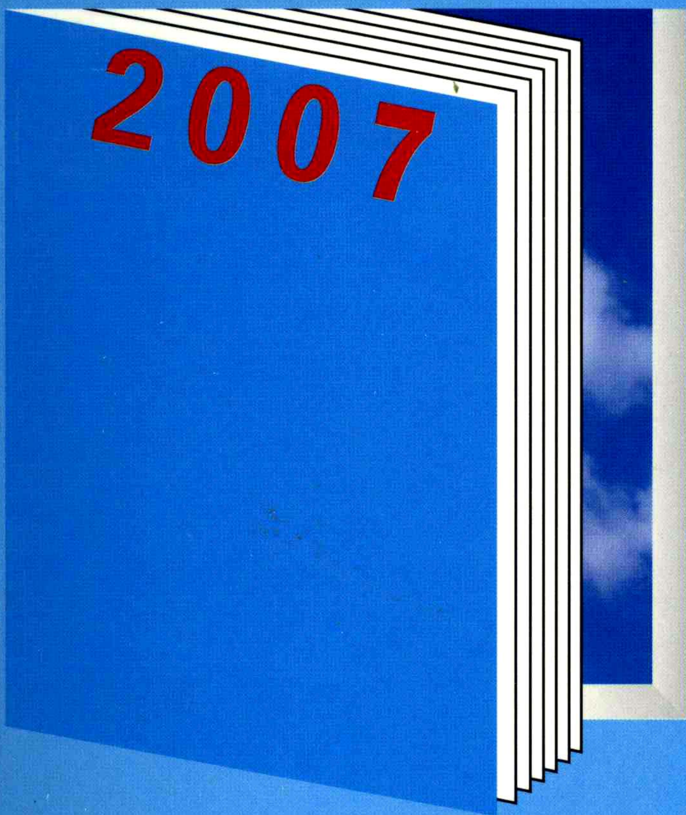
世纪ONE 高教版

全国考研数学真题第一书



历年考研数学（数学一）真题解析及复习思路

主编 北京大学 陈　勇 教授
清华大学 何志强 教授
中国科学院 米雁辉 博士

赠10年真题

新华出版社

历年考研数学真题解析及复习思路

（数学一）

主编　北 京 大 学　陈　勇 教授
清 华 大 学　何志强 教授
中国科学院　米雁辉 博士

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题解析及复习思路(数学一)/陈勇　何志强　米雁辉　编著.
—北京:新华出版社,2005.4
ISBN 7-5011-7043-6

Ⅰ.历...
Ⅱ.①陈...②何...③米...
Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026683 号

总 策 划　张剑锋
责任编辑　何　云
封面设计　李继斌

历年考研数学真题解析及复习思路(数学一)
陈勇　何志强　米雁辉　编著

出版发行:新华出版社	新华出版社网址:www.xinhuapub.com
地　　址:北京市石景山区京原路 8 号	高教考研人网址:www.kaoyanren.com
邮　　编:100043	世纪高教发行部:010-82627540
经　　销:新华书店	邮 购 部:010-62534421
印　　刷:煤炭工业出版社印刷厂	编 辑 部:010-83348225
开　　本:787×1092 毫米 1/16	字　　数:400 千字
印　　张:16	ISBN 7-5011-7043-6
版　　次:2006 年 3 月第 1 版	定　　价:25.00 元
印　　次:2006 年 3 月第 1 次印刷	

再版前言

《历年数学真题解析及复习思路（数学一）》是考研命题权威书系中的一本，该系列丛书是由曾多年参加研究生考试大纲修订和命题的专家，为便于参加2006年研究生入学考试的广大莘莘学子对考试大纲规定的考试内容和考试要求进行全面、准确地理解而精心设计之作。该系列丛书内容精心设计，预见性极强，既体现了考生复习的阶段性特征，同时又鲜明地突出了考生能力结构提升的层次性。

（一）本书在结构框架和试题编排方面，其主要特点如下：

本书对1987～2006年的全部数学试题根据《数学考试大纲（数学一）》的考查要求按照学科进行了科学地编排，并对试题进行了详细地解析。在编排顺序上，我们把相同或相近知识点列在一块进行解析，这样做除了便于进行比较分析外，更重要的是提供给考生一个重要的信息，即：相同或相近的知识点，相隔多少年会重新进行命题以及考查的知识点和题型的变化情况，以增强考生对命题基本规律的感性认识。关于试题重复命题的问题，需要说明的是，不仅在当年的理工科数学一和数学二之间使用相同试题，而且相隔多年后，一些理工科试题也被用作经济类试题。因此，经济类考生在分析历年试题时，可适当做一些理工类试题。

（二）本书在试题解析方面，其主要特点如下：

（1）依据《数学考试大纲》的章节，按试题考查的知识点分章，并对一些跨章节的、综合性较强的试题进行了科学的编排和处理。同时在每一章节加写了内容提要，对本章考查的大纲知识点进行了提纲挈领的分析。

（2）对每一道试题我们都进行了详细地分析和注释，并给出了命题和解题思路。在“分析”部分，主要分析试题的解题思路和解题方法，以期加强对考生的数学思维能力的培养，提高考生的破题能力；在“解析”部分则对试题进行详细的解析，给出了试题的解题步骤和详细答案，同时，为进一步拓宽考生的思维视野，我们在解析时尽可能地给出了多种解题思路或方法，以便使考生能够举一反三，触类旁通；在“注释”部分则针对历年考生在答卷中的典型错误进行了分析，同时对试题命制的思路、同类试题的解题方法、所考查知识点进行了归纳和总结；在“复习思路”部分，我们对考查的知识点进行了进一步的归纳和总结，并对该知识点的命题特点和趋势进行了分析。

（三）本书适合的报考专业：

（1）工学门类的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等一级学科中所有的二级学科、专业。

（2）工学门类的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

（3）管理学门类中的管理科学与工程一级学科。

（四）如何使用本书，我们的建议：

（1）建议考生参照《数学考试大纲（数学一）》的考查知识点，结合教材《高等数学》（高教同济五版）、《线性代数》（高教同济四版）、《概率论与数理统计》（高教浙大三版）进行第一轮的复习。为了使复习具有针对性，考生可在这一阶段结合教材的复习进度使用本书，从本书的第二部分开始阅读。这一阶段的阅读主要是使考生明了教材的内容与考试试题的吻合度。这时候，考生首先要自己思考题目，如果不会可参考“分析”再做，如果还是不会再看答案，最后再认真地思考本题，参照“注”对题目进行归纳和总结，不能就题做题，要通过考题发现一些规律性的东西，这样才能取得最好的效果。

（2）在完成第一轮复习后，考生需要尝试做一些套题。每一年的试题就知识点而言，既具有分散性，同时又具有综合性。做套题的目的就是要使考生熟悉考研试题并进行自我检测。考生在做题时不要着急看答案，一定要把整个一套试题做完后再看。在看答案时，要将自己的解题思路与本书的分析进行对比，找差距，找不足。

（3）在复习的第三阶段使用本书，主要结合《数学考试大纲》知识点，重点分析历年试题的命制情况，从中发现和总结知识点命题的特点和规律。这一阶段，要认真阅读本书的试题“注释”部分和“复习思路”部分。通过使用本书，考生会看到每一部分都考过什么内容，如何考查，考试的重点和热点是什么，以便在复习时真正做到心中有数，有的放矢。对历年真题，我们建议大家最少要做2—3遍，做到看到题目就会解答的程度。

（4）为便于考生系统地了解历年试题的情况，我们汇编了1987～2006年的全部数学试题，并将这些试题单独装订成册，作为赠书。这些试题凝聚了近20年来参加命题的专家、教授的集体智慧，是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求，又充分地体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则，而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点。

由于时间仓促和其他方面的原因，本书难免有不足之处，敬请广大读者和专家同行批评指正，以便再次修订时更臻于完善。

最后，预祝广大考生考研成功！

编者
2006年3月

目　　录

PART Ⅰ　高等数学

如何进行数学备考

硕士研究生入学数学考试历来是考生头疼的问题，数学试卷具有内容多知识面宽、综合性和技巧性较强的特点，如果不能掌握正确的复习方法，势必难以取得好的成绩，从而失去深造的机会. 在这里，我们结合高分考生的经验，给大家几点建议.

1. 周密可行的复习计划.

数学的学科特点决定了学好数学是一个长期的过程，任何投机取巧、临时抱佛脚的做法都是愚蠢的. 考生需要制定一个周密可行的计划并按照计划循序渐进. 一般来说，数学复习可分为四个阶段：第一个阶段一般在六月前，要按照考试大纲的要求对大纲范围内的基础知识进行系统的复习；第二个阶段一般从七月到十月，要做一定数量的题，尤其是历年真题，解决解题思路的问题；第三个阶段一般从十一月到十二月中旬，进行实战训练，做模拟题；第四个阶段一般从十二月下旬到考试，进行最后的查漏补缺工作，并调整好状态迎接考试.

2. 吃透考试大纲.

《考试大纲》是考试的纲领性文件，对考试内容、考试要求、试卷结构等都做出了明确的阐述，是命题的依据，也是广大考生备考的依据. 考生应熟悉大纲，了解考试的基本内容重点和难点，参照大纲进行全面复习，与大纲无关的内容坚决不看. 同时要注意，考纲新出现的知识点一般是命题的重点，近几年考试中重复出现的内容是考试的热点.

3. 重视基础.

数学是一门演绎的科学，如果基础不牢，所谓的技巧和方法就成了无本之木，无源之水. 而且考研数学题目中的难题最终也是从基本概念基础上延伸而来，并无偏题和怪题. 要打好基础，就要牢固记忆和理解所有的概念定理和公式，并作大量的基础练

习，在不断的练习过程中加深对概念的理解.

4. 重视真题.

如前言所述，真题是我们可以利用的宝贵资料. 要充分利用真题来进行自我测试，启发解题思路，对真题要反复的做，不断的思考，从中获取更多的营养.

5. 勤学苦练.

有些考生在复习的时候认为有些内容比较简单，以为只看看就可以了，但具体做的时候就会出现问题，这就是"眼高手低"，克服的方法就是要勤于动手.

6. 调整好心态.

考研是一个漫长的过程，也是对考生意志力的考验. 在这个过程中，不免会出现由于各种原因而气馁的情况，调整自己的心态就显得尤为重要. 建议大家在复习的时候要多和考友交流，互相鼓励，或者在一些考研网站看看考研网友的文章.

总之，复习方法因人而异，但通往成功的道路没有任何捷径可言，"宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来". 祝大家考研成功！

附： 97—06 **年高等数学各章分值分布**

内容 分值 年份	函数极限连续	一元函数微分学	一元函数积分学	向量代数与空间解析几何	多元函数微分学	多元函数积分学	级数	常微分方程
97	6	3	12	6	10	10	8	5
98	9	9	3	5	3	16	5	9
99	3	9	6		5	12	10	9
00	5	9	3	3	5	23	9	3
01		13	6		12	18	8	3
02	6	6	10		10	15	10	3
03	8	4	20	4	4	22	16	12
04	4	20	8		12	12	15	15
05		20	15		12	27	12	4
06	16	4			14	30	16	10
合计	57	97	83	21	87	185	109	73

第一章　函数、极限、连续

"函数、极限、连续"这一部分的概念及运算，是高等数学的基础．

函数是高等数学研究的主要对象．事实上，全部微积分主要就是讨论各类函数的各种性质．极限不仅是一个主要的基本概念，而且它的思想和方法贯彻于微积分的始终．连续是一大类函数的重要特性，连续函数是微积分研究的重点．因此，考生在这一部分的复习目标是：

理解函数的概念，会进行函数记号的运算，并会建立简单应用问题中的函数关系式；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形．

理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．

理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）；会判断函数间断点的类型；了解连续函数性质和初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质．

一、函数概念与复合函数

1. (88) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域．

分析　解出 $\varphi(x)$，然后确定其定义域．

解　由题设 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$．

由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 知 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，故 $\varphi(x)$ 定义域为 $(-\infty,0]$．

注　要熟记常见简单函数的定义域，如 $y=\log_a x$，$(0,\infty)$；$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$[-1,1]$ 等．已知 $f(x)$ 的定义域求 $f(\varphi(x))$ 的定义域一般采用方法：令 $u=\varphi(x)$，由 u 的变化范围解出 x 的变化范围，可得 $f(\varphi(x))$ 的定义域．

已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域，求 $f(x)$ 的定义域一般采用方法：令 $u=\varphi(x)$，由 x 的变化范围解出 u 的变化范围，可得 $f(x)$ 的定义域．

2. (90) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$　则 $f[f(x)]=$ ________．

分析　若从 x 的取值分析，显然略显复杂．注意到 $|f(x)|\leqslant 1$，则易得答案．

解　由题设知：$|f(x)|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $f[f(x)]=1$．

复习思路

1. 求函数的表达式是考研试题的基本题，复合函数是有关函数表达式的重要问题之一．特别要注意分段函数的复合：一般应按照由自变量开始，先内层后外层的自然顺序，逐次复合．同时要注意每经过一次复合后，函数的定义域与函数值之间的关系．关于复合函数的主要题型有：

① 已知 $f(x)$，$g(x)$，求 $f(g(x))$. 对于这类问题，直接进行复合运算即可.

② 已知 $f(x)$，$\varphi(x)$，且 $f(g(x))=\varphi(x)$，求 $g(x)$. 对于这类问题，若 f 反函数存在，则 $g(x)=f^{-1}(\varphi(x))$.

③ 已知 $g(x)$，$\varphi(x)$，且 $f(g(x))=\varphi(x)$，求 $f(x)$. 对于这类问题，若 g 反函数存在，则令 $u=g(x)$，则可求得 $f(u)=\varphi(g^{-1}(u))$，例：已知 $f(x^3)=1-x^5+3\lg^x(x>0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

2. 理解函数概念的一个重要方面是：函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x 只是一个记号，可根据需要随时更换. 如上述的第三种题型，求出 $f(u)$ 关于 u 的表达式后，再用 x 替换 u 即可得到 $f(x)$.

3. 求反函数的方法一般为：

① 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$.

② 置换 x、y，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

③ $y=f(x)$ 的值域就是 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

二、函数的基本性质

1. (99) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是其原函数，则 ( )

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) $f(x)$ 是周期函数，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数，$F(x)$ 必是单调增函数.

分析 本题考查函数的奇偶性、周期性等基本概念. 解本题的关键是明确原函数的概念及变上限积分函数的表示方法.

因为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$，故 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C \xlongequal{u=-t} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C$.

若 $f(x)$ 是奇函数即 $f(-u)=-f(u)$，从而有 $F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$.

因此(A) 成立，对(B)、(C)、(D) 均可用反例排除：令 $f(x)=x^2$，$F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+1$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故(B) 不成立；令 $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x+x+C$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故(C) 不成立；令 $f(x)=x$，$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，故(D) 不成立.

2. (05) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. “$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有 ( )

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

分析 由上题可知 $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow F(x)$ 是偶函数. 反过来，若 $F(x)$ 为偶函数，则有 $F(-x)=F(x)$.

$$\therefore\quad f(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(-x+\Delta x)-F(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x-\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=-F'(x)=-f(x).$$

即 $f(x)$ 为奇函数. 选 A.

注 本题显然为 99 年试题的变形. 启发大家在做真题时要对题目进行认真的分析，而不是单

纯地追求答案. 注意 B 若改为 $F(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(x)$ 是偶函数也是正确的,请大家推导.

复习思路

函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性是函数的几种基本特性,要会讨论这些性质.

1. 函数单调性常利用单调的定义或导数来研究.

2. 周期性的证明,就是寻求 $T\neq 0$,使 $f(x+T)=f(x)$.

3. 奇偶性的判定常从 $f(-x)$ 出发:若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数. 当然,函数是奇(偶)函数首先要保证其定义域关于原点对称.

4. 函数的有界性中,要正确区分无穷大和无界变量,无穷大量一定是无界变量,而无界变量不一定是无穷大量.

三、数列极限

1. (96) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2\cdots)$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限.

解 用数学归纳法证明此数列的单调性,由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4\Rightarrow x_1>x_2$.

假设 $n\in\{1,2,\cdots\}$,有 $x_n>x_{n+1}$,则 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>\sqrt{6+x_{n+1}}=x_{n+2}$.

由数学归纳法知,对一切 $n\in N$ 都有 $x_n>x_{n+1}$. 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

又显然 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,即 $\{x_n\}$ 有下界,由单调有界准则,知 $\{x_n\}$ 存在极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限,有 $A=\sqrt{6+A}\Rightarrow A^2-A-6=0$.

所以 $A=3, A=-2$(舍),即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

注 正确使用极限定义必须正确理解其定义. 举例陈述如下:

下述哪些说法与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义等价,并说明理由.

(1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists N$,当 $n\geqslant N$ 时,有 $|x_n-a|\leqslant 100\varepsilon$;

(2) $\forall\varepsilon>1$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$;

(3) $\forall N$, $\exists\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$;

(4) $\exists N$, $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

解 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义有:对数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,存在常数 a,使对任意给定的正数 ε(不论它多么小),$\exists N\in\mathbf{N}$,使当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立.

因一个概念的定义中的条件是该概念成立的充分必要条件,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的上述定义也是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 成立的必要充分条件.

将上述定义分别与(1)、(2)、(3)、(4) 比较可知:

(1) 与上述定义等价,这是因为定义中自然数 N 不唯一,所以 $\forall n>N$ 与 $\forall n\geqslant N$ 是等价的,又因 $\varepsilon>0$ 具有任意性,故 ε 与 100ε 是等价的.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时,由 ε 的任意性知,(2) 仅为上述定义的必要条件,但不是充分条件. 这是因为 $\varepsilon>1$ 不能保证 ε 为任意小,因而由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 不能保证 x_n 与 a 无限接近.

(3) 仅是上述定义的必要条件. 因为 $\exists\varepsilon>0$,而不是 $\forall\varepsilon>0$,这时不能由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 保证 x_n 与 a 任意接近,从而(3) 不能作为上述定义的充分条件.

(4) 由定义中 N 不唯一,如果存在 $N\in\mathbf{N}$,使对 $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$,这说明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 a,说明(4) 是上述定义的充分条件. 但反之如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,不一定能找到那样的 N(它可能与 ε 无关. 这一要求比 N 与 ε 有关的要求更高),使对任意 $\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,都有

$|x_n - a| < \varepsilon$,因为在定义中 N 是依赖于 ε 的给定而确定的. 因而(4) 不是上述定义的必要条件.

2.(98) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解 由于$\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$,所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$.

即
$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

于是由夹逼定理知原式答案为$\dfrac{2}{\pi}$.

注 解这种类型极限的题,一般有两种方法,一是用夹逼定理,二是化成积分和式的极限. 本题是两种方法的结合,先用夹逼定理,也就是将所给和式放大、缩小,而后再分别将放大后与缩小后所得到的两个和式化为积分和式. 本题属于难题,将放大或缩小后的和式化为积分和式是难点.

3.(03) 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有 ( )

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解法一 由数列极限的定义,数列$\{a_n\}$ 的极限关心的是 a_n 在某个 N(足够大)之后的性质,前面的有限多项则无关紧要. 因此 A、B 中"任意 n"的条件显然不成立. "$0\cdot\infty$"型极限是未定型,C 不成立,故选 D.

事实上,当$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)=\infty$,这可由无穷大量的定义得到.

解法二 举反例:$a_n=\dfrac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\dfrac{1}{2}n$,则可以直接排除 A、B、C.

注 本题考查对数列极限定义的理解. 要熟悉一些常见的 $0,\infty$ 型式子:$0\cdot$(有界) $=0$,$\infty\cdot$(有界) 未定,$\infty\cdot0$ 未定等.

4.(06) 设数列$\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

求:(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析 这是一道证明数列极限存在并求数列极限的综合题,在证明极限存在时我们经常会用到单调有界定理,这里也不例外.

解 (1) 证明:分两种情况讨论

当 $x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$x_2=\sin x_1<x_1$

由归纳法得 $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$

所以：$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$，即 $x_{n+1} < x_n$

$\therefore \{x_n\}$ 单调减小，

又 $x_{n+1} = \sin x_n \geqslant 0$ 即 $\{x_n\}$ 有下界 0，由单调有界定理知

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$

由 $x_{n+1} = \sin x_n$，两边对 n 取极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$，得

$$A = \sin A, \therefore A = 0$$

同理，$x_1 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，亦得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$

(2) **解**　由题意，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，为"$1^\infty$"型.

$\because$ 离散型不能直接用洛必达法则

所以我们来考虑

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t[1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)]-[t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)]}{2t^3}} = e^{\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

注　在运用洛必达法则时，要清楚离散型应先转化为连续型函数.

复习思路

判别数列收敛的主要方法有：

(1) 数列收敛定义. 用定义判断数列收敛是考题难点，需要严密的推理.

(2) 单调有界准则. 证明数列 $\{a_n\}$ 有界且单调，主要针对递推数列.

(3) 夹逼定理. 须将函数适当放大或缩小而且要求放大或缩小的两个函数具有相同的极限.

对于 n 项和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，除利用夹逼定理求解外，还常利用拆项求和、幂级数求和、定积分定义等方法. 利用定积分定义求极限，常化为形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，关键要理解定积分的定义.

四、函数极限

(一) 利用左、右极限

1. (92) 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限　　(　　)

(A) 2　　(B) 0　　(C) ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

解　因 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，而 $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$. 故 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = 0$. 所以选 D.

注　左、右极限存在且相等，是函数极限存在的充要条件. 本题中函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 为两个因式

的乘积，易求出$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，所以解本题的关键是因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$.

2.(00) 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]=0+1=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1.$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

注 求带有绝对值函数的极限一定要考虑左、右极限. 本题易犯错误是将极限分成两部分来考虑，而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$和$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$均不存在，最后得出极限不存在的结论. 注意：$\lim\limits_{x\to a}f(x)$和$\lim\limits_{x\to a}g(x)$均不存在，但$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$可能存在. 不要将极限的四则运算用于极限不存在的情形.

(二) 1^∞ 型及等价无穷小代换

1.(88) 若 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$ ________.

解 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{x\cdot2t}=te^{2t}$. $\therefore f'(t)=(1+2t)e^{2t}$.

2.(90) 设 a 为非零数，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$.

注 本题也可将$\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$变形为$\dfrac{(1+\frac{a}{x})^x}{(1-\frac{a}{x})^x}$，分别求出分子和分母的极限.

3.(91) 求$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\pi/x}$.

解法一 原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\exp\left(\dfrac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\pi\ln[1+(\cos\sqrt{x}-1)]}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}\right)=e^{-\frac{1}{2}\pi}.$$

解法二 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\frac{\pi}{x}\cdot(\cos\sqrt{x}-1)}$

而
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

注 解法一中使用了等价无穷小代换 $\ln(1+x)\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to0)$.

4.(93) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解法一 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\exp\left(\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}\right)=\mathrm{e}^{2}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{2}{x}-1}\cdot x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$

又 $$\lim_{x\to\infty}x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right)=2+0=2,$$

故 原式 $=\mathrm{e}^{2}$.

5.(95) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/\sin x}=$ __________.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{6}$.

6.(97) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^{2}\cos(\frac{1}{x})}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ __________.

解 因为 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$,

所以 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^{2}\cos\frac{1}{x}}{(1+1)\cdot x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}(3\cdot 1+0)=\dfrac{3}{2}$.

注 本题考查了三个知识点:一是利用等价无穷小代换简化计算,二是重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,三是有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

7.(03) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}=$ __________.

解 原式 $=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x^{2})}\ln(\cos x)\right)$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}\right)=-\frac{1}{2}$$

∴ 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

注 1. 求幂指函数"1^{∞}"型的极限,除了将其化为重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 形式外还可以采用取指数,再取对数的方法将幂指数化为指数函数,再利用洛必达法则求极限.

2. 利用等价无穷小代换，可以简化计算，但应注意：等价无穷小代换可以用于乘除运算的各因式，而不能随意用于和差运算.

3. 应熟记 $x\to 0$ 时某些等价无穷小量，如 $\sin x\sim x$、$\tan x\sim x$、$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$、$\sqrt{1-x}-1\sim-\dfrac{x}{2}$、$\ln(1+x)\sim x$、$e^x-1\sim x$、$\arcsin x\sim x$、$\arctan x\sim x$、$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 等.

8.(06) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ______.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$，所以答案为 2.

注 本题利用了等价无穷小代换 $\ln(1+x)\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to 0)$.

(三) 应用洛必达法则或泰勒公式

1.(92) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}=\frac{1+0}{1}=1.$$

注 本题使用了等价无穷小代换：$1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to 0)$.

2.(94) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ______.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

3.(98) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ______.

解法一 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\tag{1}$$

对式(1)将分子有理化，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-(1+x)}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}[\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}]}=-\frac{1}{4}.$$

对式(1)也可以先将分母 $4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$ 取极限，再将其余部分 $\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ 使用洛必达法则，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=-\frac{1}{4}.$$

解法二 将分子中的 $\sqrt{1-x}$ 和 $\sqrt{1+x}$ 分别用泰勒公式展开即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

注　解法二比解法一简便,使用泰勒公式时需要将$\sqrt{1+x}$和$\sqrt{1-x}$展开至2阶,将x^2项展示出来,因为分母是x^2项,切勿对分子使用等价无穷小代换:$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,\sqrt{1-x}-1\sim-\frac{1}{2}x$,因为分子各项之间是代数和的关系.

4.(99) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$ __________.

分析　本题为"$\infty-\infty$"型极限.将$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}$通分,再取极限得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}$用$x$代换分母中的$\tan x$,再用洛必达法则.

解　$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

注　应用洛比达法则求极限我们应该注意以下几点:

(1)一定要验证条件.洛必达法则是求"$\frac{0}{0}$"型和"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定型的极限,对于"$0\cdot\infty$"型、"1^∞"型等未定式要先将其转化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型.

(2)一般应先尽可能通过有理化或等价无穷小代换等手段简化极限式,再用洛必达法则.

(3)求"$\frac{0}{0}$"型极限时,如果导数计算复杂,而容易求得泰勒公式时,可用泰勒公式展开式代入极限式的解法,常比使用洛必达法则要简便.该方法主要是使用了带皮亚诺余项的麦克劳林公式:$f^{(n)}(0)$存在,则有$f(x)=f(0)+f'(0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.关键要记住一些常见函数的泰勒展开式,如$e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^a,\ln(1+x)$等.同时要注意展开阶数.

(4)用洛必达法则求整型变量函数$f(n)$,当$n\to\infty$时的极限,必须先将整型变量n换为连续型变量x,求$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(四)确定极限式中参数

1.(94)设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq 0$,则必有　　(　　)

(A) $b=4d$.　　(B) $b=-4d$.　　(C) $a=4c$.　　(D) $a=-4c$.

解　由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{a}{\cos^2x}+b\sin x}{\frac{-2c}{1-2x}+2xde^{-x^2}}=-\frac{a}{2c}=2$.即$a=-4c$.(易见当$a=0,c\neq 0$时,极限为0,当$a\neq 0,c=0$时,极限为$\infty$,均与题设矛盾.)应选D.

2.(96)设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则$a=$ __________.