系统分析及其在生态学中的应用

兰仲雄　　李典谟

中国科学院动物研究所

1979年11月

目录

一、一些数学概念和公式

这里列示一些数学概念和公式，概念建立和公式成立的条件从略。

1、1 微积分

导数：$f'(x) \triangleq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

定积分：$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

微积分基本定理：$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$，

其中 $F'(x)=f(x)$

台劳级数：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\dfrac{f''(x_0)}{2!}x^2$

$+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)x^n}{n!}+\cdots$ $\exp x$

$\exp x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

1.2 矩阵和相关

定义：$\underline{A}=[a_{ij}] \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$\underline{a} \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

运标： $\lambda(\underline{A}+\underline{B}) = \lambda\underline{A}+\lambda\underline{B}$ （λ标量）

$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{C}$ 其中 $\underline{C} = (c_{ij})$， $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$A(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\underline{C}$

$A(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B}+\underline{A}\,\underline{C}$

特殊矩阵：

零矩阵 $\underline{O} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

单位矩阵 $\underline{I} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$， $\underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{I} = \underline{A}$

对角线矩阵 $\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$

转置矩阵 $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{bmatrix}$， $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\underline{A}^T$

对称矩阵 $\underline{A}, \underline{B}$ 其中 $a_{ij}=b_{ji}$

反对称矩阵 $\underline{A}, \underline{B}$ 其中 $a_{ij}=-b_{ji}$

逆矩阵 $$\underline{A}^{-1} \triangleq \frac{1}{\det \underline{A}} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ - & & - & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 C_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式

$$(\underline{A}\underline{B})^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \quad (\underline{A}^{T})^{-1}=(\underline{A}^{-1})^{T}$$

线性无关的向量：

奇异矩阵，$\det \underline{A}$ 时，称 $\underline{A}$ 为奇异矩阵这对 $\underline{A}^{-1}$ 不存在，若存在不全为零的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 使得 $C_1\underline{a}_1+C_2\underline{a}_2+\cdots+C_n\underline{a}_n=\underline{0}$

则称 $\underline{a}_1, a_2, \cdots \underline{a}_n$ 为线性相关的向量；

否则称为线性无关的向量

n 维空间的基向量：$\underline{\ell}_1 = (1\,0\cdots0)^T$

$\underline{\ell}_2 = (0\,1\,0\cdots0)^T$

$\underline{\ell}_n = (0\,0\cdots0\,1)^T$

向量的模：$\|\underline{a}\| \triangleq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{\frac{1}{2}}=(\underline{a}^T\underline{a})^{\frac{1}{2}}$

向量的内积：$(\underline{a}, \underline{b}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad (\underline{a}, \underline{b})=\underline{a}^T\underline{b}=\underline{b}^T\underline{a}$

线性方程组：$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$，当 $\det \underline{A}\neq0$ 时，存在唯一解

$\underline{A}\underline{x}=\underline{0}$ 有非零解当且只当

$\det \underline{A}=0$

特征方程：$|\underline{A}-\lambda\underline{I}|=\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=0$，特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

梯度：$\mathrm{grad} f(x)=\nabla f(x) \triangleq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

1.3 拉普拉斯变换

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathscr{L}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda \mathscr{L}[f(t)]+\mu \mathscr{L}[g(t)],\ \lambda, \mu$$

标另

$$\mathscr{L}[f(t) * h(t)]=\mathscr{L}[f(t)] \mathscr{L}[h(t)],$$

其中 $f(t) * h(t) \triangleq \int_0^{t} f(t-\tau) h(\tau) d\tau$

称为$f(t)$与$h(t)$的褶积

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0^{+})$$

1.4 付利叶变换

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)] \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (i=\sqrt{-1}$$

反变换 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

$$\mathscr{F}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda \mathscr{F}[f(t)]+\mu \mathscr{F}[g(t)]$$

$$\mathscr{F}[f(t) * h(t)]=\mathscr{F}[f(t)] \mathscr{F}[h(t)]$$

$$\mathscr{F}[f'(t)]=i\omega \mathscr{F}[f(t)]$$

1.5 Z变换

给定离散序列 $=f(n),\ n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$Z(z)=Z[f(n)]=\sum_{n} f(n) z^{-n}$, （z复数 $x+iy$）

$$Z[\lambda f(n)+\mu g(n)]=\lambda Z[f(n)]+\mu Z[g(n)]$$

$$Z[f(n)*h(n)]=Z[f(n)]\,Z[h(n)],$$

其中 $f(n)*h(n)\triangleq\sum_{k}f(k)h(n-k)$

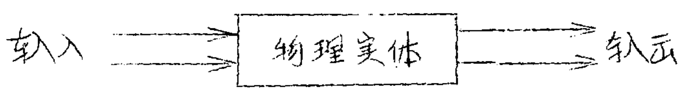
（离散褶积）

二、系统的基本概念

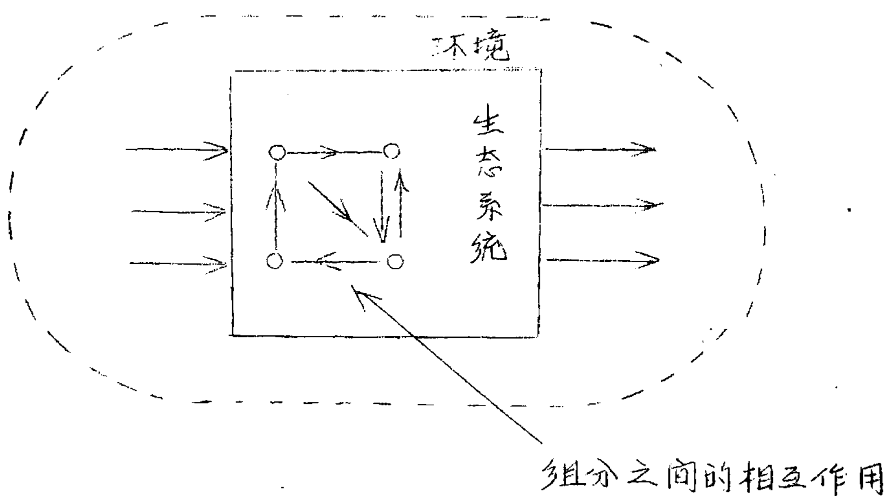
系统理论（系统科学）发源于电工学的数学理论，如电路、网络理论，无线电通信理论，控制理，信息论等，已有卅多年的历史。它是从这些特殊领域的研究中，抽象、概括出在结构、功能，因果关系上具有普遍意义的结果，形成一般的概念和方法。今天，系统理论已伸及到宇航科学、地球科学，生命科学以及经济科学中。当然特殊领域的系统是有特殊的性质，比如说生态系统，一般都是大型的复杂的系统，所考虑的变量个数很多，描述的方程式个数也很多而且复杂。如果是研究生态——社会经济系统，则其复杂性可想而知了。电子计算机的发展在这方面起了很大的作用。它不但是一个快速的计算工具，而且还是一种有效的实验设备。所以系统理论的迅速发展及广泛应用与电子计算机的出现有着密切的关系。

2.1 什么是系统

系统是由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合成的具有特定功能的有机整体，最简单的描述如下图所示：



有一物体实体，一端为输入（信号，刺激），另一端为输出（信号，响应）当有输入信号x时，经过实体的物理作用，产生输出信号y。所谓系统是指物理实体连同其输入信号和输出信号而言。



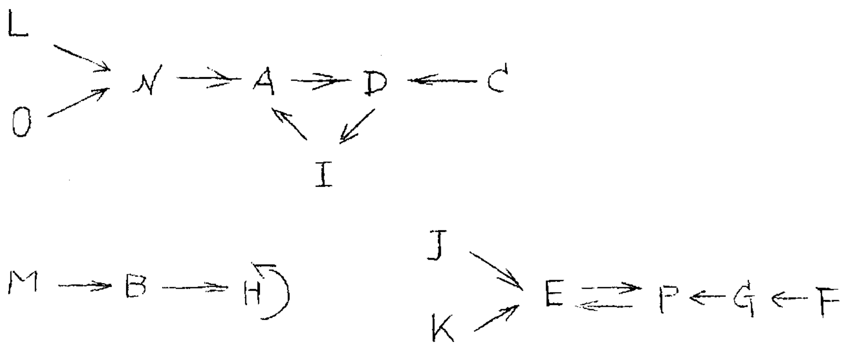
系统可看成是输入空间$\{x\}$到输出空间$\{y\}$的映射

$$y = S[x]$$

系统的状态转移可用图（graph）给以明晰的表示，设有一个抽象系统，它有16个可能的状态，其转移如下表所示：

状态	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
↓	D	H	D	I	P	G	P	H	A	E	E	N	B	A	N	E

则其行为图为



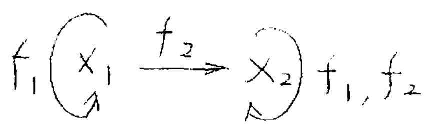
属于H；A，D，I；E，P的状态是稳态

属于B、C，F，G，J，K，L，M，N，D的状态是暂态

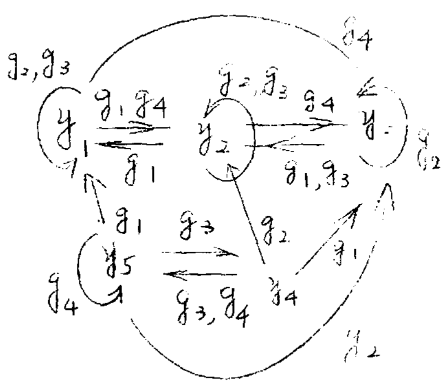
例如从L出发，先到N，再到A，最后落在循环A，D，I的稳态中。容易看出从任一个状态出发，一旦转移到上述三个稳态的循环中，则以后永远停留在该循环之中。

有时表面上看来似乎是没有什么关系的两个系统，其实经过分析可能发现它们的结构却是一样的。设有具有条件转移状态（条件转移，例如植被的演替）的两个系统如下：

	状态		
	↓	x_1	x_2
条件	f_1	x_1	x_2
	f_2	x_2	x_2



	↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
条件	g_1	y_2	y_1	y_2	y_3	y_1
	g_2	y_1	y_2	y_3	y_2	y_3
	g_3	y_1	y_2	y_2	y_5	y_4
	g_4	y_2	y_3	y_1	y_5	y_5



若令 A 代替 y_1, y_2, y_3

B 〃 y_4, y_5

α 〃 g_3, g_4

β 〃 g_1, g_2

则得

	状态				
↓	A	A	A	B	B
条件 β	A	A	A	A	A
β	A	A	A	A	A
α	A	A	A	B	B
α	A	A	A	B	B

即是

	状态	
↓	A	B
α	A	B
β	A	A

$$\begin{tikzcd} B \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & A \arrow[loop right, "\alpha,\beta"] \end{tikzcd}$$

可见如作对应 $x_1 \longleftrightarrow B$, $x_2 \longleftrightarrow A$

$f_1 \longleftrightarrow \alpha$, $f_2 \longleftrightarrow \beta$

则系统 y 与系统 x 同态

系统的模型是真实系统的同态。

2.2 连续时间系统和离散时间系统

若系统接收连续时间输入信号时，产生连续时间输出信号，则此系统称为连续时间系统。即 $y(t)=S[x(t)]$ 例如：扩音器接收电信号时产生声音信号。

若系统接受离散时间输出信号时，产生离散时间输入信号，则此系统称为离散时间系统，即 $y(n)=S[x(n)]$，例如，数字电子计算机读入穿孔卡片上的数字与字符的序列，在宽行打印机上打印出数字与字符的序列。

若系统接收连续（离散）时间输入信号时，却产生离散（连续）时间输入信号，则此系统称为混合系统，例如 电视机从广播的电磁波产生出来的图象实际上是离散信号。

由于我们的测量往往是有时间间歇的，这样将一个连续时间系统用离散时间系统来处理，这即所谓采样数据系统。

2.3 线性系数和非线性系数

若系统是有如下性质，则称为线性系统

迭加定理：$S[\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)]=\lambda_1 S[x_1(t)]+\lambda_2 S[x_2(t)]$

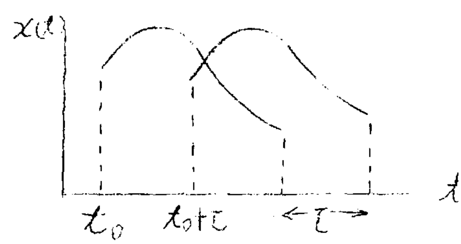
其中 λ_1，λ_2 是常量。否则，称为非线性系统。例如，服从欧姆定律的简单电路中，电阻两端电压与其中通过的电流成正比，这显然是线性系统。但当电阻中电流大大增加时，电阻值将由于电阻发热而发生变化，变化的数值决定于电流的大小，这时，欧姆定律就不成立了，系统成为非线性的了。同样，对于服从胡克定律的简单弹性系统，力与弹簧形变成正比，也是线性系统。但当加在弹簧上的力太大以致应力超过了弹簧材料的弹性限度，胡克定律不成立了，则系统成为非线性的。绝大多数工程技术问题都是线性的，至少在特定的范围内是如此。对线性系统有标准方法求解。而对非线性系统，除少数特殊情况外，现在还没有标准方法。解非线性问题的实际方法是图解法或数值解法。一般是采取近似的方法并对各种情况作特殊处理。然而，生态系统一般说来都是非线性系统。

2.4 时不变（定常）系统和时变系统

若输入有时迟时，相对地输出也有同样的时迟并无其它的影响，则这样的系统称为时不变系统。否则称为时变系统。用关系式描述时不变系统，即是：

若 $y(t)=S[x(t)]$，则

$y(t+\tau)=S[x(t+\tau)]$



对一切 τ 均成立。

例：放大器是时不变的。无线电收音机是时变的，这是由于晶体管的特性和电阻器、电容器的值均因时而变。

从物理上说，时不变系统中的参数是不随时间改变而改变的。如果系统的性质是因时而变的，则是时变系统。线性与时不变是两个概念，往往时不变非线性系统经过线性化后即变成时变系统。

2.5　确定性系统和随机性系统

如在前述的抽象系统状态图中，假定 A→D 的转移概率 $p=0.8$，其余 B→H，C→D，---，P→E 等转移概率均为 $p=0.2$，H→H 的概率 $p=1$，则这样的系统是随机系统，有时输入信号是随机的，当然输出信号也成为随机的。非随机性的系统称为确定性系统。

2.6　无记忆（即时）系统和记忆（非即时）系统

若在任意时刻的响应只决定于该时刻的输入值，则此系统称为即时系统。若响应决定于该时刻的输入值以及以前的输入值，则称为非即时系统（即有记忆的或动态系统）。

例：若放大器的输出 $y(t)=a\,x(t)$，则是无记忆系统。

若系统的输出为　$y(t)=x(-t)$

$y(t)=x(t-\tau)$，$(\tau\neq 0)$

$y(t)=x(at)$，$(a\neq 1)$

则这些系统都是有记忆系统，无线电收音机是即时系统。邮票售出器是有记忆系统，因为它能累加投入的硬币。

2.7　稳定系统和非稳定系统

当输入信号有界时，输出信号也有界，这样的系统称为稳定系统，否则称为非稳定系统。

例如，输出是输入对时间的积分，则此系统是非稳定系统

因为这里，即使输入信号是有界时，但输出信号可以是无界的。

2.8 因果（可实现）系统和非因果（不可实现）系统

若系统在输入前是不作任何响应的，即

若 $x(t)=0$ 对于 $t<t_0$ 成立，则有

$$y(t)=0 \text{ 对于 } t<t_0 \text{ 成立}$$

这样的系统称为能实现的系统。否则，称为不能实现的系统。例如，扩音机在放大机开动之前是不会播出音来的，计算机在输入数据之前是不会打印出计算结果的，所以它们都是因果系统。再如系统响应为

$$y(n)=x(n)+x(n-2)$$

的系统是因果系统。系统响应为

$$y(n)=x(n)+x(n+2)$$

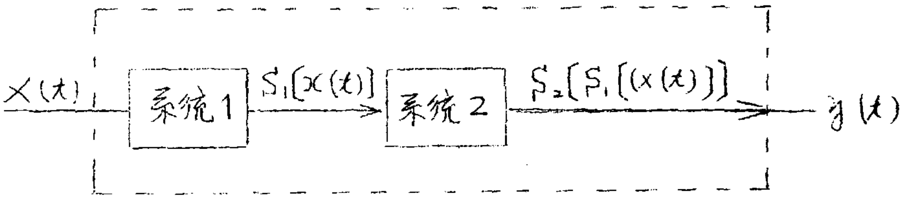
的系统是非因果系统。

显然，一切在物理上可以造成的系统都是因果系统。

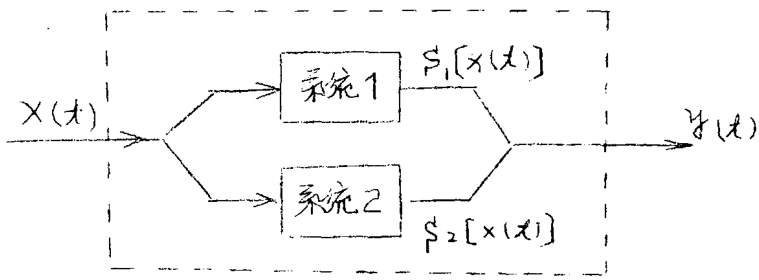
2.9 系统的组合

大的系统是由若干小的所谓子系统构成的。例如数字计算机是由子系统：运算器，控制器，存贮器以及输入、输出设备组成的。子系统当然还可以由更小的子子系统构成的。例如计算机的运算器一般是由累加器和寄存器组成的。

从设计，建造大系统和分析、维修复杂系统的角度，都需要将一个系统分成若干子系统，有两个基本方式：串联与并联。



串联：$y(t)=S_2[S_1(x(t))]$



并联：$y(t)=S_1[x(t)]+S_2[x(t)]$

大型复杂系统是用这两个基本联接经过送置组合而成的。

三、时间域分析与S域分析

系统工程的经典分析方法分别在两个域上来研究系统：一个是时间域，另一个是频率域或称S域。在时间域上，输入信号通常是没有周期的，而输出则是时间的函数，在频率域上，输入信号通常是正弦曲线，而输出则是输入的频率和振幅的函数。这两种方法的基本原理是一样的，都是把系统对某一种试验（test）函数的反应特征化。而系统对典型试验输入信号的响应特性，与系统对实际输入信号的响应特性之间，存在着一定的关系。因此当一个生态学家研究一个系统的实际输入信

号时，就可以依靠这些典型试验输入信号的响应特性，来得到关于一般输入信号的响应特性的信息。

3、1　时间域分析（Time domain analysis）

在时间域分析中，经常采用的试验输入信号有脉冲函数，阶跃函数和斜坡函数等。下面将着重介绍前两种。

3、1、1　单位脉冲函数 $[u_0(t)]$（unit impulse function）如果设 $P_\tau(t)$ 是一个宽度为 τ，高度为 $1/\tau$ 的一个脉动，即

$$P_\tau(t)=\begin{cases} 1/\tau & 0\leqslant t\leqslant\tau \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

那末脉冲函数可以定义为

$$u_0(t)=\lim_{\tau\to 0} P_\tau(t)$$

有时人们把单位脉冲函数叫做 δ－函数。

如果一个初始值为零的线性系统，输入是单位脉冲函数时，则称系统的输出 $h(t)$ 为单位脉冲响应（unit impulse Response）

一旦一个线性系统的单位脉冲响应已知后，就能按照下面卷积公式来计标对任何一个输入信号的响应。设 $y(t)$ 是对某一输入信号 $x(t)$ 的响应，$h(t)$ 是单位脉冲响应

$$y(t)=x(t)*h(t) \qquad *\text{为卷积}$$

即

$$y(t)=\int_0^t x(\xi)h(t-\xi)\,d\xi$$

3、1、2　单位阶跃函数 $u_1(t)$（unit step function）