

桥梁结构电算程序设计



颜东煌

田仲初 编著

李学文

刘光栋 主审

湖南大学出版社

43

23

桥梁结构电算程序设计

颜东煌 田仲初 李学文 编著
 刘光栋 主审



湖南大学出版社

1999年·长沙

责任编辑 137

封面设计

湖南出版

社

：中

湖南

长沙

787×1092 本开

1999年1月第1版 大32

1-3 000册 印

ISBN 7-81023-250-0 号

23.00元 价

内 容 提 要

本书系统地介绍了线性方程组求解、插值计算、杆系结构静力计算、桥梁荷载横向分布影响线计算、影响线加载计算、荷载组合、钢筋混凝土构件截面设计以及截面几何特性计算等的计算机程序编制方法和源程序。对每一部分,先简介计算原理,然后讲解程序编制方法,再给出全部源程序和详细说明,并附有例题。全书叙述清楚,由浅入深,程序思路明确,可读性强,实用性例题较多,便于学习和运用。

本书可供土建结构方面特别是桥梁结构方面的工程技术人员学习桥梁与结构分析程序设计使用,也可作为相关专业本科生和研究生学习桥梁程序设计的教材或参考书。

桥梁结构电算程序设计

Qiaoliang Jiegou Diansuan Chengxu Sheji

颜东煌 田仲初 李学文 编著

-
- 责任编辑 刘玉兰 仲景
 装帧设计 余丹如
 出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
 经 销 湖南省新华书店
 印 装 长沙交通学院印刷厂

-
- 开本 787×1092 16开 印张 15.5 字数 400千
 版次 1999年4月第1版 1999年4月第1次印刷
 印数 1-3 000册
 书号 ISBN 7-81053-220-0/U·2
 定价 22.00元

(湖南大学版图书凡有印装差错, 请向承印厂调换)

前 言

桥梁结构, 由于其形式多样, 特别是一些大型桥梁, 超静定次数很高, 加之荷载形式复杂, 因此, 在设计、施工和科研工作中, 计算分析工作非常繁重, 难度也很大。而科学发展到今天, 计算机已普及, 桥梁工程中也在广泛使用计算机, 各种桥梁计算的软件也应运而生, 使桥梁学科发生了根本性的变化。因此, 桥梁科技工作者掌握桥梁结构计算机分析手段是非常必要的。

本书所选择的计算机语言是 FORTRAN, 这种语言较适合于科技计算, 现有的绝大部分桥梁与结构分析方面的程序均选用了这种语言, 并且微软公司已开发出 Windows 环境下的 Fortran PowerStation 系统, 使这门语言的功能得到很大扩展。附录中选用了 BASIC 语言来绘图。本书主要围绕平面杆系静力分析和纵、横向影响线加载两个通用程序来叙述, 因此, 第三、四、五章是核心部分。第一章的矩阵运算和线性方程组求解以及第二章的插值方法属基础部分, 在这两章中所介绍的方法在后面的核心部分中基本上都有应用。第六章的荷载组合将第三、四、五章的内容串联起来。第七章仅选了两个专题介绍构件截面设计的程序设计方法, 第八章介绍了截面几何特性的计算。第九章为两个计算示例。

目前, 国内外用于结构分析的程序不少, 用于桥梁结构分析的专用程序也较多, 大部分专业人员学会了如何使用这些通用程序; 但如果能掌握桥梁结构分析程序设计的一些基本方法, 则更能根据实际情况灵活使用这些通用程序。本书遵循循序渐进的原则, 既有数学的描述, 也有程序示例, 并附有例题, 以增强程序的可读性和实用性。这是一本取材适度的适合于桥梁专业以及公路与城市道路专业大学本科、研究生学习以及从事桥梁与结构工程方面工作的专业人员自学的专著。通过学习, 可以掌握桥梁电算程序设计的思路和基本技巧, 并且能获得一套完整的用于桥梁结构分析的程序, 其中的平面杆系程序还可用于一般的工程结构分析。掌握了这些基本的程序后, 读者可以进一步开发更大型的程序系统。

本书由九章和三个附录组成, 田仲初副教授撰写了第七章, 李学文讲师撰写了第九章, 其余章节由颜东煌教授撰写, 全书由颜东煌统稿, 由湖南大学刘光栋教授主审。在编写过程中, 湖南大学邓德全教授审读了书稿并提出了许多宝贵意见; 长沙交通学院周慕教授和王可成研究员给予了大力支持, 作者在此一并致谢。由于作者水平有限, 书中难免会有疏漏以至错误之处, 敬请读者指正。

书中源程序均由已调通的源程序直接拷贝编辑。读者如需要这些程序的拷贝, 可与作者联系。联系地址: 湖南省长沙市涂家冲长沙交通学院路桥系, 邮政编码: 410076。

编著者

1999年元月于长沙

目 次

(801)	合路建商 0
(801)	五公算廿 1.0
(801)	七数乳野 5.0
(471)	1 矩阵运算和线性方程组求解	(1)
(474)	1.1 矩阵运算	(2)
(191)	1.2 用追赶法求实三对角线性方程组的解.....	(3)
(505)	1.3 高斯消去法以及矩阵的等带宽存贮.....	(5)
(505)	1.4 平方根法与乔累斯基法以及矩阵的一维压缩存贮	(11)
(509)	1.5 用迭代法求解实的线性方程组	(21)
(805)	2 插值方法	(26)
(515)	2.1 线性插值	(26)
(515)	2.2 抛物线插值	(27)
(19)	2.3 样条函数插值	(29)
(33)	2.4 任意曲线的插值加密	(32)
(65)	3 杆系结构静力计算程序	(36)
(85)	3.1 简单的平面杆系刚架程序	(36)
(58)	3.2 两端有刚臂的杆单元的处理	(50)
(40)	3.3 总刚度矩阵的形成	(55)
	3.4 中间铰的处理	(59)
	3.5 非结点荷载、斜拉索张拉、拆除单元以及预应力计算	(62)
	3.6 支座变位以及支点反力计算	(71)
	3.7 影响线计算	(76)
	3.8 结构对称性的利用	(79)
	3.9 平面杆系静力分析通用程序	(82)
	3.10 空间杆系结构	(100)
	3.11 施工过程计算程序设计	(105)
	4 梁桥荷载横向分布影响线计算	(115)
	4.1 铰接板(梁)法	(115)
	4.2 比拟正交异性板法	(122)
	5 影响线加载	(129)
	5.1 简支梁纵向内力影响线加载	(129)
	5.2 一般纵向影响线的加载	(139)
	5.3 横向影响线加载	(159)

目 录

6	荷载组合	(168)
6.1	计算公式	(168)
6.2	程序设计	(169)
(1)	7 钢筋混凝土构件截面设计	(174)
(2)	7.1 钢筋混凝土单向受弯构件正截面设计	(174)
(3)	7.2 圆形截面钢筋混凝土偏心受压构件截面设计	(193)
(4)	8 截面几何特性的计算	(202)
(11)	8.1 梯形分块法	(202)
(12)	8.2 三角形分块法	(206)
(13)	8.3 积分法	(208)
(14)	9 桥梁计算示例	(212)
(15)	9.1 连续梁桥	(212)
(16)	9.2 斜拉桥	(219)
(17)	附录 I 结构网格图绘制程序	(233)
(18)	附录 II 一般曲线绘制程序	(236)
(19)	附录 III 子(主)程序索引	(238)
(20)	参考文献	(240)

CONTENTS

	Load combination	(168)
	6.1 Calculating formulae	(168)
	6.2 Program design	(169)
	7 Section design of reinforced concrete members	(174)
1	Matrix calculating and linear equation set solving	(1)
1.1	Matrix calculating	(2)
1.2	Solving of real three diagonal linear equation set using chasing method	(3)
1.3	Gaussian elimination and equal band width method of matrix storage	(5)
1.4	Square root algorithm, Cholesky method and matrix storage using one dimension compression method	(11)
1.5	Iteration solving of real linear equation set	(21)
2	Interpolation method	(26)
2.1	Linear interpolation	(26)
2.2	Parabola interpolation	(27)
2.3	Spline function interpolation	(29)
2.4	Interpolation densification for any curves	(32)
3	Program for static analysis of member structures	(36)
3.1	Program for simple plane rigid frame	(36)
3.2	Member element with two rigid arms	(50)
3.3	Forming of total stiffness matrix	(55)
3.4	Dealing with middle hinges	(59)
3.5	Non-joint load, cable tensing, element removing and prestressing calculation	(62)
3.6	Calculation of support displacement and support reaction	(71)
3.7	Influence line calculation	(76)
3.8	Utilization of structure symmetry	(79)
3.9	General purpose program for static analysis of plane member structures	(82)
3.10	Space member structures	(100)
3.11	Program design for construction process calculation	(105)
4	Calculation of load lateral distribution influence line for beam bridges	(115)
4.1	Articulated plate (beam) method	(115)
4.2	Quasi-orthotropic slab method	(122)
5	Loading on influence line	(129)
5.1	Loading on longitudinal internal force influence line of simple-supported beam	(129)
5.2	Loading on general longitudinal influence line	(139)
5.3	Loading on transverse influence line	(159)

CONTENTS

6	Load combination	(168)
6.1	Calculating formulae	(168)
6.2	Program design	(169)
7	Section design of reinforced concrete members	(174)
(1)	7.1 Normal section design of RC unidirectional members in bending	(174)
(5)	7.2 Circular section design of RC eccentric compression members	(193)
8	Calculation of section geometric features	(202)
(2)	8.1 Trapezoidal mesh method	(202)
	8.2 Triangular mesh method	(206)
(11)	8.3 Integration method	(208)
9	Bridge analysis examples	(212)
(26)	9.1 Continuous beam bridge	(212)
(26)	9.2 Cable-stayed bridge	(219)
	Appendix I Program of structure mesh graph	(233)
	Appendix II Program of general curve drawing	(236)
	Appendix III Sub (main) program index table	(238)
	References	(240)
(36)	3.1 Program for simple plane rigid frame	(36)
(50)	3.2 Member element with two rigid arms	(50)
(53)	3.3 Forming of total stiffness matrix	(53)
(59)	3.4 Dealing with middle hinges	(59)
(62)	3.5 Non-joint load, cable tensing element removing and prestressing calculation	(62)
(71)	3.6 Calculation of support displacement and support reaction	(71)
(76)	3.7 Influence line calculation	(76)
(79)	3.8 Utilization of structure symmetry	(79)
(82)	3.9 General purpose program for static analysis of plane member structures	(82)
(100)	3.10 Space member structures	(100)
(103)	3.11 Program design for construction process calculation	(103)
(112)	4 Calculation of load lateral distribution influence line for beam bridges	(112)
(112)	4.1 Articulated plate (beam) method	(112)
(122)	4.2 Quasi-orthotropic slab method	(122)
(129)	5 Loading on influence line	(129)
(129)	5.1 Loading on longitudinal internal force influence line of simple-supported beam	(129)
(139)	5.2 Loading on general longitudinal influence line	(139)
(139)	5.3 Loading on transverse influence line	(139)

1 矩阵运算和线性方程组求解

微分方程的差分法, 结构力学和连续体力学中的有限元方法, 样条函数及边界元方法, 最终归结于线性代数方程组的求解。即求:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

的解 x_1, x_2, \dots, x_n 的值。上面的方程组如用矩阵的简写形式表示, 则为:

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

在结构力学的矩阵位移法中, 系数矩阵 $[A]$ 通常称为结构总体刚度矩阵 (或简称总刚); $\{B\}$ 称为荷载列阵或称为右端项; 未知量列阵 $\{X\}$ 称为结点位移列阵。线性方程组有解而且有唯一解的充要条件是它的系数所组成的行列式 D 不为零。根据 Cramer 规则, 它的解可表示为两个行列式之比。即:

$$x_i = D_i / D, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

式中 D_i 为将 D 中的第 i 列用上述方程组右端项代替所组成的行列式。按定义把行列式展开进行计算, 求解线性方程组的解就要做 $N = (n+1)(n-1)n! + n$ 次乘法, 当 n 比较大时, 工作量就会大得惊人。例如 $n=20$, 则 $N \approx 9.7073 \times 10^{20}$ 。此外, 因多个数连乘造成溢出停机而无法继续进行; 或者由于实际计算不可能绝对精确致使计算结果与真正的精确结果相差很远而无意义。因此, 这个在理论上尽管是完善的结果, 但在实际计算中可以说没有什么用处。本章将介绍能够解含很多未知数的线性方程组的有效数值方法。

求解线性代数方程组的数值方法很多, 但归纳起来可以分为两类:

(1) 直接法。是指这样一种方法, 它只包含有限次四则运算, 并且在每一步运算过程中都不发生舍入误差的假定下, 计算的结果就是原方程组的解。最常用的一种直接法是消去法。

(2) 迭代法。它把方程组的解看作是某种极限过程的极限, 而实现这一极限过程每一步的结果是把前一步所得的结果施行相同的演算步骤得到的。我们决不可能把极限过程进行到底, 而只不过把迭代进行有限多次, 使迭代若干次所得的结果达到一定的精确程度。

衡量一个求解线性方程组的数值方法是否良好的主要标准有:

(1) 算出的解近似于真解的程度高;

(2) 计算时间少;

(3) 在计算机中占用的存贮单元少。

可是这些要求往往是相互矛盾的。更值得注意的是, 评价一个方法还须就所求解的线性方程组的系数方阵来考虑, 系数方阵的主要特征是看它是否稀疏 (绝大多数元素是零), 是否成带状 (非零元素集中在主对角线附近的一条带上), 是否对称正定。此外, 还会涉及对角占优矩阵的概念。

1.1 矩阵运算

在这节中,介绍几个常用的矩阵运算子程序:矩阵转置;矩阵乘法;置对称矩阵元素;求矩阵的行(列)极大元素;矩阵元素置零。

1.1.1 矩阵转置

设有 M 行 N 列的实矩阵 $[A]$, 本子程序是求 $[A]$ 的转置矩阵并将其存放在 $[B]$ 的存储区内。

```

SUBROUTINE MATTRA (M, N, A, B)
  DIMENSION A (M, N), B (N, M)
  DO 100 I=1, M
  DO 100 J=1, N
100  B (J, I)=A (I, J)
  END
  
```

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1.2 矩阵乘法

设有 M 行 N 列的实矩阵 $[A]$, 与 N 行 L 列的实矩阵 $[B]$ 相乘, 求矩阵 $[C]=[A][B]$, $[C]$ 是 M 行 L 列的矩阵, 其元素

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}$$

式中: $i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, L$ 。

```

SUBROUTINE MATMUL (M, N, L, A, B, C)
  DIMENSION A (M, N), B (N, L), C (M, L)
  DO 100 I=1, M
  DO 100 J=1, L
  C (I, J)=0.0
  DO 100 K=1, N
100  C (I, J)=C (I, J)+A (I, K)*B (K, J)
  END
  
```

1.1.3 置对称矩阵元素

在结构力学和连续体力学的有限元方法中,经常碰到的单元刚度矩阵或质量矩阵是对称矩阵,我们只需形成该矩阵主对角线上及其以上的元素,然后利用本过程给主对角线以下的元素计值。如果采用紧缩存储,对于 N 阶对称矩阵,只需要 $N(N+1)/2$ 个存储单元。

```

SUBROUTINE SYM (N, A)
  DIMENSION A (N, N)
  DO 100 I=1, N-1
  DO 100 J=I+1, N
100  A (J, I)=A (I, J)
  END
  
```

1.1.4 求矩阵的行极大元素

设有 M 行 N 列的实矩阵 $[S]$, 按模(绝对值)选取矩阵每行的最大元素,并顺序存放在 P 的存储区内。设 $S(M, N)$ 为已知实矩阵, $P(M)$ 为一维数组,子程序如下:

```

SUBROUTINE CHOOS1 (M, N, S, P)
  DIMENSION S (M, N), P (M)
  DO 100 I=1, M
  P (I)=0.0
  DO 100 J=1, N
  IF (ABS (S (I, J)).GT. ABS (P (I))) P (I)=S (I, J)
  
```

100 CONTINUE
END

同样,上述过程稍作修改,可以编出求矩阵的列极大元素或求整个矩阵的极大元素的子程序。

1.1.5 矩阵元素置零

在矩阵运算中,往往需要先将矩阵的各元素赋初值(零),下面是有关的子程序。

```
SUBROUTINE CLEAR(M, N, A)
DIMENSION A(M, N)
DO 100 I=1, M
DO 100 J=1, N
100 A(I, J)=0.0
END
```

在这里,顺便说明一下,在编制应用程序时,可以直接把该子程序的有关语句,编入应用程序中,避免调用子程序,将会使程序的执行快些。

1.2 用追赶法求实三对角线性方程组的解

在下一章讨论样条插值时,我们会碰到实三对角线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & a_k & b_k & c_k & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_n & b_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

我们先将式(1-1)中第1个方程变为:

$$x_1 + r_1 x_2 = y_1 \quad (1-2)$$

式中: $r_1 = c_1/b_1, y_1 = d_1/b_1$ 。

注意到剩下的方程中只有第2个方程含有变元 x_1 , 因此与式(1-2)结合,消去 x_1 得:

$$(b_2 - r_1 a_2) x_2 + c_2 x_3 = d_2 - a_2 d_1 / b_1$$

即有: $x_2 + r_2 x_3 = y_2$ 。

式中:

$$r_2 = \frac{c_2}{b_2 - r_1 a_2}, y_2 = \frac{d_2 - y_1 a_2}{b_2 - r_1 a_2}$$

这样顺序加工式(1-1)中的每一个方程,设第 $k-1$ 个方程已经变为:

$$x_{k-1} + r_{k-1} x_k = y_{k-1}$$

利用它再从式(1-1)中第 k 个方程中消去 x_{k-1} 得:

$$(b_k - r_{k-1} a_k) x_k + c_k x_{k+1} = d_k - a_k y_{k-1}$$

即有: $x_k + r_k x_{k+1} = y_k$ 。

式中:

$$r_k = \frac{c_k}{b_k - r_{k-1} a_k}, y_k = \frac{d_k - y_{k-1} a_k}{b_k - r_{k-1} a_k} \quad (1-3)$$

做 $n-1$ 步以后,便得到: $x_{n-1} + r_{n-1} x_n = y_{n-1}$ 。

它与式(1-1)中第 n 个方程联立, 即可解出:

$$x_n = y_n$$

式中:

$$y_n = \frac{d_n - y_{n-1}a_n}{b_n - r_{n-1}a_n} \quad (1-4)$$

于是通过消元过程, 方程组(1-1)可归结为更为简单的形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & \\ & 1 & r_2 & 0 & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & 1 & r_{n-1} & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

对加工得到的方程组(1-5)自下而上逐步回代, 即可依次求出 x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 , 计算公式为:

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_k = y_k - r_k x_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases}$$

上述算法就是追赶法, 它的消元过程与回代过程分别称作追的过程与赶的过程。追赶法抓住了方程组(1-1)的具体特点, 将系数矩阵中的零元素撇开, 这样大大地节省了计算量和存储量, 从而提高了算法的有效性。

我们估计追赶法的计算工作量。估计算法的工作量时, 一般忽略执行加减运算和逻辑操作的执行时间, 只考虑完成算法所需的乘除法次数。追赶法所需的乘除法次数为:

$$N = 2 + 4(n-2) + 3 + (n-1) = 5n - 4$$

式中 n 为方程组的阶数。注意: 这里 n 必须大于 2, 否则就不能用此程序求解。

追赶法的 FORTRAN 子程序如下:

```

SUBROUTINE TRD(N, A, B, C, D)
  DIMENSION A(N), B(N), C(N), D(N)
  C(N) 系数矩阵的阶
  A(N) 存入系数矩阵的元素  $a_2, a_3, \dots, a_n$ , 第一个为空位
  B(N) 存入  $b_1, b_2, \dots, b_n$ 
  C(N)  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , 中间结果为  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ ,
  最后一个为空位
  D(N) 存入方程组自由项  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ,
  中间结果为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 最后为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 
  IF(N.LE.2) STOP 'N.LE.2 error'
  C(1)=C(1)/B(1)
  D(1)=D(1)/B(1)
  DO 10 K=2, N-1
    DD=B(K)-A(K)*C(K-1)
    C(K)=C(K)/DD
  10 D(K)=(D(K)-A(K)*D(K-1))/DD
  D(N)=(D(N)-A(N)*D(N-1))/(B(N)-A(N)*C(N-1))
  DO 20 K=N-1, 1, -1
  20 D(K)=D(K)-C(K)*D(K+1)
  END
  
```


1.3 高斯消去法以及矩阵的等带宽存贮

1.3.1 高斯消去法

高斯消去法是将系数矩阵化成一个上三角矩阵(即消元过程),然后从下而上回代求出未知量。

首先,我们考察一个例子。

求下列方程组的解:

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 4 & (1) \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 1 & (2) \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

消元第一步:

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 4 & (1) \text{ 不变(轴行)} \\ 0X_1 + 2X_2 + X_3 = -1 & (2)^1 = (2) - (1) \times 2/4 \\ 0X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 4 & (3)^1 = (3) - (1) \times (-4)/4 \end{cases}$$

消元第二步:

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 4 & (1) \text{ 不变} \\ 0X_1 + 2X_2 + X_3 = -1 & (2)^1 \text{ 不变(轴行)} \\ 0X_1 + 0X_2 - 6.5X_3 = 5.5 & (3)^2 = (3)^1 - (2)^1 \times 3/2 \end{cases}$$

回代求解 X_3, X_2, X_1 :

由 $(3)^2$ 得 $X_3 = 5.5 / (-6.5)$

由 $(2)^1$ 得 $X_2 = (-1 - 3X_3) / 2$

由 (1) 得 $X_1 = [4 - 2X_2 - (-4)X_3] / 4$

对于一般情形,设方程组 $[A]\{X\} = \{B\}$ 的阶数为 N , 则共需进行 $N-1$ 轮消元。在进行第 M 轮消元时,系数矩阵的计算在图 1-1 中阴影部分的子方阵内进行,轴行为第 M 行,消元各行为第 $M+1$ 行至第 N 行。以其中第 I 行为例,新的 I 行是将上一轮的 I 行减去 M 行(轴行)乘以 $A(I, M) / A(M, M)$ 而得到,即:

$$\text{新}I\text{行} = \text{上轮}I\text{行} - M\text{行} \frac{A(I, M)}{A(M, M)}$$

在新 I 行中,除第 M 列的元素将变成零外,还需要计算第 $M+1$ 列至第 N 列的各元素,以其中第 J 列的元素 $A(I, J)$ 为例,其计算式为:

$$\text{新}A(I, J) = \text{上轮} \left[A(I, J) - A(M, J) \frac{A(I, M)}{A(M, M)} \right] \quad (1-6)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N-1$; $I = M+1, M+2, \dots, N$; $J = M+1, M+2, \dots, N$ 。

同理, I 行右端项 $B(I)$ 的计算式为:

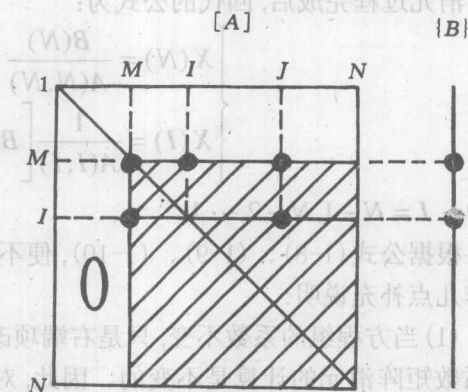


图 1-1 高斯消去法消元示意图

$$\text{新}B(I) = \text{上轮} \left[B(I) - B(M) \frac{A(I, M)}{A(M, M)} \right] \quad (1-7)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N-1$; $I = M+1, M+2, \dots, N$ 。

以上两式是一般方程组的消元公式, 对于方程组的系数矩阵为对称方阵且只存放有上三角部分元素的情况, 上述公式还应作相应的改动。

首先, 系数矩阵对称时, 每一轮消元后所剩余的子方阵仍然是对称的。这可证明如下: 在式(1-6)中, 若 I, J 对换, 则当上一轮子方阵对称时, 等式右边值不变, 因而左边亦不变, 故新的子方阵亦对称。若方程组最初的系数矩阵对称, 则由此递推知各轮剩余子方阵均对称, 这就用数学归纳法证明了上述结论。

既然各轮剩余子方阵都是对称的, 在整个消元过程中就可以只计算上三角部分的元素。因此, 在对第 I 行进行消元时, 只需计算第 I 行至第 N 列的元素。

此外, 式中 $A(I, M)$ 是下三角部分的元素, 应改用其对称位置上的上三角部分的元素 $A(M, I)$ 来代替。

式(1-6)、(1-7)经上述两点改动后, 就成为对称方程组的消元公式:

$$\text{新}A(I, J) = \text{上轮} \left[A(I, J) - A(M, J) \frac{A(M, I)}{A(M, M)} \right] \quad (1-8)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N-1$; $I = M+1, M+2, \dots, N$; $J = I, I+1, \dots, N$ 。

$$\text{新}B(I) = \text{上轮} \left[B(I) - B(M) \frac{A(M, I)}{A(M, M)} \right] \quad (1-9)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N-1$; $I = M+1, M+2, \dots, N$ 。

消元过程完成后, 回代的公式为:

$$\begin{cases} X(N) = \frac{B(N)}{A(N, N)} \\ X(I) = \frac{1}{A(I, I)} \left[B(I) - \sum_{J=I+1}^N A(I, J) X(J) \right] \end{cases} \quad (1-10)$$

式中: $I = N-1, N-2, \dots, 1$ 。

根据公式(1-8)、(1-9)、(1-10), 便不难写出相应的程序段, 详见源程序, 无需赘述, 在此仅作几点补充说明:

(1) 当方程组的系数不变, 只是右端项改变时, 由上可知, 只是右端消元和回代的计算改变, 而系数矩阵消元的计算是不变的。因此, 对于同一结构承受多组不同荷载作用(多种工况)的情形, 其总刚消元都是一样的, 可以只算一次, 只是荷载列阵消元和回代需要分别计算。所以在源程序中, 总刚消元只进行一次, 而荷载列阵消元和回代则放到按荷载循环的循环体中。

(2) 为了减少计算次数(尤其是除法), 应将循环体内不变化的重复计算, 提到循环体外进行。式(1-8)中的 $A(M, I)/A(M, M)$ 是与 J 无关的, 在程序中令其为 $C1$, 提到按 J 循环的循环体外计算。同理, 式(1-9)中的 $B(M)/A(M, M)$ 与 I 无关, 在程序中令其为 $C2$, 提到按 I 循环的循环体外计算。

(3) 回代时, 在每求出一个未知量 $X(I)$ ($I = N, N-1, \dots, 1$) 之后, 其右端项 $B(I)$ 便再不到了, 没有必要继续保留。因此原来存放 $B(I)$ 的单元, 此时又可用来存放 $X(I)$, 以便节省存贮单元。注意此时数组 B 并未改名, 但它代表的已不是右端项而是解出的未知量即结点位移了。

```

SUBROUTINE GASS(N, A, B)
DIMENSION A(N, N), B(N)
C 系数矩阵消元
DO 40 M=1, N-1
    DO 30 I=M+1, N
        C1=A(M, I)/A(M, M)
        DO 20 J=I, N
            A(I, J)=A(I, J)-A(M, J)*C1
        CONTINUE
    CONTINUE
30 CONTINUE
40 CONTINUE
C 右端项消元
DO 60 M=1, N-1
    C2=B(M)/A(M, M)
    DO 50 I=M+1, N
        B(I)=B(I)-A(M, I)*C2
    CONTINUE
60 CONTINUE
C 回代求结点位移
B(N)=B(N)/A(N, N)
DO 80 I=N-1, 1, -1
    DO 70 J=I+1, N
        B(I)=B(I)-A(I, J)*B(J)
    CONTINUE
    B(I)=B(I)/A(I, I)
80 CONTINUE
END

```

例 1-1 解下面的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了调用 GASS 子程序, 需写一段主程序:

```

DIMENSION A(4, 4), B(4)
READ(*, *) ((A(I, J), J=1, 4), I=1, 4)
READ(*, *) (B(I), I=1, 4)
CALL GASS(4, A, B)
WRITE(*, '(4F10.3)') (B(I), I=1, 4)
END

```

将上面的主程序和 GASS 子程序的源程序用任何一种编辑系统(如 EDIT)键入一个文件中, 如该文件取名为 C1-3-1.FOR, 用 FORTRAN 编译系统对 C1-3-1.FOR 进行编译和连接后将产生一个名为 C1-3-1.EXE 的执行文件, 键入 C1-3-1 即执行 C1-3-1.FOR 的内容, 这时从键盘输入数据:

2, 1, -1, 1, 3, 0, -2, 4, 2, 5 [回车]

8, 9, -5, 0 [回车]

输出结果:

9.182 -2.909 3.182 -4.273

以上是最简单的高斯消去法程序。为了提高计算精度以及避免消元过程中有时因主对角元为零而造成溢出停机, 我们选择绝对值最大的元素放在待消元那一行(轴行)的主对角元位置上, 这种方法称为主元素消去法。在主元素消去法中又有行选主元、列选主元或全主元的

消去法。在一般的桥梁结构分析中，刚度矩阵的主对角线元素均大于零，且其值是相对较大的，故一般可不用主元素消去法。主元素消去法的现成程序很多，读者如需用，可在许多参考书中找到，这里不多赘述。

1.3.2 等带宽高斯消去法

当系数矩阵 $[A]$ 为一对称带状矩阵时，则 $[A]$ 中除了主对角线附近一定带宽内有非零元素外，其余各处均为零元素。因此，为了节省内存，可采用等带宽存贮 $[A]$ ，即只需将满阵 $[A]_{N \times N}$ 中(图 1-2a)上三角部分斜带内的元素存入一个竖带即矩阵 $[A]_{N \times ND}$ 中(如图 1-2b 所示)。如前所述，当采用高斯消去法时，由于 $[A]$ 的对称性，下三角斜带内的元素也不必存贮。这里 ND 为半带宽加 1。

这样改换之后，元素的排列方式将随之改变，例如：

在满阵中 在等带宽存贮中

$$\begin{array}{l} A(I, I) \\ A(I, J) \\ A(I, I + ND - 1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A(I, I) \\ A(I, J - I + 1) \\ A(I, ND) \end{array}$$

可以看出，元素的行号不变，而列号需要改变：

$$\text{新列号} = \text{原列号} - \text{行号} + 1$$

同时，在等带宽存贮中虚线部分(图 1-2b)的元素由于在满阵中没有元素对应，故没有用。

在第 M 轮消元时， M 行为轴行，由于轴行在带宽以外的元素都是零，故消元计算只需在图 1-3(a)中有阴影线的三角形范围内进行。因此，需消元的最大行号为 $I_{\max} = M + ND - 1$ ，

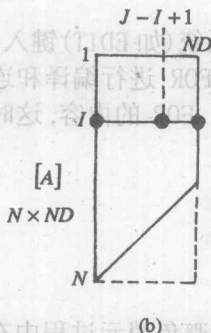
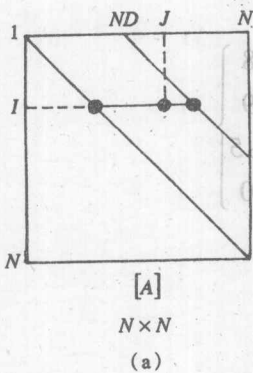


图 1-2 矩阵等带宽存贮示意图

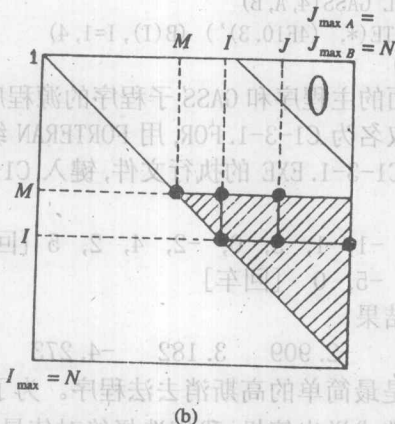
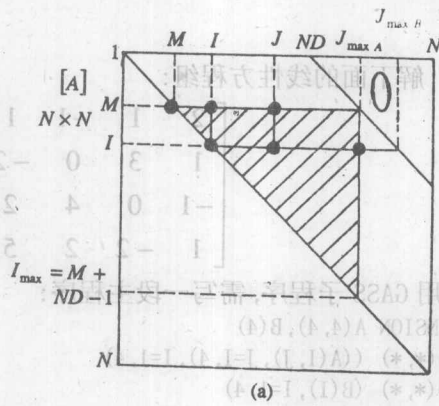


图 1-3 等带宽消元范围示意图

同时, 在第 I 行中, 需要计算的元素也只是在阴影线范围内的元素, 列号是从第 I 列起到第 $J_{\max A}$ 列为止, 这里 $J_{\max A} = M + ND - 1$ 。当轴行号 M 较大 ($M + ND - 1 > N$) 时 (见图 1-3b), $I_{\max} = N, J_{\max A} = N$ 。故有:

$$I_{\max} = J_{\max A} = \text{MIN}(M + ND - 1, N)$$

回代计算时, 当计算 $X(I)$ 时, 最大列号为 $J_{\max B} = I + ND - 1$ (图 1-3a), 当 $J_{\max B} > N$ 时, 取 $J_{\max B} = N$ (图 1-3b), 故有 $J_{\max B} = \text{MIN}(I + ND - 1, N)$ 。

至此, 我们可以写出当 $[A]$ 采用等带宽存贮时, 高斯消去法的公式 (1-8) 至 (1-10) 的调整形式:

$$\text{新}A(I, J - I + 1) = \text{上轮} \left[A(I, J - I + 1) - A(M, J - M + 1) \frac{A(M, I - M + 1)}{A(M, 1)} \right] \quad (1-11)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N - 1; I = M + 1, M + 2, \dots, I_{\max}; J = I, I + 1, \dots, J_{\max A}$ 。

$$\text{新}B(I) = \text{上轮} \left[B(I) - B(M) \frac{A(M, I - M + 1)}{A(M, 1)} \right] \quad (1-12)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N - 1; I = M + 1, M + 2, \dots, I_{\max A}$ 。

$$\begin{cases} X(N) = \frac{B(N)}{A(N, 1)} \\ X(I) = \frac{1}{A(I, 1)} \left\{ B(I) - \sum_{J=I+1}^{J_{\max B}} [A(I, J - I + 1) \cdot X(J)] \right\} \end{cases} \quad (1-13)$$

式中: $I = N - 1, N - 2, \dots, 1$ 。

为了计算方便, 在式 (1-11) 至式 (1-13) 中, 令 $J - I + 1 = J'$, 则:

$$J = J' + I - 1$$

$$J = I, I + 1, \dots, J_{\max A} \text{ 改变为 } J' = 1, 2, \dots, J'_{\max A}$$

$$J = I + 1 \sim J_{\max B} \text{ 改变为 } J' = 2 \sim J'_{\max B}$$

其中 $J'_{\max A} = J_{\max A} - I + 1; J'_{\max B} = J_{\max B} - I + 1$ 。

式 (1-11) 至式 (1-13) 可写成如下的形式。

系数矩阵消元公式:

$$\text{新}A(I, J') = \text{上轮} \left[A(I, J') - A(M, J' + I - M) \frac{A(M, I - M + 1)}{A(M, 1)} \right] \quad (1-14)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N - 1; I = M + 1, M + 2, \dots, I_{\max}; J' = 1, 2, \dots, J'_{\max A}$ 。

右端项消元公式:

$$\text{新}B(I) = \text{上轮} \left[B(I) - B(M) \frac{A(M, I - M + 1)}{A(M, 1)} \right] \quad (1-15)$$

式中: $M = 1, 2, \dots, N - 1; I = M + 1, M + 2, \dots, I_{\max}$ 。

回代公式:

$$\begin{cases} X(N) = \frac{B(N)}{A(N, 1)} \\ X(I) = \frac{1}{A(I, 1)} \left\{ B(I) - \sum_{J'=2}^{J'_{\max B}} [A(I, J') \cdot X(J' + I - 1)] \right\} \end{cases} \quad (1-16)$$

式中: $I = N - 1, N - 2, \dots, 1$ 。

系数矩阵消元的子程序为: