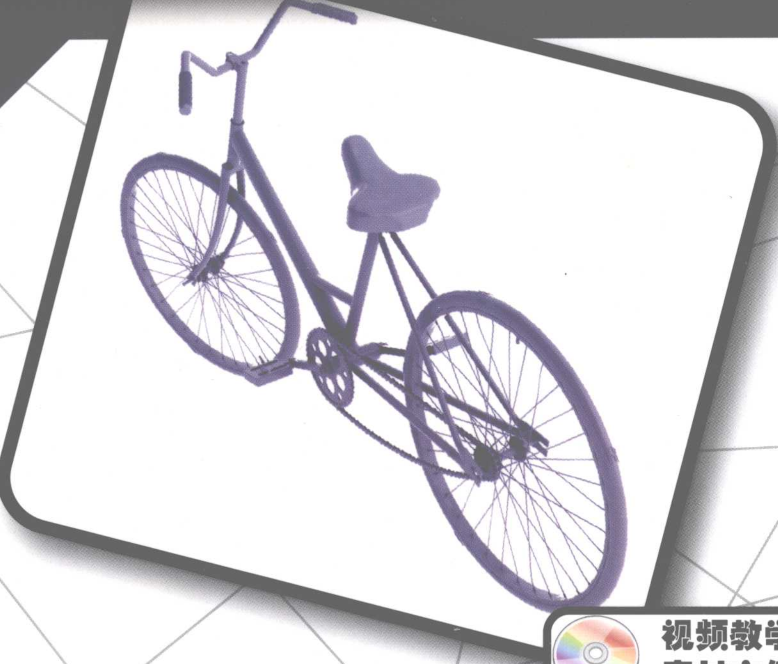
SolidWorks 机械设计实战系列教程

# SolidWorks 机械设计实战教程

## ——有限元分析

段建中　王晓阳　编著

照猫画虎学软件
实战演练学设计



视频教学引导
素材文件支持

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

SolidWorks 机械设计实战系列教程

# SolidWorks 机械设计实战教程
# ——有限元分析

段建中　王晓阳　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书以自行车设计为案例，详细讲解了 SolidWorks 2009 有限元插件 Simulation 的使用方法。本书第 1 章介绍了有限元理论的基本入门知识，为读者正确使用 Simulation 进行力学分析打下基础。然后按自行车车把、车架、鸡大腿三大部分，分别介绍这 3 个部位的造型及有限元分析。在本书附录中介绍了本书的使用方法，SolidWorks2009 的界面、工具栏，以及供读者进一步练习的三维实体造型等。

随书所附光盘提供了自行车车把、车架、鸡大腿装配体，以及作为有限元练习用的其他零部件的所有零件造型（.SLDPRT 格式）和装配体造型（.SLDASM 格式）的源文件，可供读者学习时参考。

有限元分析方法与造型设计相比较难掌握，但通过本书的案例分析，一般技术人员都能够顺利地胜任工作。本书以案例驱动的软件学习模式编写，不但能使读者轻松掌握软件的各种功能，而且学习软件过程本身也是一个有限元分析能力的训练过程，可达一箭双雕的目的，尤其是对于初次接触有限元分析的读者大有裨益。

本书可作为各层次院校软件应用培训教材，也可作为机械设计从业人员的参考、学习用书。



**图书在版编目（CIP）数据**

SolidWorks 机械设计实战教程——有限元分析 / 段建中，王晓阳编著. —北京：电子工业出版社，2009.6
（SolidWorks 机械设计实战系列教程）
ISBN 978-7-121-08792-9
Ⅰ. S… Ⅱ. ① 段… ② 王 …… Ⅲ. 机械设计：计算机辅助设计—应用软件，SolidWorks—教材 Ⅳ. TH122
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 071337 号

策划编辑：陈韦凯
责任编辑：范子瑜
印　　刷：北京智力达印刷有限公司
装　　订：北京中新伟业印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：12.75　字数：320 千字
印　　次：2009 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　定价：33.00 元（含光盘 1 张）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# “SolidWorks 机械设计实战系列教程”

## 丛 书 序 言

这套丛书共 4 本，其中三维实体设计 2 本、有限元分析 1 本、三维动画设计 1 本。它们是写给那些从来没有接触过三维设计软件的读者以及那些使用过其他 CAD 软件但不熟悉 SolidWorks 的读者。你们或许是技术工人、在校大学生、技校学生乃至习惯于手工画图的年长工程师。我相信，只要具有初级计算机操作技能、机械制图以及基本机械设计背景的任何读者通过本书的训练，就会在短时间内“上手”，即用 SolidWorks 完成你们的设计任务。当然，前提是必须一丝不苟地完成本书中的所有实战演练，在自学的情况下大约需要 1～2 周左右时间。

那么，这套丛书有什么“高明”之处呢？

（1）我相信这样的原则：初学者学习软件最快捷、最省事的办法是“照猫画虎”。也就是说，初学者用不着先问为什么，尽管按照书中实例的操作步骤一步一步地往前“走”，当你画完一些零件或装配体后，就会逐渐地从“知其然”变成“知其所以然”。这是我从自己多年的教学和培训实践中总结出来的经验，一定对你有效。你也许会认可这样的说法：一个从来没下过象棋的人，教官如果只给他/她讲象棋的理论或棋谱，他/她一定会觉得莫名其妙，学了半天什么也没学到。

（2）这套丛书选择的设计对象有初学者熟知的机械产品（如魔方、减速器等），也有经过市场考验、结构相对比较复杂的柴油机油泵。前者用不着很专业的机械设计知识，同时也很有趣。当你把自己设计好的零件装配成漂亮的成品后，不但会产生小小的成就感，而且也会觉得 SolidWorks 并不难学，你甚至会产生立即设计新产品的欲望。对于有一定设计基础的读者，可采用本丛书中的柴油机油泵设计来体验较复杂机械产品的设计乐趣。

（3）本丛书是按“傻瓜”风格编写的，给出的画图步骤使初学者“用不着费脑筋”就能完成实战演练中的设计任务。这也是“照猫画虎”原则的体现。

（4）在每一个实战演练开始前，都要介绍设计对象的原理和机械结构。这样会避免读者在设计过程中的盲目性。

本丛书中的实战演练基本上涵盖了机械设计中常用的结构零件、装配体、力学分析及动画设计。每本书的学习完成后，你会感悟到 SolidWorks 是你未来工作的强有力助手，剩下的事情就是如何提高设计速度了。

我们国家正在向制造业强国迈进，如果不培养众多的机械设计工作者的话，这一期望将会成为泡影。而 CAD 软件的普及将会使得过去只有行业高手才能胜任的工作变得一般技术人员也容易掌握。如今，借助于软件一个职业学院的在校生可以设计复杂的叶轮，这在手工设计时代是很难做到的。

软件改变了设计生态，其结果就是：新手成为高手的成熟时间大大缩短，更多平均智商的设计者会创造出过去经验丰富的工程师才有可能设计的作品，未来五花八门的新设计很有可能大多出自“平庸者”之手。“天生我才必有用”这句话在软件时代，对于那些掌握

了软件使用窍门者才会是真实。因为一个机器变成实物的过程，“构思—设计—力学分析—施工图纸—制造—试车（虚拟）”的诸环节中，除了实物以外，都要仰仗软件。

对于一位在制造业使用软件多年的大学教师，处于这样的时代是十分令人激动的。我很愿意把自己的学习和教学培训经验传授给大家。高效地传播实用知识是大学教师之重要职责，我们写这套丛书的目的就是让更多的年轻人掌握机械设计的利器，为我国制造业人才培养做出力所能及的贡献。同时我们也希望这种特色写法的书能够在SolidWorks培训教材市场上能占有一席之地。

本丛书4本教程的名称如下：

- Solidworks初学者实战教程——魔方、虎钳、减速器设计
- Solidworks机械设计实战教程——柴油机油泵设计
- Solidworks机械设计实战教程——动画设计
- Solidworks机械设计实战教程——有限元分析

需要说明的是，本丛书中介绍的造型方法、力学分析、动画设计及其步骤不一定是最简洁的。读者在学完每本教程之后，希望能提出更好的设计方案，并请将你的结果发布在“机械设计与制造学习网（www.2mmm.net）”的“设计与加工软件”栏目，供后继的初学者参考。关于本书中的错误以及不完善之处请读者反馈至：duanjz@nxu.edu.cn或duan_jianzhong@hotmail.com。

参与本丛书撰写工作的还有冯利、达明远、王晓阳、郝魁先生。他们几位都是SolidWorks的爱好者和卓有成效的使用者，其学习和设计经历充分印证了本书所倡导的CAD软件学习理念。此外，我的另外几个学生王康、刘富堂、张治业等同学也提供了部分造型素材。在此对他们的辛勤劳动表示衷心的感谢。

段建中

2009年5月

# 前　言

本书主要介绍 SolidWorks 2009 有限元分析模块 Simulation（从 SolidWorks 2009 版本开始，SolidWorks 有限元分析模块由 COSMOSWorks 改名为 SolidWorks Simulation)。以“案例驱动”的写作思路，通过 3 个具体实例的有限元分析步骤，使得初学者能够较快地掌握 Simulation 的功能，从而在短时间内将有限元力学计算用于产品开发中。这些案例都取自实测的自行车零部件。由于自行车零部件的力学计算较具典型性且有一定难度，所以掌握了这类零件与装配体的有限元分析方法，对于其他类型零部件（如轴类、箱体类等）的力学计算就会得心应手。本书将被分析零件和被分析装配体的三维实体建模与有限元分析合为一体，利于具备不同 SolidWorks 软件使用基础的读者学习掌握。

与造型软件相比，有限元分析软件的使用要困难得多。原因之一是：要想正确而高效地利用有限元分析软件进行力学计算，使用者必须具备一定程度的有限元分析理论知识。而这些知识对于企业设计人员来说学习起来有一定困难。鉴于此，本书第 1 章以尽可能通俗的讲解方式介绍了有限元理论的基本概念，读者掌握了这些基础之后，在使用软件进行机械结构的力学计算时就不会感到盲目，同时也能理解软件各个功能的含义并提高分析的效率。

本书第 2 章介绍了车把零件的造型和有限元分析的模型简化、载荷施加、网格划分等基本内容。这一章可以说是 Simulation 的入门演练，尽管所涉及的功能有限，但通过这一实例，读者能够较容易地对有限元分析软件的使用有一个总体认识，并且不会感到高不可攀。

本书第 3 章讲解了较车把零件更为复杂的车架零件的有限元分析步骤。对于单个零件的有限元分析来说，该案例基本上涵盖了 Simulation 的主要功能。读者只要认真地完成了这些步骤的练习并且理解了相应的力学背景，就单个零件的力学分析而言，就可以在实际设计工作中运用有限元分析方法。

本书第 4 章是关于装配体的有限元分析，内容基本上覆盖了 Simulation 装配体力学分析的主要功能。其中装配体零件之间的接触与缝隙设定是单个零件力学分析中没有涉及的。

本书附录部分分别介绍了软件安装、软件界面以及学习技巧。此外，还分别附有前叉零件和前轴装配体的建模步骤，供读者自己练习零件有限元分析和装配体有限元分析之用。

与以往孤立地介绍软件使用的教程不同，本书以“案例驱动”为导向，通过自行车零件与装配体的造型与有限元分析，将企业一线技术人员和其他初学者轻松地带入了被视为“畏途”的有限元分析领域。本书将对有限元方法在企业的普及起到积极作用。

本书可作为各层次机械设计从业人员的自学读物，也可作为各层次院校有限元分析模块 Simulation 的培训教材。

段建中　王晓阳

2009 年 5 月

# 目 录

# 第 1 章　有限元分析基础知识简介

## 本章概述

使用有限元分析方法进行机械结构的力学计算，对于制造业企业的技术人员来说是一门较难掌握的技能，其在企业的普及率远比设计软件的普及率低。原因有：其一，介绍有限元方法的书籍多从数学角度出发，介绍了大量的公式推导过程，一线设计人员没有时间消化，故而视其为“高深”，遂放弃；其二，大型有限元软件的使用也非使用者一朝一夕所能得心应手，使用者必须对有限元理论有深入了解；其三，大型有限元软件一般都是“包打天下”型的，也就是说不是为特定行业定制的。本书介绍的 SolidWorks 2009 有限元分析模块 Simulation 则是专门针对机械产品的力学分析而开发的软件，故而易于为机械行业的技术人员所接受。有限元分析的两个环节：力学模型的构造和力学计算均在一个软件中完成，这就使得分析计算过程变得十分方便。

尽管 Simulation 是行业导向的有限元分析软件，但是使用者若想正确而高效地使用它，仍然需要对有限元分析理论有一定的了解。本章试图用尽可能通俗的陈述介绍有限元分析方法的粗浅入门知识，以便读者能够快速步入 Simulation 门槛。

本章从读者熟悉的材料力学分析方法入手，逐渐引入有限元分析的基本思想。对于初学者来说，重点是理解有限元分析方法进行机械结构力学计算的基本思路，而不是数学推导。遗憾地是，为了理解有限元分析的实质，又不得不用数学公式来解释。对此，读者只需看懂推导结果之间的逻辑关系即可，不必深究推导过程本身。

**本章的主要知识点如下：**

- 有限元方法的由来
- 有限元方法进行力学计算的基本思路
- 位移函数的构造
- 位移函数与应力、应变之间的关系
- 有限元法的物理原理
- SolidWorks Simulation 简介

## 1.1 有限元分析方法的感性认识

设计任何机器都必须进行力学计算，即求得零件所承受的应力和应变等，视其是否能够满足服役要求，所以掌握力学计算工具就显得尤为重要。机械设计与制造背景的专业人士在大学里都要学材料力学课程，从事设计工作后，材料力学也是主要的力学分析工具。但是，材料力学只能计算一些简单、特殊机械结构，对于复杂的结构要么无能为力，要么将其简化为材料力学能够计算的模型。简化的结果就是力学模型与实际物理对象差别较大，计算结果不能真实反映实际机械结构的受力状况，或两者误差较大。为了安全，不得以用安全系数（一个大于 1 的数）来弥补。这种权宜之计导致的结果往往是机器的"傻大粗笨"。其实质是缺乏有效的力学计算理论和工具，导致技术人员无法搞清楚机械零件每一点的真实受力状况，以及整个机械零件的应力分布。

迫切的客观需求和相关技术的进步催生了一种新的力学计算理论和工具：有限元分析。那么什么是有限元分析呢？其实有限元的基本思路在很久以前就已产生并得到了应用，例如用多边形（有限多个直线）逼近圆从而求得圆的周长，但作为一种有效的力学计算方法而被提出，则是最近几十年的事。有限元法的基本思想是将问题的求解域（即一个宏观尺寸的弹性体）划分为一系列小单元（这种单元形状简单，易于用数学方程描述），单元之间仅靠节点连接。然后将各单元方程组集合在一起形成总体代数方程组，最后计入边界条件求解，得出结果。

上面的说法有些抽象，下面这个例子有可能让企业技术人员和初学者更容易理解有限元的概念。本例目的是想把数学符号拉回到物理现实，同时告诉读者，在一定程度上，有限元理论难懂是因为直观的力学问题被高深的数学理论掩盖了。

众所周知，机械零件的几何形状和所受到的载荷形式千差万别。但是如果把它们看成一个抽象的弹性体并用材料力学中最简单的杆件来代替，是不是就容易求解了呢？

例如，把一个厚度均匀的大三角形板（图 1-1）抽象成若干个铰链连接的、由小三角形组成的桁架（图 1-2），那么构成桁架的每个杆就是一个受拉或受压的二力杆，求解每个杆的应力和应变就相对容易。

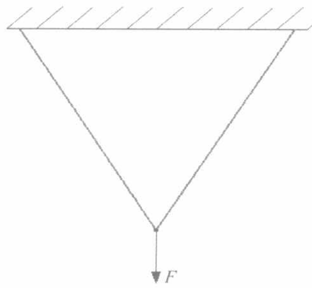



图 1-1

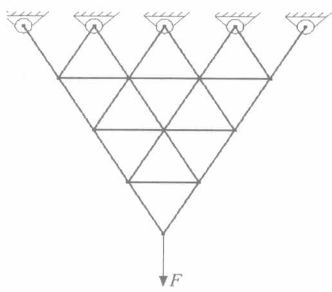



图 1-2

根据微积分的思想，当这些小三角形的数量趋于无穷大时，小三角形组成的桁架的物理状态与大三角形板的物理状态趋于相同。

这个例子隐含了以下思想：

（1）将一个连续的（可以理解为一个几何实体）、不容易用材料力学求解的、承受某种载荷的机械零件近似为若干个简单易解的力学模型，这一过程称为离散化。小三角形桁架的每个二力杆称为一个单元，每个相邻二力杆的连接处称为节点。

（2）单元数量越多，所求得的计算结果越接近实际物理状态。但是在用人工或计算机计算时单元数量不可能取为无穷大，只能是有限多个，所以将这种力学计算思路称为有限单元法。

（3）为了使离散化后的结构尽可能地反映真实物理状态，单元的数目必须足够的多。这样一来，手工计算如此多的二力杆就有些力不从心，所以必须用计算机来承担这一任务。

上面通过一个特例，引入了有限元分析的粗浅思想。之所以将三角形板抽象为若干个二力杆单元，目的是为了让学习过材料力学而初次接触有限元的读者更容易理解。实际上，为了得到比较精确的计算结果，通常将大三角形板划分成（离散成）很多个图示的小三角形板（三角形单元）而不是由二力杆组成的三角形桁架。这些小三角形板的顶点（称为节点）之间可以想象成彼此用铰链连接。有限元法最本质的思想就是把一个大的、无论几何形状和受力复杂情况的机械零件划分为有限多个被称为单元的小弹性体，在每一个小弹性体里，假定弹性体的变形和应力都是简单的，小弹性体内的变形和应力都容易通过计算机求解出来，进而可以获得整个机械零件的变形和应力。

在有限元分析的专业术语中，将上述所称的小弹性体叫做区域。相邻区域之间的连接环节就是所谓的节点。为了便于初学者理解，这里用机械原理中的铰链来对应节点，其实有限元理论中所说的节点是否是机械工程师所熟悉的铰链并不重要，重要的是相邻节点之间的物理状态由作用力与反作用力来表征。将单元划分小的原因就是认为当弹性体（区域）的体积很小时，它的应力和应变可以用简单的函数予以表征并且容易求得，比如可以用一个简单的线性函数描述每个小弹性体内的变形和应力。当一个大的机械零件被离散化为若干个（有限多个）很小的弹性体时，弹性体上每个节点的应力和应变就被认为是决定该小弹性体上各点受力状态的关键要素。

需要说明的是，有限元方法已经发展成了一个专门学科，国内相关教科书和专著不计其数，但里面的数学内容过多，企业的技术人员不容易接受。以上述实例为基础，再通过 SolidWorks 有限元分析模块 Simulation 的演练，企业的技术人员就会逐渐地掌握这种工具。此外，建议读者在阅读有限元方法书籍时，重点放在有限元分析的基本思想是如何而来的、单元划分的要领、应用实例等，绕过数学推导。

## 1.2 有限元分析方法的理论基础简介

### 1.2.1 有限元分析理论的基本要点

#### 1. 什么是有限元法

有限元法亦称为有限单元法或有限元素法，它的基本思想是将一个连续弹性体离散化为有限多个单元并通过有限多个节点相连接的等效集合体，单元的集合称为网格。

## 2. 有限元分析法的基本思路

1）简化被分析机械结构的力学计算模型

（1）将被分析的机械结构“由整化零”，这些小的结构（单元，理论上它可以是任何形状的几何体）再通过节点处的联结组成一个与原机械结构几何形状相同的弹性体。

（2）编排单元号码与节点号码。

（3）将非节点载荷（如自重等）移植到节点上。

下面以图 1-3 所示钢结构桁架为例说明力学计算模型的简化：

（1）把焊接或铆接的节点简化为铰接，把实际受弯的杆（弯矩引起的应力比轴力引起的应力小的多）简化成只受拉（或压）的二力杆，即将结构离散成由铰链连接的二力杆组合体。

（2）移植载荷，认为载荷只作用在节点上。如把自重等非节点载荷移植到节点上，如图 1-4 所示。

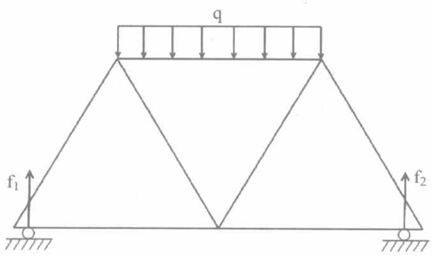



图 1-3

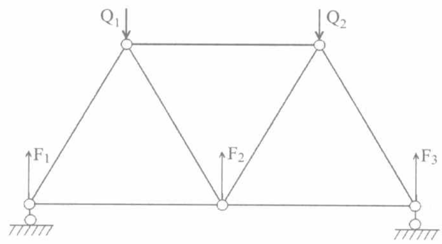



图 1-4

2）求出以节点位移表示的单元节点力

一个节点处的未知力（即单元节点力）的数目，往往多于一个节点所能建立的平衡方程式的数目；而该节点的位移数，恰好等于该节点所能建立的平衡方程式的数目。因此，只要在单元节点力与节点位移之间建立起桥梁（建立起数学关系），那么，无论有多少个未知力，则被求解的未知数永远为节点位移，它们可以通过建立节点力（以节点位移表示的）的平衡方程式求出，进一步就可以求出单元的内力或应力。

3）建立节点平衡方程式

建立全部节点的平衡方程式，得到求解节点位移的线性方程组，就可以得到节点位移。

4）求单元的内力或应力

采用这样的思路需要解决以下几个问题：

（1）单元怎样划分？单元的编号以及单元上每个节点的编号遵循什么原则？

（2）载荷如何移植？

（3）节点力怎样用节点位移表示？

（4）如何建立以节点位移表示的节点力平衡方程式？

（5）怎样去求单元的内力（或应力）？

5）求出节点位移函数、弹性矩阵、刚度矩阵

到此，一个机械结构的有限元分析就完成了。

### 1.2.2　构造位移函数

如上所述，节点力方程式能够通过相应单元的位移方程求得，那么就必须构造出位移方程。我们把单元在节点力作用下各点的位移称为内位移，描述内位移的函数叫位移函数。由材料力学可知：对于仅受轴向作用的二力杆（恒截面杆），其应力及应变在轴线各点处均相同，因而位移沿杆轴线呈线性变化。假定二力杆未受力前的长度为 $l$，且左端为固定端，右端受一个大小为 $F$ 的力作用。杆件两个端点分别标记为 $i, j$，并以 $i$ 点为原点建立坐标系 $i(X,Y,Z)$，见图 1-5，使坐标系的 $X$ 轴与杆件的轴线重合，则其位移函数可构造为

$$u(x) = a_1 + a_2 x \tag{1-1}$$

其中 $a_1$，$a_2$ 为待定系数，$x$ 为杆上任一点的坐标值。图 1-5 中 $i$ 和 $j$ 标记两端轴线处的节点。

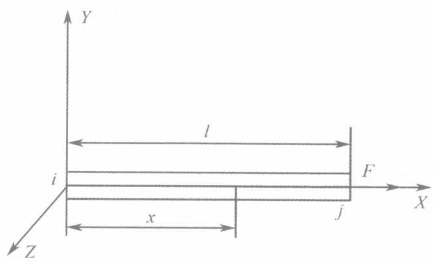



图 1-5

相应地，$u_i(x)$，$u_j(x)$ 或 $u_i$，$u_j$ 表示 $i$ 和 $j$ 两点产生的位移。

根据前面的假设，$i$ 点为固定端，所以当 $x=0$ 时，$i$ 点的位移 $u(0) = u_i = 0$；当 $x=l$ 时，$j$ 点的位移 $u(l) = u_j$。

把以上两式 $u(0)$、$u(l)$ 代入式（1-1）可得

$$a_1 = u_i,\quad a_2 = \frac{u_j - u_i}{l} \tag{1-2}$$

将式（1-2）代入式（1-1）中，则 $u(x)$ 可表示为

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l}x = (1 - \frac{x}{l})u_i + \frac{x}{l}u_j$$

或用矩阵表示为

$$u(x) = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l}\right]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left[N_i, N_j\right]\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e$$

通常用 $\{u\}$ 代表单元内位移，$\{\delta\}^e$ 代表节点位移，则

$$\{u\} = [N]\{\delta\}^e = N_i u_i + N_j u_j \tag{1-3}$$

其中
$$N_i = 1 - \frac{x}{l}, N_j = \frac{x}{l}$$

在有限元法中，$N_i, N_j$ 叫做 $i$ 点、$j$ 点的形状函数或插值函数，$[N]$ 叫形状函数矩阵，形状函数矩阵十分重要，它把单元的节点位移和单元的内位移联系了起来。

### 1.2.3 位移函数与应力、应变之间的关系

仅仅构造了位移函数尚不能进行力学计算，所以还必须在单元体的位移函数和应变及应力之间建立桥梁。根据应变定义：

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

将矩阵形式的位移函数（1-3）代入后得

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[N]\{\delta\}^e = [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\frac{x}{l}), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{x}{l})]\{\delta\}^e = \frac{1}{l}[-1,1]\{\delta\}^e$$

或写成

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \tag{1-4}$$

其中 $[B] = \frac{1}{l}[-1,1]$ 叫做几何矩阵，几何矩阵 $[B]$ 把单元的节点位移 $\{\delta\}^e$ 与应变列阵 $\{\varepsilon\}$ 联系起来（只有一列数字的矩阵称为列阵）。

对于拉（压）杆，应力和应变之间关系有

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

用矩阵表示为

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1-5}$$

其中 $[D]$ 称为弹性矩阵，将式（1-4）代入式（1-5）得

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e$$

其中 $[S] = [D][B]$ 叫应力矩阵，对于杆单元 $[S] = \frac{E}{l}[-1,1]$。

### 1.2.4 位移函数的选择

位移函数既然是构造出来的，那么势必就带有“人为性”，所以就存在一个选择问题，即什么样的函数最接近被描述的物理对象。当然，这种“人为性”是建立在一定的物理基础及合理的假设基础之上的。以上的分析对象是等截面杆，其位移函数是线性的，被称为一维力学模型。对于很多实际情况，被分析对象的几何形状和受力状况都远比一维力学模型复杂，并将它们称为二维单元及三维单元模型（见图 1-6）。一般地，如果仍然用简单的线性函数表示它们的位移函数的话，在节点数相同的情况下，线性函数较非线性函数计算结果误差大。所以在有些情况下就不能简单地用线性函数来表示单元位移函数。

有限元法的基本思想是分段逼近，即把求解区域划分为许多小区域（有限个单元），然后再对每个小区域用简单函数近似表示并求解，最后得到复杂问题的解，因此，必需的步骤就是为每个单元选择一个简单的位移函数，现阶段多项式形式的位移函数使用最广，原因有二：

（1）用多项式形式的插值函数来建立和计算有限元方程比较容易，特别是易于进行微分和积分。

（2）增加多项式的项数可以提高计算结果的精度，理论上，当多项式的项数无穷多时就相当于准确解，但在实际中，只取有限项的多项式作为近似解。

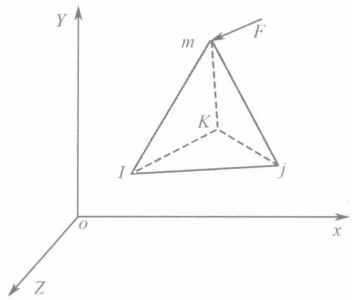



图 1-6

### 1.2.5 位移函数的多项式形式

一维单元中，位移函数的多项式形式表示为

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x + \cdots + a_{n+1} x^n$$

二维单元中位移函数表示为

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy + \cdots + a_m y^n$$

三维单元中位移函数表示为

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 z^2 + a_8 xy + a_9 yz + a_{10} zx + \cdots + a_m z^n$$

在大多数实际应用中，插值函数多项式的阶次一般取为一次、二次或三次。因此，上式中 $n$ 的值一般取 1、2 或 3。

### 1.2.6 插值多项式阶次的选择

选择插值函数多项式的阶次时，必须考虑到下列因素：

（1）插值多项式应当尽可能满足收敛性要求；

（2）多项式描述的位移形式与局部坐标系无关；

（3）$a_i$ 的数目应等于单元节点自由度的数目。

对于第（1）条，稍后介绍。第（2）条容易理解，无论在总体坐标系（图 1-6 中的 $XYZ$ 坐标系）或是在局部坐标系中（图 1-6 中以单元的任何一个节点 $i$, $j$, $k$, 或 $m$ 作为坐标原点的坐标系），位移函数的表达式不变，这种性质称为几何等向性。第（3）条这里举例说明一下：对于三节点三角形平面单元（如图 1-6 中 $ijm$ 平面构成的单元），插值多项式应选为

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

因为单元节点自由度 $= 3 \times 2 = 6$，插值多项式系数包含 $a_1, \cdots, a_6$，从而可以用单元节点未知数来表示多项式系数。

又如六节点三角形平面单元，节点自由度 $= 6 \times 2 = 12$，插值多项式可选为

$$u(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5y^2+a_6xy$$

$$v(x,y)=a_7+a_8x+a_9y+a_{10}x^2+a_{11}y^2+a_{12}xy$$

从上面的分析可以看出，对于某一特定单元（上例中所述平面三角形单元），增加节点数可以增加位移函数的多项式的项数。根据前面的解释，位移函数的多项式的项数越多则计算结果越趋近于真实值，当多项式的阶数取一阶而满足不了计算精度时，可以通过增加单元节点数来增加位移函数的多项式的阶数来提高计算精度（如在三角形每个边的中点增设节点）。

### 1.2.7 收敛性要求

由于有限元法是一种近似的数值求解方法，故当单元的尺寸逐渐缩小时，就得到一系列近似解。如果插值多项式满足下列收敛性要求，这一系列解就收敛于准确解，位移函数收敛准则归纳起来有三条：

（1）位移函数中必须含有反映刚体运动的项数。

多项式形式的常数项即体现这一刚体位移。每个单元的位移一般总是包含两部分，一是由本单元形变引起，另一部分是与本单元形变无关的，即刚体位移，它是由其他单元发生形变而连带引起的，如悬臂梁自由端处本身形变小，位移主要是连带引起。

（2）位移函数应反映单元的常应变，即位移函数的导数中必须有常数项存在。

当单元尺寸无限缩小时，单元应变将趋近于常量，因此单元位移函数中应包括常应变项。平面应力和空间应力中，应变是位移的一阶导数，常应变即要求位移函数含有一次项。

（3）位移函数必须保证在相邻单元的接触面上应变是有限的。

在有限单元法中，按位移（按最小势能原理）求解时，只计算了各单元内部的功（应变能），没有计算相邻两单元接触面上的功，由于接触面的厚度是零，当接触面上的应变是有限值时，此功等于零，反之，当接触面上的应变不是有限值时，此功就可能不等于零，忽略它会引起一定的误差。

如果插值多项式满足全部三个收敛要求，则当加密网格和增加更小单元的数量时，近似解就收敛于正确解。

在机械结构的力学分析问题中，满足全部收敛性要求的插值函数总是导致位移解从下向上收敛。原因是：按最小势能原理求解时，必须先假设单元位移函数，这些位移函数是连续的，但却是近似的，从物体中取出的一个单元，作为连续介质的一部分，本来具有无限个自由度，在采用位移函数后，只有以节点位移表示的有限个自由度，位移函数对单元的变形能力有所限制，使单元的刚度增加了，物体的整体刚度也随之增加了，因此计算的位移近似解将小于精确解。而不满足第（3）条的单元（非协调元）则可能从下向上或从上向下收敛。

### 1.2.8 有限元法的物理原理

从数学的角度讲，有限元法是一种离散化的数值解法；从物理的角度讲，它是基于所谓能量原理。建立数学模型时所得到的方程组中所含有未知数的性质有三种情况：一种是以位移作为未知量的分析法，这种情况称作位移法，位移法采用最小位能原理或虚位移原理进