大连海事大学出版基金赞助学术丛书

分布参数系统 H_∞ 控制理论

王兴成　著

大连海事大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了近几年发展起来的分布参数系统 H_∞ 控制的基本理论、方法、计算和实现。全书共九章，主要内容包括：H_∞ 控制理论的数学基础，频域设计方法，Pick-Nevanlinna 插值算法，H_∞ 鲁棒自适应控制算法，时滞系统 H_∞ 控制，有限维 H_∞ 控制算法及直接状态空间理论与方法。这些内容反映了作者及国内外有关学者在这一领域的主要研究成果与方法。

本书可供自动控制、应用数学等专业的研究生与研究人员及从事工程设计的技术人员参考。

本书由

国家自然科学基金
辽宁省博士起动基金　　　　资助
大连海事大学学术著作出版基金

The book financed by

The National Natural Science Foundation of China,
The Doctoral Initial Research Foundation of LiaoNing Province and
The Publishing Academic Works Foundation of the DMU.

序　　言

随着现代科学技术的发展及实际工程控制系统（例如空间飞行器、柔性机器人、化工过程等）设计的需要，分布参数系统（无穷维系统）的控制问题已成为控制界一个十分重要的研究领域。近30年来，这一领域已取得了比较丰富的理论与应用成果，特别是在系统的分析方面，对于线性分布参数控制系统已作了比较系统深入的研究，取得了关于能控性、能稳性、能观性及系统辨识与最优控制等方面比较完整的理论结果；对非线性分布参数控制系统的研究近年来也开始活跃起来。国内关于分布参数系统控制理论的研究几乎与国际上同步进行，许多学者做了大量的工作，取得了丰富的理论成果。但是，理论与应用之间仍然存在着一定的距离，这是因为许多理论往往要求受控对象的参数及结构是确定的，而实际对象不可避免地存在着各种不确定性，比如随机干扰因素的影响。此外，在系统建模时，也不得不忽略各种非线性因素的影响。由于分布参数系统的复杂性，迄今为止还缺乏有效的实时辨识方法，因此当系统参数变化甚至结构不确定时，将理论上很完美的控制规律应用于实际系统也往往效果不佳，甚至会导致系统失稳。随着现代工程控制系统对控制精度及技术要求的不断提高，分布参数系统的鲁棒性与自适应性已成为一个在工程系统设计中迫切需要解决的问题。可以毫不夸张地说，一个控制系统具有鲁棒性是它能真正用于工业现场的关键。

自从1981年Zames提出控制系统的H_∞优化设计思想以来，众多学者投身于H_∞优化设计理论的研究。H_∞控制方法由于其对于干扰等不确定因素具有抑制和鲁棒性等优良特性而引起控制界的高度重视。分布参数控制系统除了受不确定性因素的影响外，还由于在实时控制时往往采用各种离散及近似方法，因而对系统的鲁棒性能要求也相应增加。H_∞优化设计方法所具有的优良特性无疑为解决分布参数控制系统的鲁棒性提供了手段。近几年分布参数系统H_∞控制问题受到国内外控制理论工作者的广泛重视，已将集中参数系统的有关H_∞控制理论成果平行地推广到分布参数系统，并有很大发展，已取得了一系列的理论与应用结果，并且有越来越活跃的趋势。但是，国内外尚未见到有专著介绍这方面的研究成果。因此作者认为有必要系统地总结有关研究方法与成果，并期望本书的出版能为推动这一领域的研究工作尽微薄之力。

本书共九章，第三章由田小丰执笔，其余章节由王兴成执笔，最后由王兴成统稿。书中部分内容给研究生讲授过一次。各章内容相对独立，可作为硕士和博士研究生深入学习和研究的参考。由于分布参数系统H_∞控制理论的研究尚在发展之中，加上作者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，敬请读者及专家学者批评指正。

作者借此机会衷心感谢国家自然科学基金和辽宁省博士起动基金在本项研究中所给予的资助，同时也衷心感谢大连海事大学师资办和出版社在本书出版过程中所给予的大力支持与帮助。在本书的编写过程中得到了学校领导及科研院、轮机学院领导的热情关心和鼓励，也得到船舶自动化研究室贾欣乐教授、任光教授及其他老师的热情支持和帮助，在此一并表示最诚挚的谢意。

作　者

1996年4月于大连

目　录

第一章　绪论

§1.1　引言

在60年代初期，由于工程实际需要和集中参数系统控制理论发展的影响，现代控制理论的一个新分支——分布参数系统的控制理论开始发展起来。分布参数系统是指有无穷个自由度的系统，其参数是空间或时间分布的，故称为分布参数系统。从本质上讲，实际工程系统的参数都具有分布性，因此用分布参数模型描述更为合适。例如，空间飞行器、柔性机器人、化工过程等都是以偏微分方程、积分方程或泛函微分方程来描述其状态变化规律的。不同于用常微分方程描述的集中参数系统，分布参数系统的状态空间是一无穷维函数空间，系统在每一时刻的状态是一个函数，一般情况下很难用解析式子表示出来，因此其控制问题比较集中参数来说更困难更复杂，它涉及到泛函分析、无穷维系统控制理论与方法、数值近似等多门学科及各种实时控制技术。

随着空间科学技术的发展以及现代数学理论和计算机技术的发展，分布参数系统理论不断发展，并引起国内外学者对分布参数系统控制理论产生了极大兴趣。在这一领域的研究，我国几乎与国际上同时起步，在探讨系统的能控性、能稳性、能观性、最优控制与适应控制等方面取得了可喜的进展。我国学者如宋健、于学元等在分布参数系统理论及应用方面做了大量的工作，取得许多研究成果。

应该看到，目前分布参数系统的控制研究领域还主要局限于系统的分析方面，综合方面的工作还很少。此外，理论与应用之间仍存在很大的距离，这是控制领域中一个普遍现象，主要是因为迄今为止不少现有的控制方法都隐含一个假定，即要求被控对象的模型是完全确知的，这显然与实际情况相矛盾。实际系统不可避免地存在着各种干扰因素(如空间飞行器、柔性机器人负载的变化等)，以及建模时忽略了一些非线性因素的影响；另一方面，由于分布参数系统的复杂性，迄今为止尚无快速实用的实时辨识方法，因此将理论上很完美的控制策略应用于实时系统控制时也往往效果不佳，甚至导致系统不稳定，因此分布参数系统的自适应控制与鲁棒性控制已成为工程系统设计中迫切需要解决的问题。

在系统设计时既然免不了采用不确定性模型，人们自然希望有一种设计方法，即按照人们能掌握的最简化的被控对象理想模型及模型不确定性的某种度量来指导闭环系统的控制器设计，使该控制器接入实际系统后，能保证实际系统的稳定，且性能指标在容许范围以内，这就是目前国内外学者十分感兴趣的鲁棒控制问题。鲁棒控制理论十分丰富，其中最具代表性的当属H_∞优化设计方法，即H_∞控制理论。H_∞控制方法由于具有强的鲁棒性并且易于实现等优点而引起了国内外学者的高度重视，并已成功地应用于倒立摆、发电机控制、柔性结构等复杂系统。由于分布参数系统具有无穷自由度，在实施控制时不得不引进各种近似方法(如有限元法、伽

略金方法等)，通过适当的观测点测量值来设计控制器，从而对系统的鲁棒性要求也更高，H_∞ 控制方法所具有的优良特性无疑为解决这一问题开辟了新途径。因此，研究分布参数系统的 H_∞ 控制问题无论从理论上还是从实际上都具有重要意义。

§1.2 线性控制系统的 H_∞ 设计方法

线性控制系统的 H_∞ 优化设计方法是本世纪 80 年代出现的一种新的设计方法。它虽然尚处于继续研究和发展阶段，但已显示出一系列的优越性，因而成为当前控制理论研究的比较活跃的前沿领域。下面简要回顾一下 H_∞ 设计方法的发展过程。

Zames(1981)首先提出了用系统加权灵敏度函数的 H_∞ 范数作为衡量系统对一类干扰的衰减能力的指标，由此产生了线性控制系统的 H_∞ 设计方法。随后，许多学者对此设计方法的发展做出了很大贡献，其中比较突出的有加拿大 G. Zames，B. Francis，M. Vidyasagar，英国 I. Postlethwaite，K. Glover，M. Grimble，美国 J. Doyle，M. Safonov，H. Özbay，H. Yang，荷兰 H. Kwakernaak，F. Curtain，V. Keuler，日本 M. Kimura 等人。近年来，许多中国学者也开始了这方面的研究，并取得了一定进展。

Zames，Francis(1983)指出使加权灵敏度指标 $\|WS\|_\infty$ ($S=(I+GK)^{-1}$ 为灵敏度函数)达到最小的最优函数 $X=WS$ 具有以下的全通(all-pass)形式

$$X(s)=D\prod_{i=1}^{m}\frac{c_i-s}{\bar{c}_i+s}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j-s}{\bar{a}_j+s}$$

其中 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为对象 G 在右半平面的极点；D 为实数；$c_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为复数；$\mathrm{Re}c_i>0, m=r-1, r$ 为 G 在右半平面零点个数。设 G 在右半平面零点为 $b_1,\cdots,b_t$，重数为 $m_1,\cdots,m_t$，则 $X(s)$ 满足以下约束：

$$\frac{d^j}{ds^j}X(s)\big|_{s=b_i}=\frac{d^j}{ds^j}W(s)\big|_{s=b_i}$$

其中，$j=0,\cdots,m_t-1, i=1,\cdots,t$。上述约束组成一组关于待定参数 $D, c_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的复系数代数方程组，这就是著名的 Zames 引理。当 G 右半平面零点个数较少(1,2 个)时，可以通过直接解代数方程组得到待定参数；而当 G 的右半平面零点较多时，解代数方程组困难较大。Zames 和 Francis 给出了一种变换求解最优函数 $X(s)$ 的方法。首先利用 Pick-Nevanlinna 变换逐步减少对 X 的约束个数，将问题化为单变量代数方程，求得单变量代数方程的解后，利用反变换得到最优函数 $X(s)$。

Kimura(1984)将 H_∞ 设计方法用于鲁棒镇定控制器的设计上，并给出了在加性摄动 ΔG 满足 G 和 $G+\Delta G$ 具有相同数目不稳定极点，且 $|\Delta G(jw)|<|r(jw)|$ 时，利用 Pick-Nevanlinna 变换方法求解鲁棒镇定控制器。Kwakernaak(1985)方法给出了利用多项式方法求取 H_∞ 最优控制器的解法。在 Safonov(1985)指出了求解 H_∞ 最优问题与最优近似问题(Glover，1984)的等价性后，H_∞ 设计算法得到了很大发展，出现了利用状态空间方法求解最优控制器的有限算法。另外，Helton(1986)讨论了单变量系统的多目标设计问题。以上是单变量系统的 H_∞ 设计方法发展概况。

1983 年～1984 年，Francis，Chang 等人分别将 H_∞ 设计方法用于多变量系统的灵敏度极小化设计。Francis，Helton，Zames(1989)给出的求解最优控制器的方法如下：应用 Krein 和

Ball 的一些理论结果，首先通过参数化方法将问题化为最优近似问题：求 $X\in RH_\infty$，使 $\|R-X\|_\infty\leqslant\beta$，即将问题简化为求解一个用稳定算子对不稳定算子的最佳范数逼近问题。进一步化为求 $S\in RH_\infty$，使 $\|A-S\|_\infty\leqslant 1$，$A=\beta^{-1}R$，$S=\beta^{-1}X$，定义

$$G=\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

对 $G^{\sim}JG$ 作 J 谱分解 $G^{\sim}JG=G_-^{\sim}JG_-$，其中 $G_-,G_-^{-1}\in RH_\infty$，令 $L=G_-G_-^{-1}$，则所有满足 $\|A-S\|_\infty\leqslant 1$ 的 S 由下式给出：

$$S=A-X_1X_2^{-1},\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=L\begin{bmatrix} Y \\ I \end{bmatrix},\text{其中}\,Y\in RH_\infty,\ \|Y\|_\infty<1$$

由上述 S 可以得到一族最优控制器。Chang，Pearson(1984)给出了利用矩阵 Pick-Nevanlinna 变换(插值)求解最优控制器的方法。多变量系统 H_∞ 设计的另一个有效解法为 Glover(1984)给出的最优近似方法。这种算法采用状态空间方法来进行计算，成功地解决了单灵敏度和单鲁棒性最优设计问题(一块问题)。然而，对于混合灵敏度指标(Kwakernaak(1985))设计问题及一般性指标设计问题，即标准控制结构设计问题，由于不存在解析最优解，因此只能通过逼近的方法得到近似最优解。对于这类最优设计问题，许多学者提出了很多算法。上述混合指标及一般性指标设计问题可以利用参数化方法将它们化为如下的二块或四块问题：

$$\min_{R\in RH_\infty}\|H_{11}-R\quad H_{12}\|_\infty,\quad \min_{R\in RH_\infty}\begin{Vmatrix} H_{11}-R \\ H_{21} \end{Vmatrix}_\infty,\quad \min_{R\in RH_\infty}\begin{Vmatrix} H_{11}-R & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{Vmatrix}_\infty$$

它们的解法有以下几种，为简便起见，以如下二块问题为例：

$$\min_{R\in RH_\infty}\begin{Vmatrix} H_{11}-R \\ H_{21} \end{Vmatrix}_\infty$$

Jonckheere，Verme(1986)和 Jonckheere，Juang(1987)分别给出了两种估计 Toeplitz+Hankel 算子谱半径 $\rho^2=$谱半径$(T_{H_{21}}^*T_{H_{21}}+H_{H_{21}}^*H_{H_{21}})$的逼近算法。其中 $T_{H_{21}}$ 表示关于 H_{21} 的 Toeplitz 算子；$H_{H_{21}}$ 为关于 H_{11} 的 Hankel 算子。由于算子$(T_{H_{21}}^*T_{H_{21}}+H_{H_{21}}^*H_{H_{21}})$是无穷秩算子，因此只能采用逼近的方法求得其谱半径。Jonckheere，Verme 及 Jonckheere，Juang 在文中给出的算法是利用二次型近似来得到 H_∞ 指标值 ρ 的状态空间方法的。另外，Kwakernaak(1987)提出了求解近似最优解的多项式方法。对于以上的二块或四块问题 Chu 等(1986)给出的 γ 迭代算法是使用得较多的方法；而 Doyle 等(1988)给出的状态空间解法则是一个非常有前途的解决一般性指标最优设计问题的方法。

1987 年，Francis 出版专著比较系统地介绍了 H_∞ 控制理论及其设计方法。在 Glover 和 Doyle(1988)提出了可通过求解两个 Riccati 方程来构成 H_∞ 控制器以后，从事 H_∞ 控制研究的人员急剧增加，H_∞ 控制理论研究取得了突破性进展。1989 年，Doyle 等人发表了著名的"DGFK"论文，不但严格地证明了可通过求解两个 Riccati 方程来获得 H_∞ 控制器，而且控制器的阶次与广义控制对象的阶次相等，同时明确了 H_∞ 控制的结构及其与 LQG 最优控制之间的联系。1992 年，Doyle 等人出版了专著(此书有中译本《反馈控制理论》，慕春棣译，清华大学出版社出版，1993 年 10 月)比较全面地总结了 H_∞ 控制理论的研究成果。

中国学者对 H_∞ 控制理论的研究也取得了不少成果。清华大学范玉顺、吴麒(1990)、解学书、钟宜生(1994)，上海交通大学胡庭姝、施颂椒(1990)，哈尔滨工业大学姚一新、王广雄(1990)等许多国内学者做了大量的有意义的研究工作，并出版了专著和译著。另外，在国外工

作的中国学者如顾大伟(英),杨宏(美)等在 H_∞ 控制理论的研究中也做出了很好的贡献。

除了以上提到的一些设计方法和结果外,还有一些研究成果也值得重视。Chen, Kung (1984)讨论了在 Hankel 范数指标下的最优设计问题。由于 Hankel 范数是介于 H_2 范数和 H_∞ 范数之间的一种范数,因此按 Hankel 范数指标设计可以看成是在性能和鲁棒性之间求折衷。Limebeer(1987,1988)研究了 H_∞ 最优设计中出现的零点极点相消问题,指出了对于 Momillan 阶为 n 的对象,存在阶次小于或等于 $n-1$ 的最优控制器。Grimble(1986,1987)研究了 H_∞ 设计方法与 LQG 设计方法的关系,从而给出了利用 LQG 多项式方法求解 H_∞ 最优控制器的一种解法。Tsai, Gu(1988)研究了加强的 H_∞ 最优问题,并给出了 H_∞ 超最优(Super-optimal)解的求法,所得的超最优控制器不仅极小化指标的最大奇异值,还极小化指标的其余奇异值,因此具有更好的鲁棒性。两自由度控制器设计方法(Vidyasagar,1985)给设计者提供了更多的设计自由度,是兼顾鲁棒性和跟踪性能的有效方法。

1981 年 Zames 提出 H_∞ 优化设计思想时,人们曾怀疑能否求得一般解;而十几年后的今天,研究者们不仅已经提出了多种求解方法,而且已使 H_∞ 优化设计理论不断完善,现在已形成了内容丰富的理论体系,成为控制理论的一个重要的分支。

H_∞ 控制具有如下几个特点:

(1)确立了系统地在频域中进行回路整形的技术和手段,充分地克服经典控制理论与现代控制理论各自的不足,使经典的设计概念与状态空间方法融合在一起。

(2)多种控制问题均可变换为 H_∞ 控制的标准问题。它更加接近实际情况,并满足实际需要,具有一般性。

(3)给出了构成鲁棒控制系统的设计方法。它充分考虑系统不确定性带来的影响,不仅能保证控制系统的鲁棒稳定性,而且能优化一些性能指标。

(4)它是频域内的最优控制理论。但由于控制器求解时采用了状态空间方法,因而它既有频域方法的优点,又具有时域方法的优点(精确计算,最优化)。H_∞ 控制器的参数设计比最优调节器更加直接。

正因为如此,H_∞ 控制理论的应用问题,自 1987 年起就获得了广泛研究,近几年已逐步走向应用实际,适合更多的实际要求,在航空、航天、航海、机器人,各种工业过程领域都得到了一些应用研究。目前,H_∞ 控制理论的研究成果已经有许多编入到 Matlab 和 MATRIX 等高可靠性的商业软件及各种控制系统 CAD 软件包中。这些应用软件为 H_∞ 控制理论的广泛应用和进一步的发展提供了一定的技术支持和开发手段。

H_∞ 控制理论正在不断地发展和完善,并与其它控制理论相互结合、渗透和发展。已经从单变量系统发展到多变量系统;从线性系统发展到非线性系统;从定常系统发展到时变系统;从连续系统发展到采样系统;从小系统发展到大系统,其中有一个十分值得重视的方向就是从集中参数系统发展到分布参数系统。

§1.3 分布参数系统 H_∞ 控制理论发展概况

上一节,我们简述了集中参数系统 H_∞ 控制的基本原理和 H_∞ 设计的各种方法。我们自然会想到能否将上述思想方法推广到分布参数系统,这样就可以更大发挥 H_∞ 控制方法的优点和作用,使系统对干扰及摄动具有一定的鲁棒性和适应性。这对于实际控制系统的设计将具有

很高的应用价值，因为一个控制系统具有鲁棒性是它能真正用于工程实际的关键。

由于 H_∞ 控制系统具有优异的特性，近年来受到国内外学者的高度重视，与集中参数系统 H_∞ 控制的研究相比，对分布参数系统的 H_∞ 控制理论及应用的研究起步较晚，80 年代中后期才开始有关的研究工作。虽然起步较晚，但进展非常迅速，已取得了一系列有价值的成果。在集中参数系统 H_∞ 控制理论的影响下，分布参数系统 H_∞ 控制问题的解决途径基本上分为两大类，一类是频域途径，一类是状态空间途径，并得到了与集中参数系统相平行的结果(R. Curtain 1990)。对于状态反馈 H_∞ 问题，也是通过解一个 Riccati 方程即可解决的(B. V. Keulein M. Roters, R. Curtain 1993)。对于输出反馈 H_∞ 问题，通过求解双 Riccati 方程来获得 H_∞ 控制器(B. V. Keulein, 1994, 1993)，只是相关的 Riccati 方程是非标准的算子值方程。关于标准算子值 Riccati 方程(即 LQG 型 Riccati 方程)已有合理有效的近似求解方法。对于非标准 Riccati 方程(H_∞ 型 Riccati 方程)的求解目前还没有有效方法，如何求解 H_∞ 型算子值 Riccati 方程是状态空间方法的瓶颈问题，是值得花大力气进行研究的具有重要意义的研究领域。

关于频域方法，对于 Callier-Desoer 类系统和 Pritchard-Salamon 类系统，R. F. Curtain (1989)给出了一个很好的综述，以下简要介绍之。

Callier-Desoer(1978, 1980, 1982)给出一种线性时不变无穷维系统的传递函数类的定义，其脉冲响应函数由如下形式函数定义：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ f_a(t)+\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i\delta(t-t_i), & t\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $f_a(t)e^{-\mu t}\in L_1[0,\infty)$，$\mu\in R$，$t_i, f_i\in R$，且 $0<t_0<t_1<t_2<\cdots$，$\sum\limits_{i=0}^{\infty}|f_i|e^{-\mu t_i}<\infty$，$\delta$ 为 Delta 函数。

将上述形式的函数 $f(t)$ 全体构成的集合记为 $A(\mu)$。显然，$A(\mu)$ 为具有单位元的可交换的卷积 Banach 代数。集中参数系统的脉冲响应函数为连续函数，无冲量成分；而 $C-D$ 类分布参数系统的脉冲响应函数中含有冲量成分，这从上面的定义可以看出。

如果存在实数 μ_1，$\mu_1<\mu$，且 $f(t)\in A(\mu_1)$，则称 f 属于 $A_-(\mu)$。显然，$A_-(\mu)$ 为 $A(\mu)$ 的子代数。用 $\hat{A}_-(\mu)$ 表示 $A_-(\mu)$ 的 Laplace 变换，$\hat{A}(\mu)$ 表示 $A(\mu)$ 的 Laplace 变换。$\hat{A}(0)$ 则表示稳定的系统传递函数类。$\hat{A}(0)$ 是 H_∞ 类的真子集(在 $Re(s)>0$ 内有界、解析)。显然，$\hat{A}(\mu)$ 是可交换域，但不是 Bezout 域，即 $\hat{A}(\mu)$ 中的元素有的不能做互质分解，而互质分解在 H_∞ 控制中起关键作用，所以还必须引入 $\hat{A}_-(\mu)$ 的商域 $\hat{B}(\mu)=[\hat{A}_-(\mu)][\hat{A}_-^\infty(\mu)]^{-1}$，其中 $\hat{A}_-^\infty(\mu)=\{\hat{f}\in\hat{A}_-(\mu)$ 且 $\hat{f}(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant\mu$ 内为无穷远处远离零点有界$\}$。类似地，可以定义矩阵值函数空间 $M(\hat{B}(\mu))$，$M(\hat{A}_-(\mu))$，在 $M(\hat{B}(0))$ 空间内可定义互质分解，称 $G\in M(\hat{B}(0))$ 有双互质分解，当且仅当存在 $N, M, \tilde{N}, \tilde{M}, X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}\in M(\hat{A}_-(0))$ 使得

$$G=NM^{-1}=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{X} & -\tilde{Y}\\ -\tilde{N} & \tilde{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & Y\\ N & X\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\qquad \text{Bezout 等式}$$

基本控制问题：对于如图 1.1 所示反馈系统，设计反馈控制器 K，使得闭环系统 (G,K) 输入/输出稳定。

系统 (G,K)，$G,K\in M(\hat{B}(0))$ 输入/输出稳定，当且仅当

(a) $S=(I-GK)^{-1},KS,SG,I-KSG$ 均属于 $M(\hat{A}_-(0))$

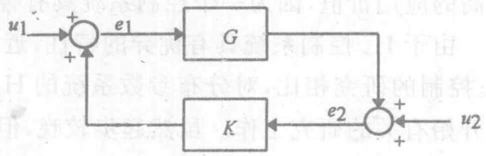

图 1.1 反馈控制系统

(b) $\inf\limits_{C^{+1}}[\det(I-KG)(s)]>0$

假定 $G\in M(\hat{B}(0))$ 有双互质分解

$$G=NM^{-1}=\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X} & -\widetilde{Y}\\ -\widetilde{N} & \widetilde{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & Y\\ N & X\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

则所有使 G 稳定((G,K)输入/输出稳定)的控制器 $K\in M(\hat{B}(0))$

由下列参数化公式给定(Youla 参数化公式)

$$K(s)=(Y-MQ)(X-NQ)^{-1}=(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y}-Q\widetilde{M})$$

其中 $Q\in M(\hat{A}(0))$

此结果与集中参数系统完全相同。

关于综合问题,采用状态空间描述方法常常是方便的。Pritchard-Salamon 定义一类系统如下:

$$\begin{cases}x(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$$

其中算子 A 在可分的 Hilbert 空间 W 中生成 C_0-半群 $S(t)$,算子 B、C 为对于 $S(\cdot)$是容许输入输出算子,$x(0)=x_0\in V$;且 $W\subset V$,算子 D 为有限秩算子。$W\subset V$ 意味着 $W\subset V,\overline{W}=V,W\to V$ 连续内射。

设(C,A,B)为 $P-S$ 类系统,如果(A,B)为指数可稳的,(C,A)是指数可检测的,那么 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B\in M(\hat{B}(0))$;如果$(D,C,A,B)$是 $P-S$ 类系统,而且(A,B)是指数可稳的,(C,A)是指数可检测的,那么传函 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 有如下双互质分解:

$$G=NM^{-1}=\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$$

其中

$$\begin{aligned}
M(s)&=I+F(sI-A_F)^{-1}B, & \widetilde{M}(s)&=I+C(sI-A_H)^{-1}H\\
N(s)&=D+C_F(sI-A_F)^{-1}B, & \widetilde{N}(s)&=D+C(sI-A_H)^{-1}B_H\\
X(s)&=I-C_F(sI-A_F)^{-1}H, & \widetilde{X}(s)&=I-F(sI-A_H)^{-1}B_H\\
Y(s)&=-F(sI-A_F)^{-1}H, & \widetilde{Y}(s)&=-F(sI-A_H)^{-1}H
\end{aligned}$$

且 $N,M,\widetilde{N},\widetilde{M},X,\widetilde{X},Y,\widetilde{Y}\in M(\hat{A}_-(0))$,这里 $F\in\mathscr{L}(V,R^m)$,使得 $A_F=A+BF$ 为指数稳定的,$H\in\mathscr{L}(R^p,W)$使得 $A_H=A+HC$ 为指数稳定,$C_F=C+DF,B_H=B+HD$。

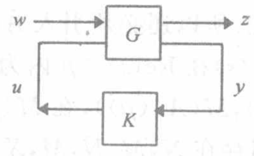

图 1.2 标准问题框图

各种 H_∞ 控制问题都可化为如图 1.2 所示的标准问题。图中 w 为外部输入信号,一般包括指令(参考)信号,干扰和传感器噪声;z 为受控输出,通常包括跟踪误差,调节误差,执行机构输出;u 为控制信号;y 是量测输出。w,z,u,y 均具有合适维数。图中 G 和 K 分别表示广义对象和控制器。前者是系统给定部分,而控制器 K 有待设计。需要指出广义对象并不等于实际的受控对象。不同的设计目标,哪怕是同一受控对象,其广义对象也可能不同。按 w,z,u 和 y 的维数将 G 分块成

$$G=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}$$

如果$(I-G_{22}K)$存在逆，则

$$z=(G_{11}+G_{12}K(I-G_{22}K)^{-1}G_{21})w$$

由 w 到 z 的传递函数矩阵 T_{zw} 为

$$T_{zw}=F_l(G,K)\triangleq G_{11}+G_{12}K(I-G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

它是 K 的线性分式变换。

假定(C_i,A,B_j)，$i,j=1,2$ 是 $P-S$ 系统，(A,B_2)是指数可稳的，(C_2,A)是指数可检测的，如果

$$G_{ij}\triangleq D_{ij}+C_i(sI-A)^{-1}B_j,\quad i,j=1,2$$

这里 D_{ij}是 $p\times m$ 矩阵且 $D_{22}=0$，则 H_∞ 控制的标准问题是：求一控制器 $K\in M(\hat{B}(0))$，使 G 稳定，并使传递函数矩阵 $F_l(G,K)$的 H_∞ 范数极小，即

$$\inf_{K\ stabilizing\ G}\|F_l(G,K)\|_\infty$$

利用控制器参数化公式及 $P-S$ 系统的性质，可以证明上述 H_∞ 控制标准问题与下面的模型匹配问题等价。

$$\inf_{Q\in M(\hat{A}\_(0))}\|T_1-T_2QT_3\|_\infty$$

其中$T_1(s)=D_{11}+[C_1+D_{12}F-D_{12}F]\left[sI-\begin{pmatrix}A_F & -B_2F\\ 0 & A_H\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_1+HD_{21}\end{bmatrix}$

$$T_2(s)=D_{12}+(C_1+D_{12}F)(sI-A_F)^{-1}B_2$$

$$T_3(s)=D_{21}+C_2(sI-A_H)^{-1}(B_1+HD_{21})$$

这里 F 使 $A_F=A+B_2F$ 为指数稳定的，H 使 $A_H=A+HC_2$ 为指数稳定。显然，H_∞ 控制标准问题转化为关于 $Q\in M(\hat{A}_(0))$的仿射，但仍然是困难的。当 $T_2=T_3=I$，模型匹配问题就退化为熟知的 Nehari 问题。此时可以采用[7]中第 4 章的方法求解。对于鲁棒镇定等 H_∞ 控制问题，可通过谱分解将模型匹配问题转化为 Nehari 问题。此外，也可按照集中参数系统迭代方法求解，或转化为求解两个 H_∞ 型 Riccati 方程求解 Nehari 问题。

在本书中，我们将介绍一些分布参数系统 H_∞ 控制理论的基本结果。在第二章中，我们先作一些数学准备，介绍泛函分析方面的有关知识。第三章论述频域设计方法。第四、五章介绍直接状态空间方法。第六章介绍鲁棒自适应控制问题。第八章讨论滞后系统的 H_∞ 控制问题。第九章介绍有限维 H_∞ 控制器设计问题。

随着现代空间技术与科学技术的发展，对控制的精度及其他性能要求将会越来越高，因而 H_∞ 控制方法日益受到人们的重视，已在柔性机器人和航空航天领域得到了初步应用。但是，研究工作在国内外还处在起步阶段，有许多重大理论问题及实际应用中出现的问题，例如，非最小相位系统的 H_∞ 控制、奇异 H_∞ 控制问题以及系统的有限维近似和有限维 H_∞ 控制器等，尚需进一步的研究。本书的目的主要是介绍作者及国内外学者在这一新领域的研究内容及基本结果，以期引起国内控制、应用数学等领域研究人员的重视，开展这方面的研究工作，进一步发展和完善分布参数系统的 H_∞ 控制理论，使我国在这一领域的理论与应用研究处于国际领先地位。

参 考 文 献

〔1〕Curtain. R. F. H_∞ Control for distributed parameter systems: a survey. Proc. of the 29th IEEE CDC. Dec. 1990,2:956－960
〔2〕Curtain. R. F. Time and frequency domain methods for infinite-dimensional H_∞-control. Proc. IFAC Control of Distributed parameter system. France: 1989,1:201－204
〔3〕解学书，钟宜生. H_∞控制理论. 北京：清华大学出版社，1994
〔4〕胡跃明，周其节. 分布参数变结构控制系统. 北京:国防工业出版社，1996
〔5〕王康宁. 分布参数控制系统. 北京:科学出版社，1986
〔6〕范王顺. H_∞范数设计理论研究及工程应用. 清华大学博士论文. 1990
〔7〕Francas, B. A. A Course in H_∞ control theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York:Springor-verlay,1987
〔8〕Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: model refrence transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse. IEEE Trans. Acrtomat, Contr. 1981,26(4):301－320
〔9〕Doyle, J. C. Glover, K, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problams. IEEE Trans. Automat. control 1989,34(2):831－847
〔10〕王兴成，贾欣乐等. H_∞控制理论及应用，第一届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集. 北京:科学出版社，1993:1028－1032
〔11〕王兴成，贾欣乐. H_∞控制理论及其应用. 自动化理论技术与应用——中国自动化学会第九届青年学术年会论文集. 长沙:中南工业大学出版社，1993: 83－87
〔12〕王兴成，贾欣乐. 连续加热炉温度控制系统的H_∞优化设计，第一届中国智能控制与智能自动化学术会议论文集. 沈阳:东北大学出版社，1994: 577－580
〔13〕Wang Xing cheng. Finite-dimensional H_∞ control for a class of distributed parameter system. Proc. of IEEE ICNNSP'95. China 1995:553－557
〔14〕Kimura, H. Conjugation, interpolation and modol-matching in H_∞. Int. J. Contr. 1989,49: 269－307
〔15〕Ball, J. A., Helton, J. W. Nonlinear H_∞ Control theory for stable plants. Math. of Control, singals, and systems. 1992,5:233－261
〔16〕Dehleh, M. A. Optimal compensators for continuous-time systems. IEEE Trans. Auto Contr. 1987,32(2): 889－895
〔17〕Foias. C. Weighted sensitivity minimization for delay systems. IEEE Frans. Auto. Control. 1986,31(2):763－766
〔18〕Young, N. J The Nevenlinna-pick problem for matrix-valued functions. J. Operator Theory, 1986,15(2):239－265
〔19〕Grimble, M. J. H_∞ robust controller for self-tuning control applications, part 2 self-tuning and robustness. Int. J. Control, 1987,46:1819－1840
〔20〕Grimble M. J. Generalized LQG and H_∞ multivariable controllars. Proc. ACC. Minneapo-

lis. 1987:286—290

〔21〕Grimble M. J. Optimal H_∞ robustness and the relationship to LQG design problens, Int, J. Control, 1986,43:256—268

〔22〕Glover, K, Doyle, J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. Systems and control letters, 1988,11:167—172

〔23〕Gu, D. W, Tsai, M. et al. An algorithm for super-optimal H_∞ design: the two block case. Automatica. 1989,25:215—221

〔24〕Flamm, D. S., Mitter, S. K. H_∞ sensitivity for delay systems: part Ⅰ. systems and control letters. 1987,9:17—24

〔25〕Foias, C. Tannenbaum, A. On the H_∞ optimal sensitivity problem for systems with delays. SIAM J. Control and Optimization. 1987,25:686—705

〔26〕Curtain, R. F., Kenlen, Van. Some recent results on robust control for infinite-dimensional systems. proc. 29th IEEE CDC. 1990,3:2100—2114

〔27〕Curtain R. F. Robust stabilizability of normalized coprime factors: the infinite-dimensional case. Int. J. Control. 1990,51:1173—1190

〔28〕Keulen, Van. Petters, M. et al. H_∞ Control with state-feedback, the infinite-dimensional case. Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control 1993,3:1—39

〔29〕Veulen, Van. Equivelent condition for the solvability of the infinite-dimensional LQ-problem with unbounded input and out put operators. Proc. of the 31st IEEE CDC. 1992:3121—3122

〔30〕Keulen, Van, H_∞ Control with measurement-feedback for pritchard-salamon systems. Int. J. Robust and Nonlinear control. 1994,4:321—552

〔31〕Özbay. H. On the optimal two-block H_∞ Compensators for Distributed unstable plants. Proc of IEEE CDC. 1992,2:1021—1025

〔32〕Özbay, H. and Tannenbaum, H. A skew toeplitz approach to the H_∞ optimal control of multivarieble distributed systems. SIAM J. Control and optimization, 1990,28:653—670

〔33〕Özbay, H. Controller redustion in the 2—block H_∞ optimal design for distributed plants. Int. J. Control., 1992,54:1291—1308

〔34〕Khargonekar, P. P. Özbay, H. et al. The four block problem: stable plants and rational wieghts. Int. J. Control, 1989,50:994—1004

〔35〕Gu, G. Khargonekar, P. P. et al. Approximation of infinite-dimensional systems. IEEE Trans. on AC. 1989,34:610—618

〔36〕Flamm, D. S. and Yang, H. H_∞-optimal mixed senstivity for genaral distributed plants. Proc. of 29th IEEE CDC. 1990:134—139

〔37〕Yang, Hong. Krein space approach to H_∞ mixed sensitivity minimization for a class of infinite dimensional Systems. IEEE Trans. on AC. 1995,40(5):865—881

〔38〕Yang, H. On a class of irrational two-block Nehari problem with H_∞ control applications Proc, IEEE CDC. Lake Buena vista. FL, Dec. 1994,4:2940—2945

第二章 H_∞ 设计方法的数学基础及基本理论

H_∞ 最优控制设计问题是一个在函数空间内的优化问题。本章介绍本书涉及的一些有关的泛函分析基本知识和基本理论。除必要的证明以外，这里只介绍基本结论。关于更严密的数学证明，有兴趣的读者可参阅有关的数学参考书。不过，只要理解本章内容，就可以学好本书所介绍的 H_∞ 控制理论。

§2.1 Banach 空间和 Hilbert 空间

1. 距离空间

距离：设 X 是一个非空集合，假如对于任意两个元素 $x,y\in X$，均有一定数 $\rho(x,y)$ 与之相对应，且满足如下条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$；$x,y,z\in X$，

则称 $\rho(x,y)$ 是 x 和 y 之间的距离。称 X 按距离 $\rho(x,y)$ 成为距离空间，记为 (X,ρ)，而称 X 中的元素为点。

收敛：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x\in X$，若当 $n\to\infty$ 时，数列 $\rho(x_n,x)\to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ 按距离 $\rho(x,y)$ 收敛于 x，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

此时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列，x 称为 $\{x_n\}$ 的极限。

2. 线性赋范空间

赋范空间：设 X 是复数域 C 上的线性空间，若在 X 上定义实值函数 $\|x\|$ ：$x\to R$ 满足下列条件：

(1) 对任意 $x\in X$，$\|x\|\geqslant 0$；$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；(非负性)

(2) 对任意 $x\in X$ 及数 λ，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$；(齐次性)

(3) 对任意 $x,y\in X$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，(三角不等式)

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数；而 X 按此范数 $\|\cdot\|$ 成为线性赋范空间，记为 $(X,\|\cdot\|)$。

在线性赋范空间 X 中，可以由范数引出两点间的距离：

对于 $x,y\in X$，定义

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

则 $\rho(x,y)$ 满足距离的定义，称 $\rho(x,y)$ 为由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的距离。这样，我们可以在线性赋范空间中定义并讨论点列的收敛性。设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，若有 $x\in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$$

则称点列$\{x_n\}$按范数收敛于x。

3. Banach 空间

设(X,ρ)是距离空间，$\{x_n\}$为X中的点列。若对于任意$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)>0$，使得当$i,k\geqslant N(\varepsilon)$时，有$\rho(x_i,x_k)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为$X$中的Cauchy序列。

在复数域中，点列收敛的充分必要条件为它是Cauchy序列，但在一般的距离空间中，Cauchy序列未必是收敛点列。例如，若令$X=(0,1]$，则$x_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$是X中的Cauchy序列，但它不收敛于X中的点。

完备空间：若距离空间X中的任一Cauchy序列均收敛于X中的点，则称X是完备空间。

Banach 空间：完备的线性赋范空间称为Banach空间。

例：n维欧几里得空间E^n按欧几里得距离成为Banach空间。

例：令$C[a,b]$表示区间$[a,b]$上所有连续函数全体，定义

$$\|g(x)\|=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$$

则$(C[a,b],\|\cdot\|)$为Banach空间。

设S是Banach空间X中的一个子集，如果其满足

$$x+y\in S,\ \forall\ x,y\in S$$

和

$$\lambda x\in S,\ \forall\ x\in S,\lambda\in C$$

则S是X的一个线性子空间。如果S中的每一个在X中收敛的点列，在S中均有极限，则S是一个闭子空间。

如下定理给出线性赋范空间和Banach空间的子空间的性质。

定理 2.1.1：设M为线性赋范空间X的一个线性子空间，且M为开的，则$M=X$。

定理 2.1.2：设M为Banach空间X的一个线性子空间，则M为Banach空间的充要条件是M为闭的。

有限维线性赋范空间是维数为有限的线性赋范空间。当然也具备上述的基本性质，但是有限维线性赋范空间有其特殊的性质。主要结论有：

(1) n维线性赋范空间与n维欧氏空间是线性同构和拓扑同胚的，因而可以与R^n看作是“等同”的。

(2) 线性赋范空间成为有限维空间的充要条件是任意有界闭子集都是紧的。

(3) 有限维线性赋范空间是Banach空间，从而任意线性赋范空间的有限维子空间都是闭的。

4. Hilbert 空间

内积空间：设H是数域F上的线性空间，若对于任意$x,y\in H$均对应一个数$\langle x,y\rangle\in F$，满足条件：

(1) $\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle$，$\forall\ x,y\in H$；

(2) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$，$\forall\ x,y,z\in H,\forall\ \alpha,\beta\in F$；

(3) $\langle x,x\rangle\geqslant 0,x\in H$，$\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$。

则称$\langle x,y\rangle$为H的内积。当F为复数域C(或实数域R)时，称H为复(或实)内积空间。易证，内积对第二变元有共轭线性，对于任意$x,y,z\in H$和$\alpha,\beta\in C$，$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,$