高职高专规划教材

Linear Algebra

线性代数

王社军　董　珺　主编

中国轻工业出版社

高职高专规划教材

线 性 代 数

王社军
董 珺 主编

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/王社军，董珺主编. —北京：中国轻工业出版社，2009.4

高职高专规划教材

ISBN 978-7-5019-6522-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①王…②董… Ⅲ.线性代数-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 102327 号

责任编辑：刘云辉

策划编辑：刘云辉　责任终审：唐是雯　封面设计：锋尚设计

版式设计：王培燕　责任校对：郎静瀛　责任监印：张　可

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编：100740）

印　　刷：河北省高碑店市鑫昊印刷有限责任公司

经　　销：各地新华书店

版　　次：2009 年 4 月第 1 版第 2 次印刷

开　　本：720×1000　1/16　印张：9.75

字　　数：191 千字

书　　号：ISBN 978-7-5019-6522-9　定价：16.00 元

读者服务部邮购热线电话：010—65241695　85111729　传真：85111730

发行电话：010—85119845　65128898　传真：85113293

网　　址：http：//www.chlip.com.cn

Email：club@chlip.com.cn

如发现图书残缺请直接与我社读者服务部联系调换

90238J2C102ZBW

前　言

线性代数课程在高等工科学校的教学计划中是一门基础理论课. 由于线性问题广泛存在于技术科学的各个领域，某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题，也常“离散化”为有限维问题来处理，因此线性代数的理论与方法已经渗透到现代科学、技术、经济、管理的各个领域，提供描述、处理问题的思想和方法. 随着科学技术数学化和计算机的广泛应用，线性代数在现代科技和高等教育中的地位和作用愈显重要. 尤其在计算机日益普及的今天，解决大型线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程人员常遇到的问题，因此本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科，尤其在计算机、通讯、电子、机械、电气等学科领域，这就要求学生具有关于本课程的基础知识，并熟练地掌握它的方法.

20 世纪以来数学科学的不断发展，更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 随着科学技术数学化趋势的增长和社会信息化的飞速发展，数学在提高劳动者素质、培养适应现代化需要的高级专门人才方面的重要作用显得越来越重要. 数学除了锻炼敏锐的思辨能力、探索新知、发现真理以外，还具有训练全面系统、逻辑严密的人脑的开发功能. 因而，作为高校的基础课的《线性代数》课程已经成为培养高级科技人才、管理人才不可或缺的重要条件. 无论是工科、理科，还是管理学科以及文科法学科，数学的基础地位是毋庸置疑. 因而，必须加强数学类基础课教学，夯实基础，为后续课的学习做好准备，为以后的进一步深造和不断学习创造条件.

本书是依据教育部制定的《高职高专教育线性代数课程基本要求》而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则. 在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，从而确定了编写本书的指导思想：适当淡化运算上的一些技巧；减少了一些抽象的理论推导；重视应用；强调基本方法；注意利用数学软件包 MAPLE 求解数学问题. 并且根据不同专业的需要和教学时数，对部分内容加了“ * ”号，在保证教学要求的同时，让老师比较容易组织教学，学生比较容易理解，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大提高.

参加本书编写的有王社军、董珺、铁军、魏杰.

本书由王社军、董珺担任主编. 祁忠斌副教授审阅了本书的全部原稿并对本书的编写提供了许多帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编者

目　　录

第一章　行　列　式

在生产实践和科学研究中，有许多问题可归结为一个线性方程组，行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的，并成为分析和解决线性方程组问题的主要工具．除此之外，行列式在许多理论和实际应用问题中也发挥着重要作用．

本章介绍 n 阶行列式的定义、基本性质、计算方法及其在求解线性方程组中的应用．

§1　n 阶行列式的定义

本节通过用消元法求解二元、三元线性方程组来建立二阶、三阶行列式的概念，并对其结构与规律进行分析，归纳出 n 阶行列式的一般定义．

一、二阶、三阶行列式

引例　用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用 a_{22} 乘方程组（1－1）的第一式各项，用 a_{12} 乘方程组（1－1）的第二式各项，得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$$

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$$

以上两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同理，用消元法也可以消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1－1）有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

式（1－2）提供了方程组（1－1）在条件 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 下解的一般公式，但形式比较复杂，难于记忆．为了便于使用，我们引入新的记号，将（1－2）表达为比较简洁的形式．

为此引进记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，用它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

其中横排称“行”，纵排称“列”，数 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 称为行列式的元素. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标，表示该元素所在的行数；第二个下标 j 称为列标，表示该元素所在的列数.

计算二阶行列式的值可用对角线法则：将左上角至右下角的对角线称为主对角线，将右上角至左下角的对角线称为辅对角线，于是，二阶行列式的值等于主对角线上两个元素的乘积与辅对角线上两个元素的乘积之差.

根据二阶行列式的定义，式（1－2）中 x_1，x_2 的分子与分母均可用二阶行列式表示，若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，方程组（1－1）的解可表示为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中分母 D 是由方程组（1－1）的系数所确定的二阶行列式，称为方程组(1－1)的系数行列式；分子 D_1 与 D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别替换系数行列式 D 中 x_1 和 x_2 所在列的系数所得到的二阶行列式.

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

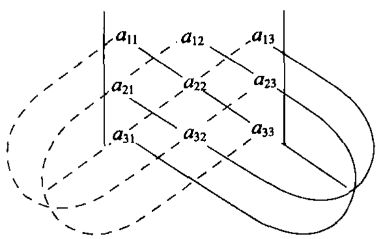
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中 D，D_1，D_2，D_3 是由三行三列元素所构成的行列式，称为三阶行列式. D 是由方程组（1-4）的系数所确定的三阶行列式，称为方程组（1-4）的系数行列式；D_1，D_2，D_3 是用常数项 b_1，b_2，b_3 分别替换系数行列式 D 中 x_j（$j=1$，2，3）所在列的系数所得到的三阶行列式. 则当 $D\neq 0$ 时，方程组（1-4）的解可表示为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

计算三阶行列式的值遵循对角线法则，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}$$



其中沿主对角线方向实线连接的 3 个元素的乘积取正号，沿辅对角线方向虚线连接的 3 个元素的乘积取负号，然后作代数和.

由三阶行列式的定义可知，三阶行列式的展开式共有 3！=6 项，每项均为位于不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，且正负项各占一半.

例 1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 + 7 + 56 + 5 + 3 = 69 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 69, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 23, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -23$$

所以，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{3}.$$

二、排列与逆序

n 阶行列式的定义是对二阶、三阶行列式的结构规律分析、归纳得到的. 为此先介绍排列的有关知识.

定义 1 由 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列. 其中按自然数顺序（即递增的顺序）构成的 n 级排列称为标准排列，其他任一 n 级排列"$j_1j_2\cdots j_n$"均为非标准排列.

通常将 n 级排列的总个数记为 P_n，则 $P_n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$.

在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，若有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面，则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，且有

$$\begin{aligned}\tau(j_1j_2\cdots j_n)\ =\ &（j_2\text{ 前面比 }j_2\text{ 大的数的个数}）+（j_3\text{ 前面比 }j_3\text{ 大的数的个数}）\\&+\cdots+（j_n\text{ 前面比 }j_n\text{ 大的数的个数}）\end{aligned}$$

逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列. 标准排列为偶排列（逆序数是零）.

例如，排列 23154 中，2 在 1 前面，3 在 1 前面，5 在 4 前面，共有 3 个逆序，即 $\tau(23154)=3$，所以，23154 是奇排列.

例 2 求由 1，2，3 构成的三级排列，并分别判断其奇偶性.

解 数 1，2，3 构成 $3!=6$ 个三级排列，即 123，231，312，132，213，321，其中

$$\tau(123)=0,\quad \tau(231)=2,\quad \tau(312)=2,\quad \tau(132)=1,\quad \tau(213)=1,\quad \tau(321)=3$$

所以，123、231、312 是偶排列，132、213、321 是奇排列.

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，仅将两个元素 i_s 与 i_t 对调，称为一个对换，记作对换 $(i_s,\ i_t)$. 相邻元素的对换称为相邻对换.

例如，排列 21354 施以对换（1，4）后得到排列 24351，施以相邻对换（4，5）得排列 21345.

不加证明地，可以得到下面结论：

定理 1 任一排列经过一次对换后奇偶性发生改变.

由此可知，对换的次数就是排列奇偶性改变的次数.

推论 偶排列调换成标准排列的对换次数为偶数，奇排列调换成标准排列的对换次数为奇数.

三、n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义可知，三阶行列式（1－5）有如下特征：

（1）它表示所有取自不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和．各乘积项除正负号外可一般地表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中行标按标准次序 123 排列，列标 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的某个排列．当列标 $j_1j_2j_3$ 取遍三级排列（见例 2）时，就得到三阶行列式的所有项．这样的排列共有 3！＝6 种，故三阶行列式共有 6 项．

（2）每一项的符号：当行标按标准排列后，对应的列标排列是偶排列时取正号，是奇排列时取负号．即每一项的符号可以表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$．

根据以上规律，三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中记号 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 的一切三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和．

类似地，二阶行列式也具有上述特点，从而可将二阶行列式表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中记号 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1，2 的一切二级排列 j_1j_2 求和．

根据上述规律，并由二阶、三阶行列式的定义，可以给出 n 阶行列式的定义．

定义 2 用 n^2 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式．其中符号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 1，2，…，n 这 n 个数的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和．它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各乘积项的符号是：当该项的行标按标准排列后，对应的列标是偶排列时取正号，是奇排列时取负号．当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，就得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项，共有 n！项．

n 阶行列式 D 可简记为 $D=|a_{ij}|$．特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆．

例3 计算 n 阶下三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

解 设 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现找寻 D 中不为零的项. 可看出第一行只有 $a_{11}\neq 0$，从而 $j_1=1$，含第一行其他元素的乘积项皆为零；第二行 a_{21} 已不能再取，只有 $a_{22}\neq 0$，含第二行其余元素的乘积项皆为零，从而 $j_2=2$. 同理，有 $j_3=3$，$j_4=4$，$\cdots$，$j_n=n$. 因此，D 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零，又 $\tau(12\cdots n)=0$，可知这一项取正号. 所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

以及主对角线行列式（其他位置的元素全为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

另外需要指出，还可用下面结论来确定 n 阶行列式中各乘积项的符号.

定理2 若 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则它的一般项可记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-6}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

由此，n 阶行列式的定义也可取下面形式：

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

或者

$$D=\sum_{i_1\cdots i_nj_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

思考与训练

1. 在 n 个数码 1，2，$\cdots$，n 的一个排列中，位于第 k 个位置的数 n 作成多少个逆序？

2. 选择 i，k，使

(1) 1 2 7 4 i 5 6 k 9 为偶排列；(2) 1 i 2 5 k 4 8 9 7 为奇排列.

3. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 21$ 的逆序数是多少？

4. 证明 n 阶辅对角线行列式（其他位置全为0）

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 $\lambda_i \neq 0$，$i=1$，2，$\cdots$,n.（提示：记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，再由行列式定义去证）.

§2 行列式的性质

由行列式的定义可知，一个 n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，而每一项都是由位于不同行不同列的 n 个元素的乘积构成，同时还要确定其正负号，因此当行列式阶数较高时，直接根据定义计算行列式的值是比较困难的，为此本节介绍行列式的性质，并用性质来简化行列式的计算.

把行列式 D 的行与列顺次互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记作 D'或 D^T. 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则\ D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

证明 D 中元素 a_{ij}位于 D'中第 j 行第 i 列，于是取自 D 中不同行不同列的一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的各元素，必对应位于 D'中不同的列不同的行，即对应着 D'中的一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

因此

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D'$$

性质 1 表明，行列式的行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式改变符号.

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow i\text{行}\\ \\ \leftarrow s\text{行}\\ \\ \end{matrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow i\text{行}\\ \\ \leftarrow s\text{行}\\ \\ \end{matrix}$$

由于 D_1 是 D 中第 i 行与第 s 行交换而得，各元素所在的列不变，使 D 中一般项

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots i_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

对应着 D_1 中一般项

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots i_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_i}\cdots a_{ij_s}\cdots a_{nj_n}$$

这两个一般项的行标排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 与 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反，其列标排列 $j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n$ 未发生变化，从而使得

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots i_s\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots i_s\cdots j_n)}$$

这就是说 D_1 中每一项与 D 中相应项的符号相反．所以 $D_1=-D$．证毕．

推论 若行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零．

证明 把相同的两行（列）互换，有 $D=-D$，所以 $D=0$．

性质 3 用数 k 乘行列式的一行（列），等于用数 k 乘此行列式．即若 $D=|a_{ij}|$，则

$$D_1=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=kD$$

证明 当 $k=0$ 时，显然成立．当 $k\neq0$ 时，有

$D_1=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD$. 证毕.

推论 1 若行列式中有两行（列）对应元素成比例，则此行列式的值为零．

推论 2 若行列式某行（列）元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面．

性质 4 若行列式 D 的某行（列）元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和．这两个行列式是分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式 D 相同．即若

$$D=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$.

证明 由行列式的定义知

$$
\begin{aligned}
D &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\
&= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&= D_1+D_2.
\end{aligned}
$$

证毕.

综合性质4、性质3和推论2，可得

性质5 若用数 k 乘行列式的某行（列）各元素再加到另一行（列）对应元素上，则行列式的值不变.

利用行列式的性质计算行列式，可以使计算简化，下面举例说明.

例1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$，求 $D=\begin{vmatrix} 8a_{11} & -2a_{12} & -6a_{13}\\ -4a_{21} & a_{22} & 3a_{23}\\ -4a_{31} & a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}$

解 $D=-2\begin{vmatrix} -4a_{11} & a_{12} & 3a_{13}\\ -4a_{21} & a_{22} & 3a_{23}\\ -4a_{31} & a_{32} & 3a_{33}\end{vmatrix}=-2\times(-4)\times3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=24$

由于三角行列式容易计算，因此用行列式的性质将一个行列式化成三角行列式是计算行列式时经常使用的一种方法，而且将行列式化成三角行列式的过程也是行列式性质综合应用的过程. 以化行列式为上三角行列式为例加以说明：首先将主对角线下方第一列的元素全化为零，然后依次将对角线下方第二列，第三列，…，直到第 $n-1$ 列元素化为零.

通常用 r_i 表示第 i 行，用 c_i 表示第 i 列，则性质2、3、5所表示的关于行（列）的三种运算可分别表示为 $r_i\leftrightarrow r_j$，$r_i\times k$，r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$，$c_i\times k$，c_i+cr_j. 利用这些运算可以简化行列式的计算，但应注意尽量避免分数运算，有分数时，先将分数化为整数运算比较简单.

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3/2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5/3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4/5\end{vmatrix}$

解 先使行列式元素变成整数，再用行列式性质化 D 为三角行列式.

$$
D=\frac{1}{2\times3\times5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 10 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 18\\ 5 & 10 & 15 & 4\end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_2-2r_1} \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 10 & -2\\ 0 & 3 & 5 & 18\\ 0 & 0 & 15 & -1\end{vmatrix}
$$

$$\xlongequal{r_3+3r_2}\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&35&12\\0&0&15&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_4}\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&5&14\\0&0&15&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-3r_3}\frac{1}{30}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&-1&10&-2\\0&0&5&14\\0&0&0&-43\end{vmatrix}=\frac{1}{30}(5\times43)=\frac{43}{6}$$

例 3 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a&a\\a&x&a&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x&a\\a&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$

解 行列式 D_n 的特点是每一列（行）元素的和都相等，把第 2，3，…，n 列都加到第 1 列上去，提取公因子，然后各行减去第一行，得

$$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a&a\\x+(n-1)a&a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x&a\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a&a\\1&x&a&\cdots&a&a\\1&a&x&\cdots&a&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a&a&\cdots&x&a\\1&a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a&a\\0&x-a&0&\cdots&0&0\\0&0&x-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a&0\\0&0&0&\cdots&0&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 4 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明 左端 $=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = D_1 + D_2$

利用行列式的性质可将 D_1 化为

$$D_1 \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

类似地可将 D_2 化为

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

于是，左端 $=2D_1 = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

思考与训练

1. 下面运算对吗？为什么？

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

2. 下面计算错在哪里？

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1 + r_3]{\substack{-r_2 + r_1 \\ -r_3 + r_2}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3. 行列式中若某行和某列都有相同因子，是否可以同时提取？

§3 行列式按行（列）展开式

利用行列式的性质可以简化行列式的计算，且低阶行列式显然比高阶行列式方便计算，因此可将高阶行列式化为低阶行列式，然后去计算．为此首先介绍余子式与代数余子式的概念.

定义 1 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后，