读考研书 找人大社

2010 人大考研

2010年考研

数学

新编考试参考书(经济类)

严守权 胡显佑 姚孟臣 编著

● 命题、辅导权威专家联手打造

经济类数学考研一线名师联手打造，内容、题型、难度均紧扣大纲，整体把握经济类数学考研的难点、重点与趋势

针对应理解与熟练掌握的考点、知识点分别归纳题型特点、注意点与解题思路

精选足量例题与习题，总结历届考生易犯错误，指点迷津，避免不必要的错误

中国人民大学出版社

2010年考研数学
新编考试参考书(经济类)

严守权　胡显佑　姚孟臣　编著

2010

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

2010年考研数学新编考试参考书．经济类/严守权等编著．6版
北京：中国人民大学出版社，2009
ISBN 978-7-300-03109-5

Ⅰ．2…
Ⅱ．严…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第055181号

2010年考研数学新编考试参考书(经济类)
严守权　胡显佑　姚孟臣　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn http://www.1kao.com.cn（中国1考网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京新丰印刷厂		
规　格	210mm×285mm　16开本	**版　次**	2004年6月第1版 2009年6月第6版
印　张	25.25	**印　次**	2009年6月第1次印刷
字　数	787 000	**定　价**	39.00元

科学复习,攻克经济类数学

1987年开始的全国统一命题的硕士研究生入学考试是为招收工学、经济学、管理学等硕士研究生而实施的具有选拔性质的水平考试。教育部根据不同学科不同专业对数学知识的要求,对数学考试进行分类。为适应目前高等学校课程改革的需要,从2009年起,原经济类的数学三、数学四进行了整合,称为新"数学三"。与此同时,对不同的考试类别,制定了相应的考试大纲。大纲是教育部颁布的法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。每一位考生在做考前准备时,务必要认真阅读大纲和根据大纲编写的样卷,明确自己报考的专业应参加的数学考试类别,并全面了解考试的范围、题型和难度,以增加复习的针对性和有效性。

全国硕士研究生入学统一考试数学考试(经济类)开考20多年以来,经过了多次调整,根据2009年新调整后的考试大纲,新数学三与原数学四相比,增加了无穷级数、线性微分方程解的结构、二阶微分方程、差分方程以及数理统计的相关内容,同时降低了原数学三在上述相关内容的难度。在总分150分的情况下,试卷考分分布调整为:《微积分》84分(占56%),《线性代数》和《概率论与数理统计》各33分(各占22%)。从总体上看,经过多年的改进和磨合,试卷的内容分布、题型结构、难易度的把握以及命题的风格都具有相当的稳定性、连续性、可信性和规范性,较好地体现了大纲的要求。其特点是,对大纲的覆盖面宽,几乎所有重点章节均有涉及,各个知识点分布合理;数学的基本概念、基本理论、基本方法,尤其它们的延伸、扩展、转换、综合和应用始终是考查的重点,计算技巧性过强的题将会逐渐减少;题型结构中,选择题、填空题共14小题56分,占有较大比重,加上解答题,共23题,题量大,综合性强,对考生掌握基础数学知识的熟练程度和运用数学知识的综合能力都提出了较高的要求。笔者经多年观察,认为这种命题特点将持续,且难度仍在逐步向下调整。考生在复习时要了解考研命题的特点,从整体上把握大纲,把握大纲确定的知识点及其逻辑联系和网络结构,尤其是把握好各网络的结点,即考点和重点。要注意,不要听信谣传,不要迷信押题,不要偏科,不要忽视基本功而去啃偏题、怪题、超纲题和计算繁杂、技巧性过强的题。在具体复习时,还要注重效率。在

求解每道数学题时，不要只满足会做或答案正确，而要注重过程，了解题中内含的知识点和题型特点，分析可能出现的概念性、逻辑性错误，并培养快捷解题、节省时间的意识。在此基础上学会归纳总结，举一反三、融会贯通，在点点滴滴的积累中提高。

如何看待全国研究生入学考试数学统一命题的难与易？在与考生接触中，许多考生都认为考研数学难，似乎信心不足。其根源在于历年来考研数学及格率偏低，当然这其中也有思想认识上的盲目性。应该承认研究生入学考试与大学数学课程的考试不同，与课程的学业考试相比，考研试题更着重于在对基本概念、基本定理、基本方法充分理解基础上的综合应用，有较大的灵活性，往往一个命题覆盖多个内容，涉及概念、直观背景、推理和计算。许多考生往往难以适应，其突出感觉是没有思路。这种难度是客观存在的，而这正是考生考前准备应解决的突破口。另一方面，由于高校扩招，考研人数迅速增加等因素，整体数学水平有所下降。加之考研是选拔性的考试，及格线高低并不重要，因此考试分数不高也属正常。有些考生听说考研数学难，就不加分析一味地钻难题、偏题、怪题，而个别考研辅导书为了迎合这些考生的心理，不恰当地选用超纲题或增添一些大纲要求之外的方法技巧，也在某种程度上误导了考生。其结果是，一些考生不去仔细分析考试大纲，忽略复习的系统性，知识掌握得不完整，基本概念理解得不透，基本功不扎实，转换能力差，甚至于处理一些比较常规的题时，也常犯低级错误，该得分的不得分，很多教训是深刻的。如果对考试的难与易的问题有一个理性认识，任何一个考生，即使基础较差，只要复习方法得当，踏实努力，难和易是可以相互转换的，历年来都有不少实现这种转换的成功之士。每个考生都要有必胜的信心，保持良好的心态，这是考前复习成功的前提。如何实现转换？首先还是要强调抓住基础，要重视和加深对基本概念、基本定理和基本方法的复习和理解，并要熟悉常见考点的题型和解题思路。虽然仅此得不到高分，但这是取得好成绩的基础和前提。历年都有相当数量的考生考后实际成绩大大低于自我估分，其中一个重要原因是基本功不扎实，也影响到"上线"。其次，要加强综合解题能力的训练，力求在解题思路上有所突破。具体来说，就是要抓住能够综合体现多个知识点的若干考点，进行重点突破。考虑到数学学科的特点，要求考生自己琢磨出来所有考点，并给出相关的解题思路，是十分困难的，这方面通常可以通过求教于有经验的老师，参加有较好信誉的辅导班，或者阅读有关的辅导书解决。本书编写的出发点，就是为广大考生提供这样一种服务。必须强调的是，辅导班或辅导书只是学习的一种手段，最终解决问题还要自己动手动脑。要充分利用一切学习机会，力求对常见的考题类型、具体题型、解题思路、题目特点有一个系统的把握，并在此基础上自己动手做一定数量的综合性练习题，温故而知新，不断巩固、扩大学习的成果。我们相信，每位考生只要认真地了解考研数学的内容、要求和命题特点与重点，理性地分析问题和不足，制订一个有针对性的、分阶段的、讲效率的、系统的复习计划，并扎扎实实地去执行，就一定能取得预期效果。

那么如何科学安排数学考试考前的复习呢？首先应该明确，数学解题能力和应试能力的提高，是一个长期积累的过程，不能急于求成，切忌搞突击，既不要先松后紧，也不要前紧后松。对基础稍差的考生，复习时间应当适当提前，在熟悉大纲的基础上对考试必备的基础知识先进行系统的复习，目标是对考试涉及的基本概念、基本定理和基本运算能熟悉；然后再通过阅读辅导材料，或参加辅导班，对考研数学的试题类型、特点、思路进行系统的归纳总结，将《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三门课程的内容"由厚看薄"，最终归纳为若干考点，提纲挈领，重点突破，然后再"由薄到厚"，通过一定数量习题练习，练习中不必追求答案的完整，也不必做重复的繁杂的计算，以便腾出更多时间，分析题型和应对方法。这段时间应该是应考准备的关键阶段，时间可以适当长一些，目标是明确研究生考试考什么、如何应对的问题，也即有意识地重点解决解题思路问题，应该基本做到拿到试题后能立即做出反应，给出针对性强的有效的求解方法。第三阶段是临考前的最后冲刺阶段，主要是对考点做最后梳理，熟记公式，要系统、完整、规范、限量限时、认认真真地做若干套模拟试卷，进行实战训练，在三个小时内要完成每一份试卷，包括如何审题，如何安排答题顺序，如何严格、规范、准确、有层次地写出答案。这一阶段的目标是自测复习成果，并针对薄弱环节再做补救，以调整心态，提高实战能力，争取使自己的实际水平和能力处在最佳状态。

我们认为，一本好的考研辅导书，首先是全书的内容、题型和难度要符合考研大纲的要求；其次应该从整体上把握住研究生入学考试的难点、重点和趋势，并给出清晰准确的表述和归纳；同时还应该有足够数量的经过精心挑选的例题和练习，有针对性地说明各章节应该理解和熟练掌握的各个考点、知识点和解题思路，并总结历届考生在考试中易犯的错误，指点迷津，避免不必要的失分；最后一点，就是良好的售后服务。以上各点也正是我们应该努力做到的。我们相信，对于报考经济类硕士研究生的考生，购买本书应该是一个正确的选择，并对如何使用好本书提出几点意见：一是使用本书前，最好是已经系统学完经济管理类各专业大学数学的全部课程，如果有部分内容未曾学过，应该在复习的第一阶段补习，如果已学过但属学习不够扎实的，可以重点补习，也可以在阅读、解题中遇到问题时，有针对性地查阅课本相关章节的知识，不必将大学课本从头到尾再看一遍，这样做既费时又效果不佳。二是本书每章结构按考点、知识点编写，涉及知识不受大学课本章节顺序限制，同时给出每章的学习方法，在复习每章时，希望考生认真阅读“考试要求”部分，弄清本章有几个考点和知识点，以及其题型特点、注意点和解题思路，以纲带目，以点带面，统领本章的复习，这也本书精华之所在。三是做练习题时应该尽可能地独立完成，要多思考，多归纳，多用几种方法对照比较，不能满足于会做和答案正确，时间和效率是关键。四是根据历届考生使用本书的成功经验，只要把本书“吃透”，一本书足矣。同时看几种辅导书，不仅经济代价高，而且效果往往适得其反。所谓“吃透”，是指要将书至少认认真真看两遍，包括做题，第一遍至多叫了解，第二遍叫温故而知新，上升到理性。最后，为增加题目的训练量，还可参考使用中国人民大学出版社出版的考研数学题库（含微积分、线性代数、概率论与数理统计习题集）。

本书的编者都具有十几年从事考研辅导等相关工作的经验，在编写过程中还得到了龚德恩教授、张南岳教授等专家和中国人民大学出版社马胜利和李天英的指导，在此向他们致以衷心的感谢。

由于水平有限，书中难免有不足和差错，欢迎读者批评指正，也可通过网络与我们联系、切磋，同时也感谢广大考生多年来对我们的厚爱。

编　者

2009 年 4 月

目 录

第一章 微积分

本章复习建议

"微积分"在经济学硕士研究生入学考试数学部分占有56%的比重,而填空和选择题又占微积分试题的60%.其特点是:涉及的概念多、要掌握的定理公式多、应用范围广、知识点和考点多、题目量大且灵活性高,因此要重视本章内容的复习.具体要注意以下几点:

1. 要抓好对基本概念的理解和运用.要真正理解一个概念,应该从它的几何背景、内外在的逻辑关系以及量化和算法这三个角度综合进行.

2. 无论做多少题,都要把握微积分的整体架构,也只有做到对各知识点的均衡掌握,才可能突出重点,突破难点,去处理综合性强的问题.要熟练掌握对初等函数、分段函数、变限积分函数及经济函数的处理能力;掌握函数的对称性、单调性、凹凸性、连续性、可导性、可积性、级数的收敛性、幂级数的可展性的概念及其判别法;掌握微积分的理论基础极限理论,核心是无穷小量的阶的分析;掌握极限运算、求导数和偏导数或微分和全微分运算、积分运算、微分和差分方程的求解;掌握微积分的几何应用和经济运用.

3. 在掌握基本概念并通读全章把握微积分总体架构的基础上,要围绕经济类的微积分考什么、如何应对这一问题,集中精力,按照考点,逐一复习,通过复习,明确每个考点可能提出什么问题、求解的思路和应该注意避免犯的错误.主要考点将在后面各部分一一列出.

4. 微积分的选择题填空题多,题量大,用时多少与思路有关,不同水平的考生差异很大,这也给考生提供了发挥的空间.复习时要有针对性地注意解决思路问题、解题的逻辑层次和速度问题.

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法.函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.复合函数、反函数、分段函数和隐函数.基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质.函数的左极限和右极限.无穷小量和无穷大量的概念及其关系.无穷小量的性质及无穷小量的比较.极限的四则运算.极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则.两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念.函数间断点的类型.初等函数的连续性.闭区间上连续函数的性质.

重点难点

1. 函数概念

(1) 函数概念中,定义域和对应法则是两个基本要素.不仅要会求已知函数的定义域,而且要养成在定义域内考虑和求解问题的习惯.

(2) 函数关系中最常见的是复合函数关系.对于复合函数形式:$f(\varphi(x))=\Psi(x)$,通常要考虑的基本问题是:

已知 $f(x)$,$\Psi(x)$,求 $\varphi(x)$及其定义域;

已知 $f(x)$,$\varphi(x)$,求$\Psi(x)$及其定义域;

已知 $\varphi(x)$,$\Psi(x)$,求 $f(x)$及其定义域.

以上函数关系的转换,是考研解题的一种基本功,应熟练掌握.

(3) 初等函数、分段函数、变上限积分函数和经济函数是经济类考生应重点掌握的函数类型.其中,初等函数是基础,应熟练掌握基本初等函数的性质和图形特征.处理分段函数时,分段开区间内一般用公式或用规则进行处理,分段点处要由定义用左、右极限为工具进行处理.对含积分上限的函数,首先要分清自变量、积分变量,其次是要掌握其性质,并熟练掌握求导运算.在经济函数中,应主要掌握成本函数 $C(x)$,收益函数 $R(x)$,需求函数 $f_d(p)$,供给函数 $f_s(p)$,利润函数 $L(x)$的结构和经济含义.

2. 函数的单调性与对称性

函数性质中应重点掌握函数的单调性和对称性.

(1) 函数的单调性是考研试题中的常见题型.一是若干单调函数复合后单调性的讨论;二是单调性的判别和证明,最终归结为 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)的证明和判断.

(2) 函数的对称性在微分和积分中都有广泛的应用.

若 $y=f(x)$是偶函数,则函数曲线关于 Y 轴对称;若$y=f(x)$是奇函数,则函数曲线关于原点对称;若 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$互为反函数,则两曲线关于直线 $y=x$ 对称.

在微分学中,经常利用几何直观性来讨论函数的性质的转换.

在积分学中,通常可利用对称性简化积分运算.

另外,在讨论其他函数性质时,无界性问题注意抓无界点;周期性问题主要要利用公式$f(x+T)=f(x)$将一个周期的讨论推至任何一个区间.

3. 函数极限概念

(1) 函数极限是自变量在一个特定变化过程中函数取值的变化趋势.函数极限的存在,与趋向点 x_0 处函数的取值无关;在 $x\to x_0$ 时,$x\neq x_0$;自变量趋向方式是任意的;在同一极限号下,变量各部分同步变化.

(2) 函数极限存在,有唯一性、有界性和保号性,即:若在 $x\to x_0$(或∞)时,$f(x)$有极限,则称 $f(x)$在同一过程下为有界变量,要注意有界变量与有界函数的区别,同时也要注意,有界变量不一定表明变量在同一过程下有极限.

保号性是指函数极限符号与变化邻域内函数取值符号的一致性.保号性在判断极值时有应用.

4. 极限的收敛性及其运算

(1) 极限的收敛性的讨论通常出现在未定式的定值、反常积分和无穷级数的收敛性等问题中,最终取决于无穷小量阶的比较.

(2) 在未定式定值时,先考虑阶的问题,和式中若能区分高低阶,则应有所取舍,只保留能最终确定其变化速度的主项.在连乘或连除的情况下可以用等价代换,使问题化简,常用的等价无穷小关系式在 $x\to 0$ 时,有 $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $e^x-1\sim x$.

(3)函数极限的运算，首先要抓住基本类型. 连续函数在其连续点处的极限即为函数在该点的函数值；若极限式中含无极限但有界的变量，则设法利用无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量的性质定值；对更为大量的未定式定值，基本方法是洛必达法. 注意法则只适用于“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其他类型的未定式均要化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，转化时要注意选择合适的类型. 运用洛必达法则时，如能结合无穷小量等价代换，适当化简，定值时会更为简便.

5. 函数的连续性

(1) 讨论函数在 x_0 处的连续性，就是证明函数 $f(x)$在点 x_0 的极限值等于函数值 $f(x_0)$.

(2) 函数的间断点可分为第一类间断点(含可去间断点，跳跃间断点)和第二类间断点(含无穷间断点，振荡间断点)两个基本类型. 重点掌握的是可去间断点，即 $f(x)$在 x_0 极限存在但不连续点. 涉及问题是求极限重新定义 $f(x_0)$. 无穷间断点，即 $f(x)$在 x_0 的一侧极限为无穷大. 其背景是 $x=x_0$ 为其铅直渐近线.

(3) 必须强调的是，在运用导数讨论函数的单调性和凹凸性时，只限于连续区间范围内. 例如在一般情况下，在定义域内有 $f'(x)>0$，并不能推出 $f(x)$单调增. 因此，在讨论函数的单调性和凹凸性时，应先找出函数的各连续区间，然后再在每个区间一一判别.

(4) 闭区间上连续函数的性质，常用的是零值定理和介值定理，通常用于方程 $f(x)=0$ 有解的讨论和中值 ξ 存在性证明. 使用定理时，要注意中值取值范围. 在零值定理中，当 $f(a)f(b)<0$ 时，x_0 取值开区间(a,b)使得 $f(x_0)=0$；当 $f(a)f(b)\leqslant 0$ 时，x_0 取值闭区间$[a,b]$，使得 $f(x_0)=0$.

例题解析

1. 函数概念

[例 1] 填空题.

(1) 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，则 $f(x)$定义域为______，$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=$______.

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\frac{x-1}{x}$，$a^2\neq 1, a\neq 0$，则 $f(x)$的值域为______.

(3) 设 $f(x)$为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x-\cos x$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$______.

解：(1) 求 $f(x)$的定义域及 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$，先求出 $f(x)$的解析式. 由于

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2},$$

从而知

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2}.$$

因此，$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且有

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{x^2}{x^4+4x^2+1}.$$

(2) 先求出 $f(x)$，为此设法找出 $f(x)$与 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$之间转换关系，若设$\frac{x}{x-1}=t$，有$x=\frac{t}{t-1}$，从而有

$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\frac{1}{t}$，即有方程组

$$\begin{cases} af(x)-f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\dfrac{x-1}{x}, \\ f(x)-af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

解得 $f(x)=\dfrac{1+a(x-1)}{x(1-a^2)}$.

又 $f(x)$的值域即为 $f^{-1}(x)$的定义域. 于是由 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-a}{-a+x(1-a^2)}$知 $f(x)$的值域为$\left\{x \mid x\neq\dfrac{a}{1-a^2}\right\}$.

(3) 由题设 $f(x)=f(-x)$且当 $x>0$ 时,$f(x)=x-\cos x$,从而有,$x<0$ 时

$$f(x)=f(-x)=-x-\cos(-x)=-x-\cos x.$$

[例 2] 单项选择题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ 2x, & x<0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -2x, & x<0, \end{cases}$ 则 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=$(　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(2) 设 $g(x)$在$[a,b]$上单调增,$f(x)$在$[g(a),g(b)]$上单调减,则 $f[g(-x)]$(　　).

A. 在$[a,b]$上单调减　　B. 在$[a,b]$上单调增

C. 在$[-b,-a]$上单调减　　D. 在$[-b,-a]$上单调增

答: (1)C　(2)D

解: (1) 分段函数在各开区间内要分段处理,再单独讨论分段点的取值. 在本题中,当 $x<0$ 时,$g(x)=-2x>0$,故对应 $f(x)=x^2$,有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$,又$g(0)=0$,$f[g(0)]=0^2=0$. 综上所述,当 $x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=4x^2$,故选 C.

(2) 由单调减函数 $v=-x$ 和单调增函数 $u=g(v)$及单调减函数 $y=f(u)$复合为单调增函数. 此时 $a\leqslant -x\leqslant b$,即$-b\leqslant x\leqslant -a$,也即 $f[g(-x)]$在$[-b,-a]$上单调增. 故选 D.

2. 函数性质

[例 1] 单项选择题.

(1) 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且为奇函数,已知 $f(x)$在$(-\infty,0)$上有 2 个零点,1 个极大值点,2 个极小值点,3 个拐点,则下列结论不正确的是(　　).

A. 在$(-\infty,+\infty)$上 $f(x)$有 4 个零点

B. 在$(-\infty,+\infty)$上有 4 个极小值点

C. 在$(-\infty,+\infty)$上 $f(x)$有 2 个极大值点

D. 在$(-\infty,+\infty)$上有 7 个拐点

(2) 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为奇函数,可导,且 $F(x)=\int_a^x[xf(-t)-2f'(t^3)]\mathrm{d}t$,则$F(x)$是(　　).

A. 偶函数　　B. 非奇非偶函数

C. 奇函数　　D. 仅当 $a=0$ 时为奇函数

答: (1)C　(2)D

解: (1) 利用对称性,知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有 5 个零点,其中含 $x=0$;有 2 个极大值点,4 个极小值点和 7 个拐点,其中必含$(0,f(0))$. 故选 C.

(2) 先作变量整理,$F(x)=x\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t-2\int_a^x f'(t^3)\mathrm{d}t$,由 $f(x)$ 为奇函数,知 $f(-t)$ 仍为奇函数,$f'(t^3)$ 为偶函数,进而知对任意 a,$\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,$x\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为奇函数,$\int_a^x f'(t^3)\mathrm{d}t$ 仅当$a=0$时为奇函数,综上知仅当 $a=0$ 时 $F(x)$ 为奇函数. 故选 D.

[例 2] 已知函数 $f(x)=f(x+4)$，$f(0)=0$，且在 $(-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$，求 $f(9)$.

解：$f(x)$ 可看做周期为 4 的周期函数，在长度为 4 的区间 $(-2,2]$ 上 $f'(x)=|x|$. 因此，

$$x\in(-2,0)\text{ 时}, f(x)=\int_0^x |t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x -t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}x^2;$$

$$x\in(0,2)\text{ 时}, f(x)=\int_0^x |t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2.$$

从而有

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & x\in(0,2],\\ \frac{1}{2}x^2, & x\in(-2,0].\end{cases}$$

于是

$$f(9)=f(5)=f(1)=\frac{1}{2}.$$

3. 无穷小量与无穷小量的比较

[例 1] 填空题.

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小量，则 $a=$________，$b=$________.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin x^2\cdot\arctan t^2\mathrm{d}t+x^6}{x^k}=c\neq0$，则 $k=$______，$c=$______.

解：(1) 由题设 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，知 $h\to0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小量，即 $\lim\limits_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0$，因 $f(0)\neq0$，知 $a+b=1$.

又由洛必达法则，有

$$\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}[af'(h)+2bf'(2h)]=(a+2b)f'(0)=0,$$

因 $f'(0)\neq0$，知 $a+2b=0$，求解方程组 $\begin{cases}a+b=1,\\ a+2b=0,\end{cases}$ 得 $a=2$，$b=-1$.

(2) 利用等价代换，先看阶，再定值. 由 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$t\to0$ 时，$\arctan t^2\sim t^2$，因此

$$\int_0^x \sin x^2\cdot\arctan t^2\mathrm{d}t=\sin x^2\int_0^x\arctan t^2\mathrm{d}t\sim x^2\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^5,$$

比 x^6 低阶，故舍去 x^6，从而确定 x^k 与 $\frac{1}{3}x^5$ 同阶，故 $k=5$.

于是 $\qquad$ 原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^5}{x^5}=\dfrac{1}{3}$，

即 $\qquad c=\dfrac{1}{3}$.

[例 2] 单项选择题.

(1) 下列结论中正确的是(　　).

A. 若 α 为无穷小量，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 必为无穷大量

B. 任何两个无穷小量均可以比较阶的大小

C. 有界变量乘无穷大量仍为无穷大量

D. $x\to0$ 时，$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$是比$\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}$ 高阶的无穷小量

(2)设 $f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$,则当 $t\to1$ 时,$F(t)$是变量 $t-1$ 的(　　).

A. 1 阶无穷小　　　　B. 2 阶无穷小

C. 3 阶无穷小　　　　D. 不低于 2 阶无穷小

(3) 已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln x+\sin x}{x\ln x^2+f(x)}=\frac{1}{2}$,则 $f(x)=$(　　).

A. $\cos x$　B. $\ln 2x$　C. x^2　D. e^x

答: (1)D　(2)D　(3)C

解: (1) 0 是特殊的无穷小量，$\frac{1}{0}$无意义，结论 A 仅在 $\alpha\neq0$ 时成立；由反例，$x\to0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}\to0$，但$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$无极限，说明两个无穷小量未必能比较阶的大小；无穷小量也是有界变量，故有界变量乘无穷大量未必为无穷大量；又 $x\to0$ 时，$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}\sim x^{\frac{10}{8}}$，显然结论 D 成立.

(2) 先将二重积分通过交换积分次序化为变限积分，即

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t \mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x\ ,$$

从而有

$$\lim_{t\to1}\frac{F(t)}{(t-1)^k}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)(t-1)}{k(t-1)^{k-1}}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)}{k(t-1)^{k-2}}.$$

于是若 $f(t)\neq0$，则 $F(t)$为 $t-1$ 的 2 阶无穷小，若 $f(t)=0$，则 $F(t)$为比$(t-1)^2$ 高阶的无穷小，综上知 $F(t)$是$(t-1)$的不低于 2 阶的无穷小. 故选 D.

(3) $x\to0$ 时，$\sin x$ 为比 $x\ln x$ 高阶的无穷小，因此，分子极限的趋向取决于 $x\ln x$，又 $x\ln x^2=2x\ln x$，若要极限值为$\frac{1}{2}$，$f(x)$只能是比 $x\ln x$ 高阶的无穷小，故选 C.

4. 极限的收敛性与极限的运算

[例 1]填空题.

(1) 已知函数 $f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$______.

(2) 已知$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)-1}{x}+\frac{\sin 2x}{x^2}\right)=2$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

(3) 设 $f(x)$在 $x=1$ 连续，$x\to1$ 时，$\frac{f(x)-2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$为有界量，则 $f(1)=$______.

(4) 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 $c=$______.

解: (1) 先将极限式化简，再由连续函数的极限值等于函数值的性质定值，即由

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{[xf(x)]^2}{2x^2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}f(x)=1,$$

知　　$f(0)=2$.

(2) 利用无穷小先构造 $f(x)$的解析式，再求极限. 由

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{x(f(x)-1)+\sin 2x}{x^2}=2,$$

知 $\quad x(f(x)-1)+\sin 2x=2x^2+o(x^2)$,

即 $\quad f(x)=2x-\dfrac{\sin 2x}{x}+1+\dfrac{o(x^2)}{x}$,

因此有 $\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

(3) 有界量与无穷小乘积仍为无穷小,于是有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{f(x)-2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)(x-1)+2x+\frac{x-1}{\ln x}\right]=2+\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=3,$$

从而知 $\quad f(1)=3$.

(4) 由微分中值定理,$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$,ξ 介于 $x,x-1$ 之间,于是,

$$\text{原等式左边}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}=e^{2c},$$

$$\text{原等式右边}=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \xi\to\infty}}f'(\xi)=e,$$

从而知 $\quad c=\dfrac{1}{2}$.

[例 2]单项选择题.

(1) 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(2)设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　).

A. 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　B. 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散

C. 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　D. 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(3)设 $0<a<b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$等于(　　).

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

(4) 设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导,则(　　).

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

答:(1)D　(2)D　(3)B　(4)B

解:(1)由题设,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n<\lim\limits_{n\to\infty}c_n$,由极限的保号性,仅当 n 足够大时,才有不等式 $a_n<b_n<c_n$,又 $n\to\infty$时,$a_n\cdot c_n$ 为"$0\cdot\infty$"型未定式,其收敛性不能确定.仅 D 成立,故选 D.

(2)由 $f''(x)>0$,说明函数 $f(x)$或单调增加,或先减后增,或单调下降(如图 1—1).若 $u_1>u_2$,说明为后两种情况,则或者收敛或者发散,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,$f(x)=x^2$ 均有 $f''(x)>0$,但一个收敛、一个发散.若 $u_1<u_2$,则 $f(x)$必单调增加,从而有 $u_n=f(n)\to+\infty$.故选 D.

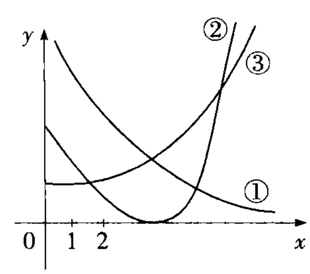

图 1—1

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，是常用的极限运算公式，由此容易得到

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\max\{a^{-1},b^{-1}\}=a^{-1},$$

故选 B.

(4) 本题主要讨论切线斜率的极限与函数极限的关系. 由反证法，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k\neq0$，不妨设 $k>0$，则必存在 x_0，当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>\dfrac{k}{2}$，从而有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{k}{2}(x-x_0)，其中\ \xi\in(x_0,x),$$

因而推得当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，与已知矛盾. 故选 B.

[**例 3**] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)\quad(x>0)$.

解：(1) 式中 $\sin x$ 为有界变量，不能直接用洛必达法则，应分项处理. 其中

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}\xlongequal{等价代换}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{2},$$

又 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{x^2\left(-\frac{2}{x}\right)}=0,\quad |\sin x|\leqslant1,$$

从而有　原极限 $=\dfrac{1}{2}$.

(2) $x\to0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 无极限，应分左右极限计算.

由 $$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2+e^u}{1+e^{4u}}+1=1,$$

知　　原极限 $=1$.

(3) 为"$0\cdot\infty$"型未定式，由于 n 为离散变量，不能直接用洛必达法则，只有将 x 置换 n 后使用，但较烦琐. 若变形，用无穷小等价代换后，再计算，十分简捷. 即

$$\begin{aligned}原极限&=\lim_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\left(e^{\frac{\ln x}{n(n+1)}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\ln x}{n(n+1)}=\ln x.\end{aligned}$$

以上各题虽然均为未定式，但都不能直接用洛必达法则，有的可由有界变量与无穷小乘积的性质定值，也有的可分左右极限计算后再合并处理，还有的将 n 置换为连续变量 x 后再用法则定值，如果考虑用等价代换化简，则更容易定值.

[**例 4**] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解：(1) 为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式，变形并等价代换后计算得

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=1.$$

(2) 为"$\infty-\infty$"型，通分母，化简后用洛必达法则定值.

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+x)\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{2x}\\&=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中 $x\to0$ 时，$\ln(x+\sqrt{x^2+1})\sim x$.

(3) 为"1^∞"型，取对数求极限，由 $\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\sim\dfrac{\sin x}{x}-1$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$ 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

故　　原极限$=e^{-\frac{1}{6}}$.

(4) 为"$0\cdot\infty$"型，可设 $t=\dfrac{1}{x}$，化为"$\dfrac{0}{0}$"型，即

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+2t}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}}{2t}\\&\overset{\text{整理}}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{-1}{2\sqrt{1+t}\sqrt{1+2t}(\sqrt{1+2t}+\sqrt{1+t})}\\&=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

以上各例为未定式且均可用洛必达法则定值，但若先变形，用等价无穷小量代换，化简后计算就变得简单多了.

［**例 5**］计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，$x\neq 0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}$，其中 $f'(0)$ 存在，且 $f(0)=0$.

(4) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：(1) 无穷项的乘积很难直接定值，需要先对极限式进行合并整理，由倍角公式

$$x_n=\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\left(2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

又当 $n\to\infty$时，$\sin\dfrac{x}{2^n}\sim\dfrac{x}{2^n}$，于是原极限$=\dfrac{\sin x}{x}$.

(2) 极限式中含$\dfrac{i\pi}{n}$结构，可考虑利用定积分概念定值，但要作适当整理.

由 $$\frac{n}{n+1}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

有 $$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n},$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

所以 原极限$=\dfrac{2}{\pi}$.

(3) 为“$\dfrac{0}{0}$”型，对积分上限的函数求导需作交换整理，有

$$\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t\xlongequal{u=x^n-t^n}\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u,$$

从而 原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^n)x^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^n)}{2nx^n}=\dfrac{1}{2n}f'(0)$.

(4) 欲求极限，需先确定$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.