研训练题	(401)
七、课后习题解答与两级测试题答案	(402)

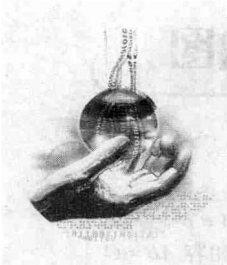
第九章 方差分析及回归分析

第十二章 随机过程及其统计描述

第十三章 马尔可夫链

第十四章 平稳随机过程

选做习题



第一章

概率论的基本概念



一、考点提示及大纲要求

➔ 考点提示

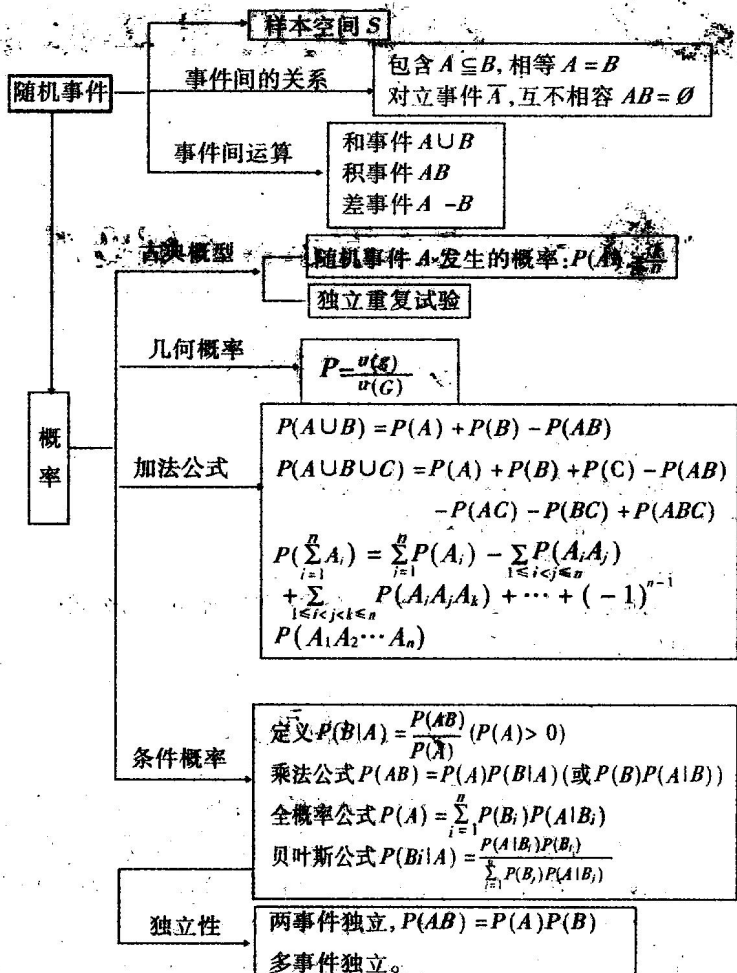
1. 随机事件与样本空间;
2. 事件的关系运算,样本空间划分的定义;
3. 概率的定义和概率的基本性质;
4. 古典概型、条件概率;
5. 概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式;
6. 事件的独立性,独立重复试验。

➔ 大纲要求

1. 理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件之间的关系与运算;
2. 了解概率、条件概率的定义,掌握概率的基本性质,会计算古典概型的概率;
3. 掌握概率的加法公式,乘法公式,会应用全概率公式和贝叶斯公式;
4. 理解事件独立性的概念,掌握应用事件独立性进行概率计算;
5. 理解独立重复试验的概率,掌握计算有关事件概率的方法。



二、重点知识结构图





三、常考题型与范例精解

例1 设 $A \subset B$, $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.5$, 则 $P(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为 $A \subset B$,

所以 $AB = A$, $A \cup B = B$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B}$.

故 $P(AB) = P(A) = 0.1$; $P(A \cup B) = P(B) = 0.5$;

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$.

例2 设 A, B 为两相互独立的事件, $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A) = 0.4$, 则 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由题设 A, B 相互独立, 因此 $P(AB) = P(A)P(B)$,

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

即有 $0.6 = 0.4 + P(B) - 0.4P(B)$

故 $P(B) = 0.2/0.6 = \frac{1}{3}$.

例3 设在全部产品中有2%是废品, 而合格品有85%是一级品, 则任抽出一个产品是一级品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 设 $A =$ “抽出合格品”, $B =$ “抽出一级品”, 则

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.02 = 0.98$

又 $P(B|A) = 0.85$

故所求概率

$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.98 \times 0.85 = 0.83$.

例4 甲乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为0.6和0.5, 现已知目标被击中, 则它是甲射中的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 设 A 表示“甲射中目标”, B 表示“乙射中目标”, 则 $A \cup B$ 表示“目标被击中”, 由加法公式有

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.8 \end{aligned}$$

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75.$$

例5 某射手在三次射击中至少命中一次的概率为0.875, 则这射手在一次射击中命中的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 设 A 表示“射手命中”且 $P(A) = p$, $P\{\text{三次射击全不命中}\} = C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3$.

而 $P\{\text{三次射击至少命中一次}\} = 1 - P\{\text{全不命中}\}$

因此可得:

$$1 - (1-p)^3 = 0.875$$

即 $(1-p)^3 = 0.125$, $1-p = 0.5$

故 $P(A) = 0.5$.

例6 将C、C、E、E、I、N、S等七个字母排成一行,那么恰好排成英文单词SCIENCE的概率为_____.

解 设想将七个字母按1~7编上号,则其排列方法共有 $P_7^7 = 7!$ 种,而排成SCIENCE的基本事件有7153624,7253614,7154623,7254613共四种,故所求概率为

$$\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260}.$$

例7 假设1000件产品中,有200件是不合格的产品,依次作不放回抽取两件产品,则第二次抽取到不合格品的概率是_____.

解 设A表示“第一次抽取到不合格品”,B表示“第二次抽取到不合格品”,由全概率公式得

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

而由题设 $P(A) = \frac{200}{1000} = 0.2$,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.8,$$

由于是不放回的抽取,故有

$$P(B|A) = \frac{199}{999}, P(B|\bar{A}) = \frac{200}{999},$$

故 $P(B) = 0.2 \times \frac{199}{999} + 0.8 \times \frac{200}{999} = 0.2$.

例8 将数字1,2,3,4,5写在5张卡片上,任意取出三张排列成三位数,这个数是奇数的概率 $P(A) =$ _____.

解 试验的基本事件总数为 P_5^3 ,对于一个固定的个位奇数,十位和百位数字有 P_4^2 种选择,而个位奇数有3种可能,因此A包含的基本事件数为 $3P_4^2$,依概率的古典定义,有

$$P(A) = \frac{3P_4^2}{P_5^3} = 3/5.$$

例9 假设一批产品中一、二、三等品各占60%、30%、10%,从中随意取出一件,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率为_____.

解 设 A_i 表示“取到的一个产品为i等品”, $i = 1, 2, 3$,显然, A_1, A_2, A_3 为互斥事件组,由题意有

$$P(\bar{A}_3) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{90}{100}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 | \bar{A}_3) &= \frac{P(A_1 \bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{P[A_1(A_1 \cup A_2)]}{P(\bar{A}_3)} = \frac{P(A_1 \cup A_1 A_2)}{P(\bar{A}_3)} \\ &= \frac{P(A_1)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{60\%}{90\%} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

例10 有两只口袋,甲袋中装3只白球,2只黑球,乙袋中装有2只白球,5只黑球,任选一袋,并从中任取一球,此球为白球的概率是_____.

解 设B表示“选出甲袋”, $\bar{B}$ 表示“选出乙袋”,B与 $\bar{B}$ 构成样本空间的一个划分,又设A表示“取出的球是白球”,由题设可知

$$P(B) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2}, P(A|B) = 3/5, P(A|\bar{B}) = \frac{2}{7}$$

由全概率公式,得



$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{31}{70}. \end{aligned}$$

例 11 已知 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ _____.

解 因为 $P(A - B) = P(A\bar{B})$
 $= P(A)P(\bar{B}|A) = P(A)[1 - P(B|A)]$

$$1 - P(B|A) = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

从而 $P(B|A) = 1 - 3/7 = 4/7$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B|A) \\ &= 1 - \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = 0.6. \end{aligned}$$

例 12 设 A, B 为两随机事件, 且 $B \subset A$, 则下列式子正确的是().

- (A) $P(A \cup B) = P(A)$; (B) $P(AB) = P(A)$;
 (C) $P(B|A) = P(B)$; (D) $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

解 由于 $B \subset A$, 则有 $A \cup B = A$

于是 $P(A \cup B) = P(A)$

故选(A).

例 13 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则().

- (A) 事件 A 与 B 互不相容; (B) 事件 A 与 B 互相对立;
 (C) 事件 A 与 B 互不独立; (D) 事件 A 和 B 相互独立.

解 由于 $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = P(A|B) + 1 - P(A|\bar{B})$

$$\begin{aligned} &= 1, \\ \text{从而 } P(A|B) - P(A|\bar{B}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{又 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(A|\bar{B}) = P(A\bar{B})/P(\bar{B})$$

$$\text{故有 } \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$\text{从而 } P(AB)[1 - P(B)] = P(B)P(A\bar{B})$$

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(B)[P(AB) + P(A\bar{B})] \\ &= P(B)P[A(B \cup \bar{B})] = P(B)P(A), \end{aligned}$$

故选(D).

例 14 设 A, B 为两个互斥事件, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则结论正确的是().

- (A) $P(B|A) > 0$; (B) $P(A|B) = P(A)$;
 (C) $P(A|B) = 0$; (D) $P(AB) = P(A)P(B)$.

解 因为 A, B 互斥, 即 $AB = \emptyset$, 故 $P(AB) = 0$,

又因 $P(A) > 0, P(B) > 0$,

$$\text{由公式 } P(AB) = P(B)P(A|B) = 0$$

$$\text{即 } P(A|B) = 0.$$

故选(C).

例 15 设 A 表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 $\bar{A}$ 为().

- (A) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”;
 (B) “甲种产品带销”;
 (C) “甲、乙两种产品均畅销”;
 (D) “甲种产品滞销,乙种产品畅销”.

解 设 A_1, A_2 分别表示甲、乙产品畅销,

则 $A = \overline{A_1} A_2$, 由德莫根定理知

$$\overline{A} = \overline{A_1 A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

故选(A).

例 16 每次试验成功率为 $p(0 < p < 1)$, 进行重复实验, 直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率为()

- (A) $C_{10}^4 p^4 (1-p)^6$; (B) $C_9^3 p^4 (1-p)^6$;
 (C) $C_9^4 p^4 (1-p)^5$; (D) $C_9^3 p^3 (1-p)^6$.

解 所谓直到第 10 次试验才取得 4 成功的隐含意义是前 9 次成功了 3 次, 而第 10 次是成功的, 故选(B).

例 17 关于独立性, 下列说法错误的是().

- (A) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则其中的任意多个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} (k \leq n)$ 仍然相互独立;
 (B) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则它们之中的任意多个事件换成其对立事件后仍然相互独立;
 (C) 若 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, C 与 A 相互独立, 则 A, B, C 相互独立;
 (D) 若 A, B, C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立.

解 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立与 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立是不同的概念, 前者包含后者, 反之则不然, 故选(C).

例 18 设 $P(A) = a, P(B) = b, P(A \cup B) = c$, 则 $P(\overline{A}\overline{B})$ 为().

- (A) $a(1-b)$; (B) $a-b$; (C) $c-b$; (D) $a(1-c)$.

解 利用等式 $P(A) = P(AB) + P(\overline{A}B)$ 知

$$P(\overline{A}B) = P(A) - P(AB), \text{ 又}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$\text{从而 } P(\overline{A}\overline{B}) = P(A \cup B) - P(B) = c - b$$

故选(C).

例 19 设 $P(A) = 0.8, P(B) = 0.7, P(A|B) = 0.8$, 则下列结论正确的是().

- (A) 事件 A 与 B 互不相容; (B) $A \subset B$
 (C) 事件 A 与 B 互相独立; (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

解 因 $P(A) = P(A|B) = 0.8$, 从而事件 A 与 B 独立, 故选(C).

例 20 袋中有 5 个球(3 个新球, 2 个旧球), 现每次取一个, 无放回地抽取两次, 则第二次取到新球的概率为().

- (A) $\frac{3}{5}$; (B) $\frac{3}{4}$; (C) $\frac{2}{4}$; (D) $\frac{3}{10}$.

解 设 B 表示“第一次取到新球”, 则 $\overline{B}$ 为“第一次取到旧球”, 又设 A 为“第二次取到新球”. 由题设可知 $P(B) = \frac{3}{5}, P(\overline{B}) = \frac{2}{5}, P(A|B) = \frac{2}{4}, P(A|\overline{B}) = \frac{3}{4}$, 由全概率公式得



$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 3/5.
 \end{aligned}$$

故选(A).

例 21 向单位圆 $x^2 + y^2 < 1$ 内随机地投下 3 点, 则这 3 点恰有 2 点落在第一象限中的概率为().

- (A) $\frac{1}{16}$; (B) $\frac{3}{64}$; (C) $\frac{9}{64}$; (D) $\frac{1}{4}$.

解 投下的每一点, 可看做有两种可能的结果: A 为点落在第一象限中; $\bar{A}$ 为点不落在第一象限中, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$, 落下 3 点相当于三重贝努里试验, 于是所求概率为 $P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

故选(C).

例 22 设有一批产品共 100 件, 其中有 95 件合格品, 5 件次品, 从中任取 10 件.
(1) 求样本空间所含基本事件个数 n 是多少? (2) 求事件 A_1 = “所取 10 件全是合格品” 所含基本事件的个数 m_1 是多少? (3) 求 A_2 = “取出 10 件中恰有两件次品” 所含基本事件个数 m_2 是多少?

解 (1) 在此随机试验中, 从 100 件产品取出 10 件, 每次得到的一个结果就是一个基本事件. 总共有 C_{100}^{10} 种取法, 所以 $n = C_{100}^{10}$.

(2) 要求每次取出的 10 件产品都是合格品, 这只能从 95 件合格品中取, 总共有 C_{95}^{10} 种取法, 所以 $m_1 = C_{95}^{10}$.

(3) 要求每次取出的 10 件产品中有两件次品, 只能从 5 件次品中取, 共有 C_5^2 种取法; 而对于已取定的两件次品, 还要配上 8 件合格品, 这 8 件合格品要从 95 件合格品中取出, 有 C_{95}^8 种取法. 这样, 使 “取出 10 件中恰有两件次品”, 总共有 $C_5^2 C_{95}^8$ 种取法, 所以 $m_2 = C_5^2 C_{95}^8$.

例 23 在某城市中发行三种报纸 A, B, C , 经调查, 订阅 A 报的有 45%, 订阅 B 报的有 35%, 订阅 C 报的有 30%, 同时订阅 A 及 B 报的有 10%, 同时订阅 A 及 C 报的有 8%, 同时订阅 B 及 C 报的有 5%, 同时订阅 A, B, C 报的有 3%. 试求下列事件的概率:

- (1) 只订 A 报的;
- (2) 只订 A 及 B 报的;
- (3) 只订一种报纸的;
- (4) 正好订两种报纸的;
- (5) 至少订阅一种报纸的;
- (6) 不订阅任何报纸的;
- (7) 最多订阅一种报纸的;

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (1) P(\bar{A}\bar{B}C) &= P(A - B - C) = P(A - (B \cup C)) \\
 &= P(A - A(B \cup C)) = P(A) - P(A(B \cup C)) \\
 &= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) \\
 &= 0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) P(\bar{A}BC) &= P(AB - C) = P(AB - ABC) \\
 &= P(AB) - P(ABC) = 0.10 - 0.03 = 0.07.
 \end{aligned}$$

$$(3) P(\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C})$$

$$\begin{aligned}
 &= P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) \\
 &= 0.30 + P(B - B(A \cup C)) + P(C - C(A \cup B)) \\
 &= 0.30 + P(B) - P(BA) - P(BC) + P(ABC) + P(C) - P(AC) - P(BC) + \\
 &P(ABC) \\
 &= 0.30 + 0.35 - 0.10 - 0.05 + 0.03 + 0.30 - 0.08 - 0.05 + 0.03 \\
 &= 0.73.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) &P(\overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}) \\
 &= P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) \\
 &= P(\overline{A}B) - P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}C) - P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}C) - P(\overline{A}BC) \\
 &= P(\overline{A}B) + P(\overline{A}C) + P(\overline{A}C) - 3P(\overline{A}BC) \\
 &= 0.10 + 0.08 + 0.05 - 3 \times 0.03 = 0.14.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) &P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + \\
 &P(ABC) \\
 &= 0.45 + 0.35 + 0.30 - 0.10 - 0.08 - 0.05 + 0.03 = 0.90
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) &P(\overline{A}BC) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\
 &= 1 - 0.09 = 0.10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) &P(\overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC) \\
 &= P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}BC) \\
 &= 0.10 + 0.73 = 0.83.
 \end{aligned}$$

例 24 设有 n 个房间, 分给 n 个人, 每个人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一房间, 而且每间房里的人数没有限制, 试求不出现空房的概率.

解 n 个房间分给 n 个人, 人数不限, 即每个房间可以重复分配给不同的人, 这相当于取 n 个房间给 n 个排列好的人, 可以重复取, 故可能的排列种数为 $N = n^n$; 没有空房, 即每人进一间房, 这相当于 n 个房间不重复地分配给 n 个排列好的人, 也就是取 n 个房间进行全排列, 故 $M = n!$,

故所求的概率是 $p = \frac{n!}{n^n}$.

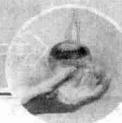
例 25 连续做某项试验, 每次试验只有成功和失败两种结果, 已知当第 k 次成功时, 第 $k+1$ 次成功的概率为 $\frac{1}{2}$; 当第 k 次失败时, 第 $k+1$ 次成功的概率为 $\frac{3}{4}$. 如果第一次试验成功和失败的概率均为 $\frac{1}{2}$, 求第 n 次试验成功的概率.

解 令 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 次试验成功}\}$

$P(A_k) = P_k, k = 1, 2, \dots$, 则

$$\begin{aligned}
 P(A_k) &= P(A_{k-1})P(A_k | A_{k-1}) + P(\overline{A}_{k-1})P(A_k | \overline{A}_{k-1}) \\
 &= \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{3}{4}P(\overline{A}_{k-1}) \\
 &= \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{3}{4}[1 - P(A_{k-1})] \\
 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P(A_{k-1}), k \geq 2
 \end{aligned}$$

即 $P_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P_{k-1}, k \geq 2$, 于是



$$P_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P_{n-1},$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)P_{n-1} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2P_{n-2},$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2P_{n-2} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3P_{n-3},$$

.....

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}P_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}P_1$$

两边分别相加得:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}P_1 \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

例 26 某城有 N 部卡车, 车牌号从 1 到 N , 有一个外地人到该城去, 把遇到的 n 部车子的牌号抄下 (可能重复抄到某些车牌号), 问抄到的最大号码正好为 k 的概率 ($1 \leq k \leq N$).

解 这种抄法可以看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回的抽样, 所有可能的抽法共有 N^n 种, 这就是基本事件总数. 由于每部卡车被遇到的机会可以认为相同, 因此这是一个古典概型的计算问题. 设 A 表示“抄到的最大号码正好为 k ”的事件, 先考虑最大车牌号不大于 k 的取法, 这样取法共有 k^n 种, 再考虑最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法, 其数目有 $(k-1)^n$ 种, 因此 A 包含的基本事件总数为 $k^n - (k-1)^n$, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

例 27 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 只白球, 每次从袋中随机地摸出一球, 并换入一只黑球, 这样继续下去, 问第 k 次摸球时, 摸到黑球的概率是多少?

解 设 A 表示第 k 次摸到黑球这一事件, 则 $\bar{A}$ 表示第 k 次摸到白球, 先计算 $P(\bar{A})$.

因为袋中只有一只白球, 而每次摸出白球总是换入黑球, 故为了第 k 次摸到白球, 则前面的 $k-1$ 次一定不能摸到白球, 从而 $\bar{A}$ 等价于下列事件: 在前 $k-1$ 次摸球时都摸出黑球第 k 次摸出白球, 这一事件的概率为

$$P(\bar{A}) = \frac{(N-1)^{k-1} \cdot 1}{N^k} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{1}{N}$$

故所求概率为

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{1}{N}.$$